(1) Digueu quins conjunts són oberts, tancats o compactes

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x,\ e^{xy} - \sin x \leq y^4 + e^x\}$

S. $f(x,y) := e^{xy} - \sin x - y^4 - e^x$. Aquesta funció és definida i contínua (suma de funcions elementals i composició de funcions elementals) en tot $\mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x\} \cap f^{-1}((-\infty,0])$$

- $f^{-1}([0,+\infty))$ és tancat perquè és l'antiimatge d'un tancat de $\mathbb{R}$, $(-\infty,0]$, per una funció contínua definida en tot $\mathbb{R}^2$.
- D'altra banda:

$$x^2+y^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 = \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4},$$

que és un disc tancat amb centre $(1/2, 0)$ i radi $r = 1/2$, i.e.:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x\} = \overline{B_1^2(1/2, 0)}$$

Per tant $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x\}$ és tancat i acotat.

Llavors A és tancat perquè és la intersecció de 2 conjunts tancats i és acotat perquè un d'ells ho és. Llavors A és compacte $\square$

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} \geq x+y+z\}$

S. $B = B_1 \cap B_2$,

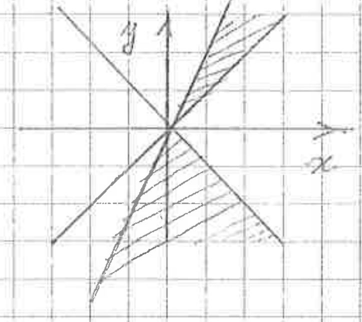
amb

$B_1 = \overline{B_1^3(0,0,0)}$ per tant B_1 és tancat i acotat

$B_2 = f^{-1}([0,+\infty))$, on $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x,y,z) = e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} - x - y - z$. Com que f és contínua en tot $\mathbb{R}^3$, $B_2 = f^{-1}([0,+\infty))$ és un conjunt tancat

PLUS PAPEL

llavors B és la intersecció de dos tancats, per tant és un conjunt tancat i com que un d'ells és acotat, B és també acotat. Així doncs B és compacte. □



c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0,\ y \leq 2x\}$

$x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \Leftrightarrow |x| \leq |y|$

Aquest conjunt ja que és la intersecció de dos conjunts tancats $f^{-1}((-\infty, 0])$ i $g^{-1}((-\infty, 0])$, on $f(x,y) = x^2 - y^2$, $g(x,y) = y - 2x$ (funcions contínues i definides en tot $\mathbb{R}^2$).

En canvi G no és acotat. Per exemple, la recta $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ està inclosa en G, amb la qual cosa G no pot ser compacte. □

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1,\ xyz > 0\}$

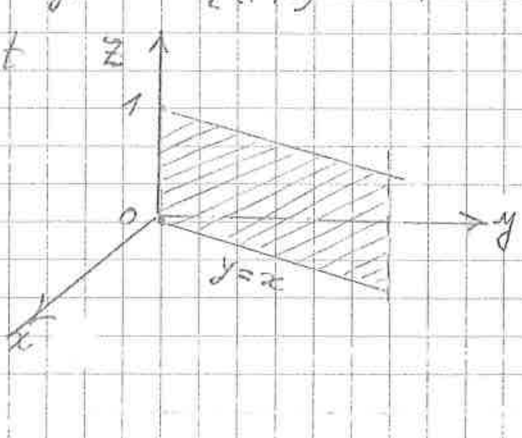
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 > 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 < 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz > 0\}$

$= f^{-1}((0, +\infty)) \cap f^{-1}((-\infty, 1)) \cap g^{-1}((0, +\infty))$,

on f i g vénen donades, respectivament, per $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ i $g(x,y,z) = xyz$, f i g són funcions contínues definides en tot $\mathbb{R}^3$ i $(0, +\infty)$, $(-\infty, 1)$ són oberts de $\mathbb{R}$, per tant $f^{-1}((0,+\infty))$, $f^{-1}((-\infty,1))$ i $g^{-1}((0,+\infty))$ són oberts de $\mathbb{R}^3$. Alashores la intersecció $A = f^{-1}((0,+\infty)) \cap f^{-1}((-\infty,1)) \cap g^{-1}((0,+\infty))$ és també un conjunt obert.

Com que A és un conjunt obert no pot ser compacte

A és acotat? No, perquè, per exemple, conté el conjunt $S = \{(x,x,z) : x > 0,\ 0 < z < 1\}$ està contingut en A i clarament és no acotat



e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

Els dos últims conjunts d'aquesta intersecció són oberts i el primer

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0\} = f^{-1}((0,+\infty))$

és la antiimatge per una funció definida i contínua en tot $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \overset{f}{\mapsto} f(x,y) = x^2 + \sin y$ d'un conjunt obert de $\mathbb{R}$, l'interval $(0,+\infty)$, per tant és un conjunt obert. E ve donat donc per la intersecció de tres conjunts oberts. Alashores és un conjunt obert. Com que E és obert no pot ser compacte. □

E és acotat. No: inclou el conjunt $\{(x,\pi),\ x \neq 0\}$, que és la unió de dues semirrectes i per tant és no acotat.

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ \frac{x^2+y^2}{x} < 2\}$

$= B_1^2(1,0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$: Intersecció de dos conjunts oberts i per tant és un conjunt obert. Llavors no pot ser compacte. És acotat? Sí, perquè és la intersecció de dos conjunts i un d'ells és acotat □

2. Doneu el domini de definició de les funcions següents

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2-4}$,

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9,\ x^2+y^2 \neq 4\} = \overline{B_3^2(0,0)} \setminus B_2^2(0,0)$

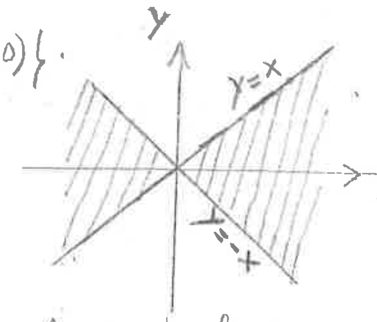
b) $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$

El domini ve donat pels punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $16-4x^2-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1$, és a dir pels punts interiors i frontera del domini encerclat per una ellipse de semieixos $A = 2$, $B = 4$

PLUS PAPEL

(c) $f(x,y) = \left(\ln(x\cdot y),\ \sqrt{4-x^2-y^2} \right)$. $D(f) = \overline{B}^2_2(0,0) \cap \left(\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix} \right\} \right)$

(d) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$. $D(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x\leq y\leq x\} \setminus \{(0,0)\}$.



Domini de $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$: el punt $(0,0) \notin D(f)$.

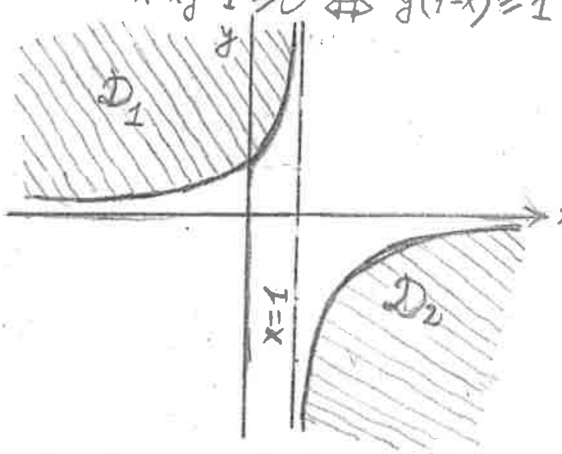
(e) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(f) $f(x,y) = \sqrt{y-xy-1}$.

(Indicació: Determinem el conjunt $y-xy-1=0$).

El domini de f vindrà donat pels punts $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$x-xy-1 \geq 0 \Leftrightarrow y(1-x) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} y \geq \frac{1}{1-x},\ x<1 \\ y \leq \frac{1}{1-x},\ x>1 \end{matrix}$$



Domini de f: $D(f) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

Aleshores:

$$D(f) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{1-x},\ x<1\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{1-x},\ x>1\right\}.$$

(g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$. $D(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9\} = \overline{B}^3_3(0,0,0)$.

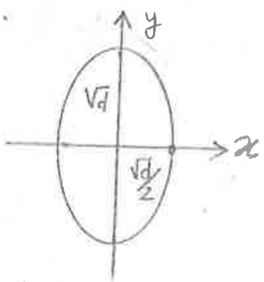
(3) Troben les corbes de nivell de les següents funcions i diguem quin és el seu rang (i.e. el conjunt de valors que prenen).

a) $f(x,y) = x^2+y^2$. $x^2+y^2 = d$ amb $d\geq 0$: família de circumferències de radi $d^{1/2}$ amb $d\geq 0$, i centre $(0,0)$. $R(f) = [0,+\infty)$.

b) $f(x,y) = 4x^2+y^2$. $4x^2+y^2 = d \Leftrightarrow$ $(x,y) = (0,0)$, si $d=0$

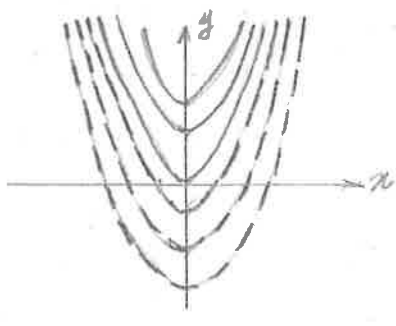
$\dfrac{x^2}{(\sqrt{d}/2)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{d})^2} = 1$, si $d>0$: el·lipse amb centre l'origen i semieixos sobre els eixos coordenats de longitud $\sqrt{d}/2$ i $\sqrt{d}$.

El rang de f ve donat pels valors possibles de d. Llavors: $R(f) = [0,+\infty)$.



Corba de nivell $4x^2+y^2 = d$, amb $d>0$.

c) $f(x,y) = x^2-y$. $x^2-y = d \Leftrightarrow y = x^2-d$, $d\in\mathbb{R}$. Paràbolas amb eix donat per l'eix vertical



Corbes de nivell de $f(x,y) = x^2-y$: les línies contínues corresponen a $d\leq 0$ i les línies "a trossos" corresponen a corbes de nivell amb $d>0$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definida per $(x,y) \neq (0,0)$ (Indicació: aïlleu y en termes de x sobre cada corba de nivell.

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = d \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\iff} xy = d(x^2+y^2) = dx^2+dy^2 \iff dy^2 - xy + dx^2 = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2-4d^2x^2}}{2d} = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4d^2}}{2d},\ d \neq 0$$

$$x \geq 0: y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4d^2}}{2d}x,\quad x<0 = \frac{1 \mp \sqrt{1-4d^2}}{2d}x$$

$$L_d = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = \frac{1+\sqrt{1-4d^2}}{2d}x,\ x \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = \frac{1-\sqrt{1-4d^2}}{2d}x,\ x \in \mathbb{R}\right\},\ d \in [-\tfrac{1}{2},0) \cup (0,\tfrac{1}{2}]$$

$$L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x=0,\ y\neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y=0\}$$

$\mathcal{R}(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ □

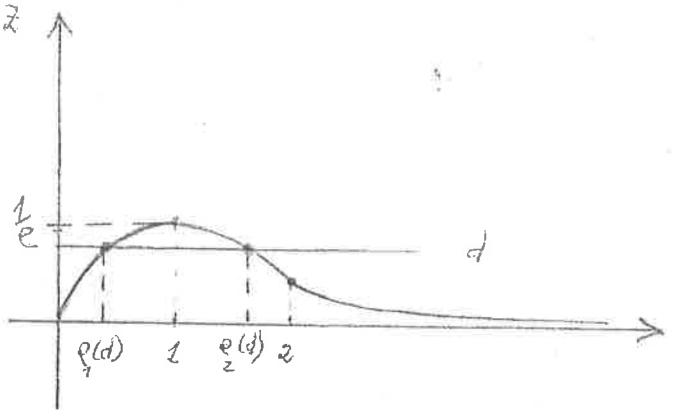
e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, definida per a $(x,y) \neq 0$ (Indicació: Feu com a (d))

Procedint com a d obtenim: $L_d = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\sqrt{\frac{1-d}{1+d}},\ x \in \mathbb{R}\right\}$

$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\sqrt{\frac{1-d}{1+d}},\ x \in \mathbb{R}\right\}$, per $-1 < d \leq 1$, $\mathcal{R}(f) = (-1,1]$ □.

f) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ (Indicació: relacioneu els valors de f amb els de la funció $h(\rho) = e^{-\rho}$).

Clarament $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} = h(\rho)\ \forall (x,y) : x^2+y^2 =: \rho$. Així veiem que els valors que pren la funció f en el punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ depèn només de la distància de (x,y) a l'origen, amb la qual cosa tindrem que les corbes de nivell de f seran circumferències de centre $(x,y)=(0,0)$ i radi $\sqrt{\rho}$, $\rho > 0$, i.e. $L_d(f) = \{(x,y) : x^2+y^2 = \rho(d)\}$. Ara bé, quina relació hi ha entre ρ i d? En altres paraules: donat un "nivell" d, quin és el valor del radi, $r = \sqrt{\rho}$ de les corbes (circumferències) corresponent a aquest nivell. Això ho podem deduir de la gràfica de la funció $z = h(\rho)$.



Veiem que per a cada valor del nivell (o l'alçada $0<d<1/e$, hi ha 2 valors de $0<\rho_1(d)<1<\rho_2(d)$. Llavors, a cada $0<d<1/e$ li corresponen dues corbes de nivell, circumferències en aquest cas, $x^2+y^2=\rho_1(d)$ i $x^2+y^2=\rho_2(d)$, de radis $0<\rho_1(d)^{1/2}<1<\rho_2(d)^{1/2}$ respectivament.

$z=h(\rho)=\rho e^{-\rho}\left(=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}=f(x,y)\right)$, $\rho>0$. Derivem dos cops per estudiar el creixement i la convexitat de h:

$h'(\rho)=(1-\rho)e^{-\rho}>0$: creixent per $0<\rho<1$
<0 : decreixent per $\rho>1$, i té un màxim per $\rho=1$ on val $h(1)=1/e$.

$h''(\rho)=-e^{-\rho}-(1-\rho)e^{-\rho}=(\rho-2)e^{-\rho}>0$: convexa per $\rho>2$ (+)
<0 : còncava per $0<\rho<2$. Amb un punt d'inflexió a $\rho=2$ on la funció val $h(2)=2/e^2$.

A més $\lim_{\rho\to+\infty} h(\rho)=\lim_{\rho\to+\infty}\rho e^{-\rho}=0$, la qual cosa implica que $z=0$ és una asímptota en $+\infty$.

Amb aquestes dades veiem que la gràfica de la funció $z=h(\rho)$ té la forma de la figura. Per al càlcul pràctic de $\rho_{1,2}(d)$ a partir d'una $0<d<1/e$ donada hem de resoldre l'equació trascendent $h(\rho)=\rho e^{-\rho}=d \Leftrightarrow$ trobar $h^{-1}(d)$. Això ho podem calcular mitjançant algun mètode iteratiu per trobar zeros d'equacions, com és el donat pel llistat de la funció Matlab de la pàgina 12. A la següent taula donem els valors de ρ_1 i ρ_2 per $d=0.1, 0.2$ i 0.3 ($<1/e=0.36788$) obtinguts amb aquesta funció.

	$\rho_1(d)$	$\rho_2(d)$
$d=0.1$	0.1118325592	3.5771520640
$d=0.2$	0.2591711018	2.5426413578
$d=0.3$	0.4894022272	1.781337023~~4~~

fent:

```
>> W(0.1,0.1)   % això dóna ρ1(0.1) (convergència en 4 iteracions)
>> W(0.1,1.5)   % això dóna ρ2(0.1) (  "          " 4 iteracions), etc.
```

```
function [rho,Err] = W(d,rho)
% INPUT:
%   d: nivel de la curva. 0<d < 1/exp(1)= 0.36788.
% rho: Inicialmente, valor aproximado de rho: si 0<rho<1 obtenemos, a la
%      salida, 0 < rho_1(d) < 1. Si rho > 1 Obtenemos, a la salida,
%      rho_2(d) > 1 (Siempre que el m\'etodo converja).
%
% OUTPUT
% rho: Si el método converge, rho_i(d), i=1,2, con
%      0 < rho_1(d)< 1 <rho_2(d).
% Err: Valor absoluto de h(rho)-d al final del proceso. Esto es, cuando
%      rho es t.q. |h(rho -d| < Tol, donde Tol es la tolerancia del error
%      fijada en el programa en 1.0e-16.

% Author: DEPT. MATEMATICA APLICADA I, UPC
% Created: 2014-02-15

dmax=1/exp(1);
text1='       0 < d < 1/exp(1) = %22.14e,\n';
text2='       0< rho < 1 ó rho > 1.\n';
text=[text1,text2];

if nargin < 2 % Comprobamos que los argumentos sean correctos...
  fprintf('ERROR: FALTAN ARGUMENTOS.\nUSE,\n');
  fprintf('       >> [rho,d]=W(d,rho)\nCON,\n');
  fprintf(text,dmax);
  return;
elseif  (d < 0 || rho < 0)
  fprintf('ERROR: d, rho HAN DE SER > 0, CON,\n');
  fprintf(text,dmax);
  return;
end

Nitm=20;
Tol=1.e-16;
for i=0:Nitm %iteraciones del método de Newton
    err = rho*exp(-rho)-d;
    Abserr=abs(err);
    fprintf('ITER: %3d RHO = %22.14e ERR = %10.5e\n',i,rho,Abserr);
    if Abserr < Tol
       fprintf('----- El METODO CONVERGIO EN %2d ITERACIONES:\n',i);
       fprintf('       RHO = %22.14e\n',rho);
       fprintf('       ERR = %22.7e\n',Abserr);
       return;
    else
       rho=rho-err/((1-rho)*exp(-rho));
    end
end
fprintf('Error: no hay convergencia en %2d iteraciones\n',Nitm);
endfunction
```

Resumint: $\mathcal{L}_d^i(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=\rho_i(d)\}$, $i=1,2$; amb $0<d<\frac{1}{e}$,

$\mathcal{L}_0(f)=\{(0,0)\}$, $\mathcal{L}_{\frac{1}{e}}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$.

i per últim tenim que el valor del rang de la funció és $R(f)=[0,\frac{1}{e}]$.

4) Donada la funció $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x}$

a) Trobeu el seu domini D.

b) Demostreu que si $c \neq 0$ i $c \neq 1$ la corba de nivell d'alçada c és la circumferència de centre $\left(\frac{c}{c-1}, 0\right)$ i tangent a l'eix vertical. Què passa si $c=0$ ó $c=1$? Feu un croquis de les corbes de nivell de la funció.

c) A la vista d'aquest croquis raoneu si podem donar una definició alternativa per a $f(x,y)$ als punts (x,y) que no pertanyen a D que la faci contínua en $(0,0)$

Solució.

a) $D: (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x = x^2-2x+1+y^2-1 = (x-1)^2+y^2-1 \neq 0$. Llavors:

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \partial B_1^2(0,0)$

b) $c \neq 0, c \neq 1$ i suposem $(x,y) \in D$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x} = c \neq 0,1 \underset{(x,y)\in D}{\iff} x^2+y^2 = c(x^2+y^2-2x) \iff (1-c)x^2+(1-c)y^2$$

$$+2cx = 0 \underset{c\neq 1}{\iff} x^2+y^2+\frac{2c}{1-c}x + \frac{c^2}{(1-c)^2} - \frac{c^2}{(1-c)^2} = 0 \iff \left(x-\frac{c}{}\right)^2+y^2 =$$

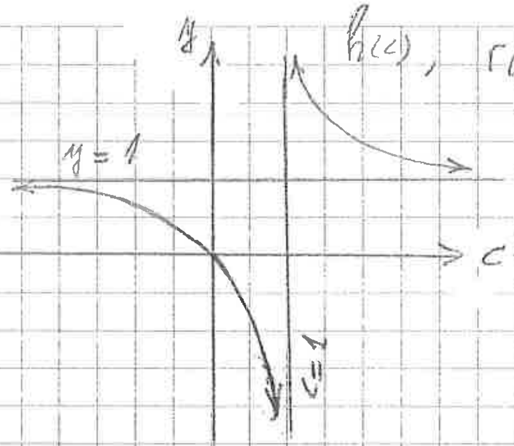
$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$: circumferències amb centre $\left(\frac{c}{c-1}, 0\right)$ i radi $r = \left|\frac{c}{c-1}\right|$, i per tant tangents a l'eix vertical.

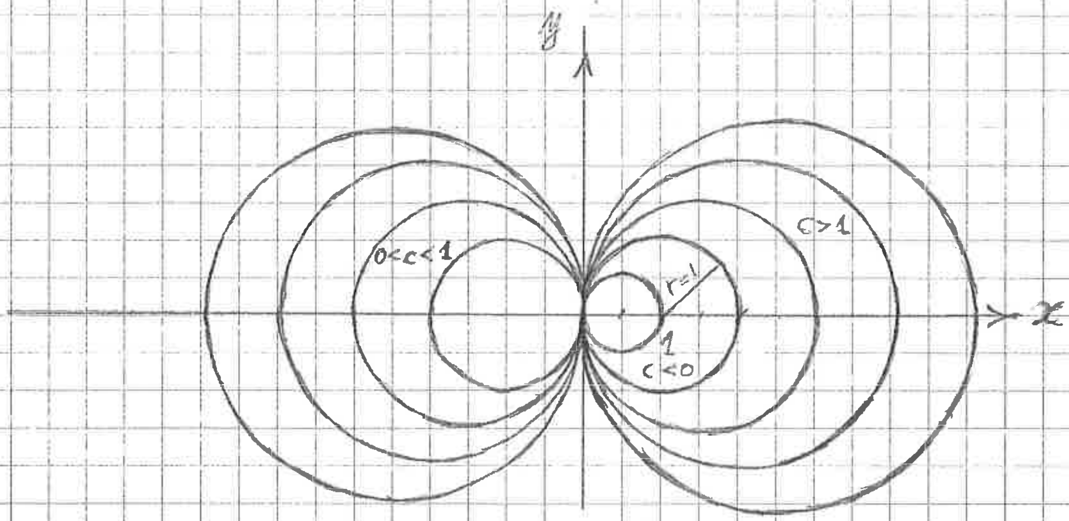
Veiem que:

quan $c \to 1^+$ $h(c) := \frac{c}{c-1} \to +\infty$, $r(c) \to +\infty$

" $c \to 1^-$ $h(c) = \frac{c}{c-1} \to -\infty$, $r(c) \to +\infty$

" $c \to \pm\infty$ $h(c) = \frac{c}{c-1} \to 1$, $r(c) \to 1$.





Veiem que quan $c \to -\infty$ les corbes de nivell "tendeixen" cap a $(x-1)^2+y^2=1$ "per dintre", mentre que si $c \to +\infty$, les corbes de nivell tendeixen a $(x-1)^2+y^2=1$ "per fora".

c) Llavors $f(x,y)$ tendeix cap a $+\infty$ quan ens apropem a la circumferència $(x-1)^2+y^2=1$ i a $+\infty$ quan fem tendir (x,y) cap a la circumferència des de dins. No podem ajustar els valors de f en els punts que no pertanyen al domini per fer f contínua en $(0,0)$, ja que si ens apropem per corbes de nivell diferents la funció tendirà a valors diferents, i.e.

Siguin $c_1 \neq c_2$ amb $c_1, c_2 \neq 0, 1$. Llavors:

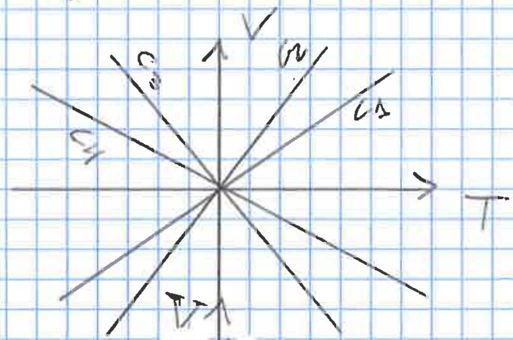
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ L_{c_1}}} f(x,y) = c_1 \neq c_2 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ L_{c_2}}} f(x,y).$$

5. D'acord amb la llei dels gasos perfectes tenim la relació $PV = kT$, on P és la pressió, V el volum, T la temperatura i k una constant. Per simplificar, fem $k=1$.

(a) Si expressam P en funció de (T,V) dibuixeu les corbes isòbares

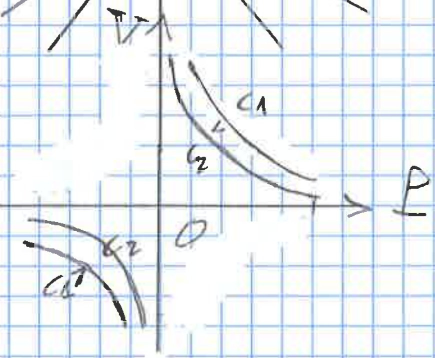
(b) " " T " " " (P,V) " " " isotermes

Solució.



(a) $P = \frac{T}{V} = c \Leftrightarrow V = \frac{1}{c} T$

Veiem que les isòbares són rectes.



(b) $T = PV = c \Leftrightarrow V = \frac{c}{P}$

I llavors les isotermes són hipèrboles.

6. Considereu les funcions

$$f(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},\ g(x,y,z)=(z^2-x^2-xy,\ z^2-xy-x^2),$$

$$h(u,v)=(u,v,u+v)$$

(a) Quin és el domini de $F=f\circ g\circ h$?

(b) Calculeu l'expressió de F. Per a quins valors de (u,v) podem concloure que $F(u,v)=f(u,v)$.

(a) $(u,v)\overset{h}{\mapsto}(x,y,z)=h(u,v)=(u,v,u+v)\overset{g}{\mapsto}(\alpha,\beta)=g(x,y,z)=(z^2-xy-y^2,\ z^2-xy-x^2)$

$\overset{f}{\mapsto}\rho=f(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$,

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,

$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$f:\Omega=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\ \alpha\neq\beta\}\to\mathbb{R}$

Per tant $(u,v)\in\mathbb{R}^2\in D(F)=D(f\circ g\circ h)\Leftrightarrow (g\circ h)_{(u,v)}=g(h(u,v))=$

$=g(u,v,u+v)=((u+v)^2-uv-v^2,\ (u+v)^2-uv-u^2)=(u^2-uv,\ v^2-uv)\in\Omega$

$\Leftrightarrow\ u^2-uv\neq v^2-uv\ \Leftrightarrow\ (u-v)(u+v)\neq 0.$

$D(F)=D(f\circ g\circ h)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\ v\neq u,\ v\neq -u\}$

(b) $F(u,v)=(f\circ g\circ h)(u,v)=f((g\circ h)(u,v))=f(u^2-uv,\ v^2-uv)=$

$$=\frac{u^2-uv+v^2-uv}{u^2-\cancel{uv}-v^2+\cancel{uv}}=\frac{u^2+2uv+v^2}{u^2-v^2}=\frac{(u+v)^2}{(u-v)(u+v)}=\frac{u+v}{u-v},\ \text{si } (u,v)\in D(F)$$

$F(u,v)=f(u,v)\Leftrightarrow (u,v)\in D(F)$

Notem que $D(F)\subset\Omega=D(f)$ (en els punts $(u,v)\in\Omega\setminus D(F)$, $F(u,v)$ no està definida).

7. Siguin $g(z)$ i $h(z)$ dues funcions d'1 variable tals que existeixen les seves funcions inverses definides de la forma:

$$g^{-1}: \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad h^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

(Per fixar idees poden pensar que $g(z) = \dfrac{\arctan(z)}{\pi}$, $h(z) = e^z$).

Considereu la funció $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (g(x) + h(x-y), g(x) - h(x-y))$. Calculeu explícitament $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^2$, determineu el conjunt imatge $B = f(\mathbb{R}^2)$ i feu un croquis de B (Indicació $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > v, -1 < u+v < 1\}$

S. $f: \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = (g(x) + h(x-y), g(x) - h(x-y))$

$$\left.\begin{aligned} g(x) + h(x-y) &= u \\ g(x) - h(x-y) &= v \end{aligned}\right\}$$

d'on:

$g(x) = \frac{u+v}{2}$ i llavors $x = g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)$

$h(x-y) = \frac{u-v}{2}$ i llavors $x - y = h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)$

Aleshores:

$$(x,y) = f^{-1}(u,v) = \left(g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right), g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) - h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)\right)$$

D'altra banda:

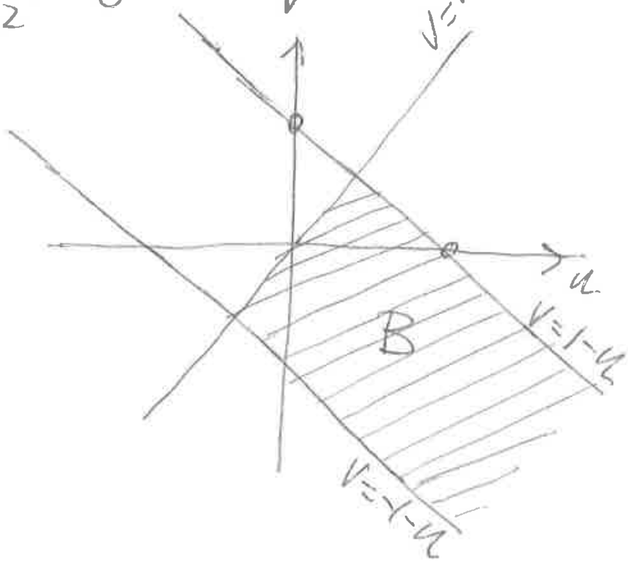
$$-\frac{1}{2} < g(x) = \frac{u+v}{2} < \frac{1}{2}, \quad h(x,y) = \frac{u-v}{2} > 0$$

Aleshores:

$B = f(\mathbb{R}^2) \subseteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v < u, -1 < u+v < 1\}$

i obviament $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v < u, -1 < u+v < 1\} \subseteq B$ ja que g^{-1} i h^{-1} estan definides en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i $(0, +\infty)$ respect. Per tant

$$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v < u, -1 < u+v < 1\}$$



(8) Per a les següents funcions, troben els valors per a $\delta(\varepsilon)$ ("els millors que poguem") tals que si $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta(\varepsilon)$, llavors $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$ (Indicació: recordem que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$).

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Sigui (x,y) t.q. $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$. Llavors $|f(x,y)-f(0,0)| = |\sqrt[3]{xy} - 0| = |x|^{\frac{1}{3}}|y|^{\frac{1}{3}}$
$\leq \sqrt{x^2+y^2}^{\,2/3} \leq \delta^{2/3} \leq \varepsilon$, i aleshores és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$.

$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

Siguin $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$. Aleshores: $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| =$
$= |x| \cdot \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq |x|/2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta/2 \leq \varepsilon$

Nota. Recordem que $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

D'altra banda, si $(x,y) = (0,0)$, llavors la desigualtat es satisfà de manera trivial:
$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(0,0) - f(0,0)| = 0 \leq \varepsilon$, ja que suposem $\varepsilon > 0$.

Per tant, veiem que és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon$.

c) $f(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. Donat $\varepsilon > 0$, sigui $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$. Llavors:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} - 1\right| = 2\,\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq 2\sqrt{x^2+y^2}^{\,2} \leq 2\delta^2 \leq \varepsilon.$$

Amb la qual cosa veiem que és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2}$.

Propera classe. Problemes 13 i 14 de la secció "Continuïtat i límits de funcions".

9. Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

(a) Donat $m \in \mathbb{R}$, calculeu (si és possible) el valor del límit de f a l'origen quan ens aproximem sobre la recta $y = mx$. Això és $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$.

(b) A partir dels resultats de l'apartat anterior, discutiu les qüestions següents

i. Si existís $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, quan hauria de valer L?

ii. Podem concloure de (a) l'existència del límit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(c) Calculeu (si és possible) el valor del límit de f a l'origen quan ens aproximem sobre la paràbola $y = x^2$ i refineu la discussió de l'apartat anterior.

Solució

a) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{y=mx\}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

b) $\underline{i}$ Si existís, el límit hauria de ser $L=0$.

$\underline{ii}$ No, donat que, per exemple, f pot tendir cap a valors diferents de 0 si ens apropem a l'origen per altres corbes que no siguin rectes

c) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{y=x^2\}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Per tant $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$.

10. Calculeu els següents límits, si existeixen, relacionant-los amb límits de funcions d'1 variable

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

Tenim que $\lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r^2}} = +\infty$. Llavors, el límit, si existeix, és $L=+\infty$.

En efecte, sigui $M>0$; aleshores, agafant $\delta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\log M}}, & M>1 \\ 1, & 0<M\leq 1, \end{cases}$

tenim que, per $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x^2+y^2<\delta^2$ es satisfà:

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \underset{(*)}{>} e^{\frac{1}{\delta^2}} = \begin{cases} e^{\log M} = M, & M>1 \\ e^1 > M, & 0\leq M<1. \end{cases}$$

$(*)$ $0<x^2+y^2<\delta^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} > \frac{1}{\delta^2}$

Per tant: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} = +\infty$.

(B) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (g\circ h)(x,y)$$

on $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ $(x,y)\to(0,0)$

$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t\neq 0 \\ 1, & t=0 \end{cases}$, contínua en $t=0$.

$(x,y)\neq(0,0)$: $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \Rightarrow (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) =$

$= g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Com que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ i g és contínua en $t=0$, tenim:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ h)(x,y) = g(0) = 1.$$

D'altra banda: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$. Aleshores

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(g\circ h)(x,y) = \boxed{+\infty}$$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Sigui $\epsilon>0$, com que $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = \pi/2$, existeix $M>0$ t.q. $\left|\arctan t - \frac{\pi}{2}\right| < \epsilon$ per tot $t>M$. Aleshores, agafant $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ tenim que $\forall (x,y)$: $0 < x^2+y^2 < \delta^2 = \frac{1}{M}$ és satisfà $\frac{1}{x^2+y^2} > M$ i, per tant, $\left|\arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{\pi}{2}\right| < \epsilon$. En conseqüència $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ h)(x,y)$

amb $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$, quan $(x,y)\to(0,0)$

$$g(t) = \begin{cases} t^2\ln t^2, & t\neq 0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$, és contínua en $t=0$ i $g(0)=0$.

$(x,y)\neq 0$: $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0 \Rightarrow (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) =$
$= (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ h)(x,y) \underset{\substack{h(x,y)\to 0 \\ (x,y)\to(0,0) \\ g \text{ cont en } t=0, \\ g(0)=0}}{=} g(0) = 0. \quad \square$$

11. Calculeu (si existeixen) els següents límits:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\arccos\left(\frac{x}{y}\right)}{1+xy} = \dfrac{\pi}{1} = \pi.$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$: límits segons rectes (límits direccionals)

$\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\alpha\beta t^2}{\alpha^2 t^2+\beta^2 t^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

Per tant $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \nexists$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$: fent límits direccionals

$\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^2 t^2+\beta^2 t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2} t = 0$

"Candidat a límit": 0. Fixem $\varepsilon>0$ i agafem (x,y): $0<x^2+y^2<\delta^2$: $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| = |y| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq |y| < \delta = \varepsilon$, si prenem $\delta=\varepsilon$.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

límits direccionals:

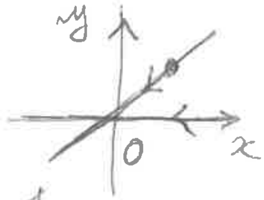
$\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\alpha^2 t^2-\beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2+\beta^2 t^2} = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$: límits direccionals

$\lim\limits_{t\to 0} f(at, bt) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^2 b^2 t^4}{a^4 t^4+b^4 t^4} = \dfrac{a^2 b^2}{a^4+b^4}$

per tant $\nexists$ el límit.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$



$\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$

Per tant el límit $\nexists$

(g) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si fem límits direccionals

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta t^2}{|t|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \frac{t^2}{|t|} = 0.$$

"Candidat" a límit: 0

Considerem $(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < \delta^2$:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{1}{2} 2\varepsilon = \varepsilon$$

Agafem: $\delta = 2\varepsilon$

$$0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \iff |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(h) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

$h(x,y) = x^2+y^2$,

$$g(t) = \begin{cases} |t| \ln|t|, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

g és contínua en $t=0$. En efecte $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{D(\ln|t|)}{D\left(\frac{1}{|t|}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{|t|}\cdot\frac{|t|}{t}}{-\frac{1}{|t|^2}\cdot\frac{|t|}{t}}$

$$= \lim_{t\to 0} (-|t|) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} |t|\ln|t| = 0 = g(0).$$

Per tant: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ h)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$$

Aleshores:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \underbrace{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{\downarrow \, 0} = 0.$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ definida si $x,y>0$, i $x\neq y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = 0$$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \tan\left(\dfrac{\pi}{x^2+y^2}\right)$.

Fem límit segons la recta $y=x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ \{y=x\}}} f(x,y) = \lim_{x\to 1} f(x,x) = \lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) = -\infty \end{cases}$$

12| Siguin $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{y}$ si $y\neq 0$ i $f(x,0)=a$

(a) Per a quin valor de $a\in\mathbb{R}$ és f contínua en $(0,0)$?

(b) Per a aquest valor de a discutir la continuïtat de f en $\mathbb{R}^2$.

Solució: 1er fem els límits direccionals segons els casos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{x=0\}}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{y=0\}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = a.$$

Per tant el límit en $(x,y)=(0,0)$ pot existir només si $a=0$. Calculem a continuació el límit en $(x,y)=(0,0)$ segons el conjunt $\{xy\neq 0\}$.

A continuació fem el límit segons el conjunt $\{xy \neq 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{xy\neq 0\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{xy\neq 0\}}} x\cdot(g\circ h)(x,y);$$

amb $h(x,y) = x\cdot y$, $g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t-1}{t}, & t\neq 0 \\ 1, & t=0. \end{cases}$

Veiem que, si $xy\neq 0$ $(g\circ h)(x,y) = g(h(xy)) \underset{xy\neq 0}{=} g(xy) = \dfrac{e^{xy}-1}{xy}$.

Com que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ i g és contínua en $t=0$, llavors:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ h)(x,y) = g(0) = 1 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{xy\neq 0\}}} (g\circ h)(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{x\cdot y\neq 0\}}} \frac{e^{xy}-1}{xy} = 1.$$

Per tant:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{xy\neq 0\}}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \{xy\neq 0\}}} x\cdot(g\circ h)(x,y) = 0.$$

Com que $(0,0)\in\overline{\{x=0\}}$, $(0,0)\in\overline{\{y=0\}}$, $(0,0)\in\overline{\{x\cdot y\neq 0\}}$ i $\mathbb{R}^2 = \{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{x\cdot y\neq 0\}$ es conclou que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ és contínua en } (x,y)=(0,0).$$

(b) Per $a=0$:

(b.1) Continuïtat en els punts amb $y=0$, $x\neq 0$, ie, punts de la ~~forma~~ forma $(x,y)=(x_0,0)$ amb $x_0\neq 0$. Per ~~límits direccionals~~ límits direccionals.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ \{y=0\}}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x,0) = x = 0 \ ; \text{ en canvi:}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ \{x=x_0\}}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(x_0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{e^{x_0 y}-1}{y} = x_0 \neq 0.$$

Per tant f no és contínua sobre els punts de l'eix x diferents de l'origen $(x,y)=(0,0)$.

A la resta de punts: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ amb $y\neq 0$ $f(x,y)$ és un quocient de funcions contínues i per tant és una funció contínua.

En resum, $f(x,y)$ és contínua als punts $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}\cup\{(0,0)\}$. $\square$

(13) Signi $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = a$ si $xy = 0$

(a) Per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ és f contínua en $(0,0)$?

(b) Per a aquest valor de a, discutiu la continuïtat de f en $\mathbb{R}^2$?

Solució:

$f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ amb $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h(x,y) = xy \in \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donada per $t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = \begin{cases} \frac{\cos t - 1}{t^2}, & t \neq 0 \\ a, & t = 0 \end{cases}$

En efecte:

Si $xy \neq 0$: $(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(x \cdot y) \underset{xy \neq 0}{=} \dfrac{\cos(xy) - 1}{x^2y^2} = f(x,y)$

Si $xy = 0$: $(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(0) \underset{xy = 0}{=} a = f(x,y)$

D'altra banda, tenim que, per a $a = -\frac{1}{2}$, $g(t)$ és una funció contínua. Obviament ho és per $t \neq 0$ (criteris de generació), mentre que, en $t = 0$:

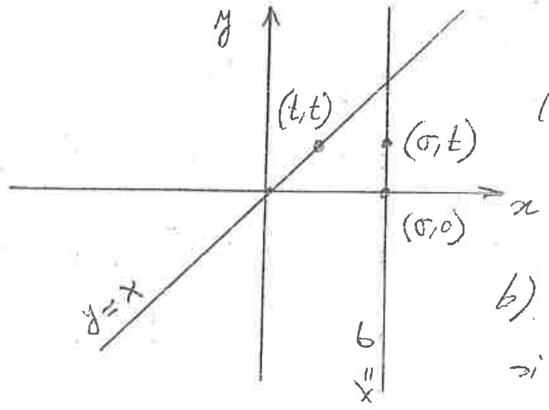
$$\lim_{0} g(t) = \lim_{0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = \lim_{0} \frac{\cancel{1} - t^2/2! + R_3(t) - \cancel{1}}{t^2} = \lim_{0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{R_3(t)}{t^2} \right) = -\frac{1}{2} =$$
$$= g(0).$$

Per tant, per $a = -\frac{1}{2}$, $f = g \circ h$ és la composició de dues funcions contínues $h(x,y) = xy$ i $g(t) = \begin{cases} \frac{\cos t - 1}{t^2}, & t \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$. Aleshores f és una funció contínua en tot $\mathbb{R}^2$.

Per contra, si $a \neq -\frac{1}{2}$, f no és contínua per cap punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $xy = 0$. En efecte, considerem punts de la forma $(\sigma, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \neq 0$ i calculem el límit de f en aquests punts segons la recta $x = \sigma$: $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sigma\}$.

$$\lim_{(\sigma,0),r} f = \lim_{t \to 0} f(\sigma, t) = \lim_{t \to 0} \frac{\cos(\sigma t) - 1}{\sigma^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin^2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)}{2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \neq f(\sigma, 0) = a$$

Això prova que f no és contínua en els punts $(x,y) = (\sigma,0)$, $\sigma \neq 0$. Anàlogament es pot deduir que f tampoc no és contínua en punts sobre l'eix y, de la forma $(0,\sigma)$, $\sigma \neq 0$. Per últim, comprovem que f no és contínua a l'origen quan $a \neq -\frac{1}{2}$ calculant el límit en aquest punt, segons la recta $y=x$.



$$\lim_{(0,0),\{y=x\}} f = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^2 - 1}{t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin^2 t^2/2}{2\left(\frac{t^2}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \neq f(0,0) = a.$$

b) Del que s'ha dit a l'apartat (a), f és contínua en $\mathbb{R}^2$ si $a = -\frac{1}{2}$, mentre que si $a \neq -\frac{1}{2}$ f és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

(14) Per a les següents funcions definides a trossos discutiu la seva continuïtat en $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.

Podem procedir com al problema anterior. Considerem $h(x,y) = xy$ i $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$ i comprovem que $f(x,y) = (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y))$. En efecte:

$$xy \neq 0 : (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(xy) \underset{xy\neq 0}{=} \frac{\sin(xy)}{xy} = f(x,y).$$

$$xy = 0 : (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(xy) \underset{xy=0}{=} g(0) = 1 = f(x,y)$$

Llavors, com que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és també una funció contínua la seva composició $f = g\circ h$ és una funció contínua en $\mathbb{R}^2$. □

(b) $f(x,y) = \max\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.

Considerem els conjunts: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$. Veiem que $A \cup B = \mathbb{R}^2$ i tenim, d'una banda que f és contínua en $\mathring{A}$ i $\mathring{B}$. En efecte, si $(a,b) \in \mathring{A}$ llavors:

$$\lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} \max\{x,y\} = \lim_{(a,b)} \left(\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}\right) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$= \max\{a,b\} = f(a,b)$$

$(a,b)\in \mathring{B}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} 0 = f(a,b)$

Sobre els punts de la forma $(x,y)=(0,b)$, veiem que $(0,b)\in\overline{A}$ i $(0,b)\in\overline{B}$ i d'altra banda:

$$\lim_{(0,b),A} f = \lim_{(0,b)} f\Big|_A = \lim_{(0,b)} \text{màx}\{x,y\} = \lim_{(0,b)} \left(\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2}\right) = \begin{cases} \frac{b}{2}+\frac{b}{2}=b, & \text{si } b>0 \\ 0, & \text{si } b\leq 0\end{cases}$$

$$\lim_{(0,b),B} f = \lim_{(0,b)} f\Big|_B = \lim_{(0,b)} 0 = 0$$

i aleshores tenim:

$$b>0: \lim_{(0,b),A} f = b \neq \lim_{(0,b),B} f = 0 \Rightarrow f \text{ no és contínua als punts } (0,b),\ b\neq 0.$$

$$b\leq 0: \lim_{(0,b),} f = 0 = \lim_{(0,b),B} f \Rightarrow \lim_{(0,b)} f = 0 = f(0,b)$$

Llavors, veiem que f no és contínua als punts (x,y) amb $x=0,\ y>0$ ó dit d'altra manera f és contínua a $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0, y>0\}$. □

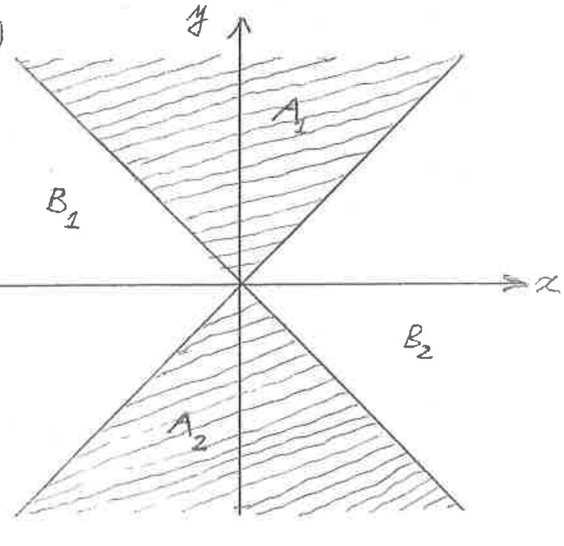
(c) $f(x,y)=x$, si $|x|\leq|y|$ i $f(x,y)=y$ si $|x|\neq|y|$

Considerem els conjunts $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|\leq|y|\}$ i $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|<|y|\}$.

Obviament $A\cup B=\mathbb{R}^2$ i f és contínua en $\mathring{A}$ i $\mathring{B}$. En efecte:

$(a,b)\in\mathring{A}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} x = a = f(a,b)$

$(a,b)\in\mathring{B}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} y = b = f(a,b)$



Considerem, a continuació, punts de la forma $(x,y)=(a,a)\in\partial A=\partial B$ i calculem els límits en aquests punts segons els conjunts A i B (notem que $(a,a)\in\overline{A}$ i $(a,a)\in\overline{B}$ $\forall a\in\mathbb{R}$).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(a,a),A} f(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} f\big|_A = \lim\limits_{(a,a)} x = a \\[2ex] \lim\limits_{(a,a),B} f(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} f\big|_B = \lim\limits_{(a,a)} y = a\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{d'on:}\\ \lim\limits_{(a,a),A} f = a = \lim\limits_{(a,a),B} f \Rightarrow \lim\limits_{(a,a)} f = a,\end{array}$$

ja que $A \cup B = \mathbb{R}^2$, i com que $f(a,a) = a$, tenim que f és contínua sobre els punts de la recta $y=x$.

Considerem, a continuació els punts de la forma: $(x,y) = (a,-a)$ amb $a \neq 0$ i calculem els límits segons els conjunts A i B (notem que $(a,-a) \in \overline{A}$ i $(a,-a) \in \overline{B}$ $\forall a$)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(a,-a),A} f(x,y) = \lim\limits_{(a,-a)} f\big|_A = \lim\limits_{(a,-a)} x = a \\[2ex] \lim\limits_{(a,-a),B} f(x,y) = \lim\limits_{(a,-a)} f\big|_B = \lim\limits_{(a,-a)} y = -a\end{array}\right\} : \lim\limits_{(a,-a),A} f = a \neq -a = \lim\limits_{(a,-a),B} f \quad \forall a \neq 0.$$

Aleshores veiem que f no és contínua sobre els punts de la recta $y=-x$ diferents de l'origen

En resum, f és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=-x, x \neq 0\}$. $\square$

d) $f(x,y) = x$, si $x^2+y^2 \leq 1$ i $f(x,y) = y$ si $x^2+y^2 > 1$.

Considerem els conjunts $\overline{B}_1^2(0,0)$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1^2(0,0)$. Obviament, f és contínua per tot $(x,y) = (a,b)$ que pertany a l'interior de $\overline{B}_1^2(0,0)$ i per tot $(x,y) = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1^2(0,0)$.

En efecte:

$$(x,y) = (a,b) \in B_1^2(0,0) : \lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} x = a = f(a,b).$$
$$(x,y) = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1^2(0,0) : \lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} y = b = f(a,b).$$

Per als punts $(x,y) = (a,b) \in \partial \overline{B}_1^2(0,0)$, calculem els límits segons els conjunts $A := \overline{B}_1^2(0,0)$ i $B := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1^2(0,0)$:

$$\lim_{(a,b)} f(x,y) = \lim_{(a,b)} f\big|_A = \lim_{(a,b)} x = a,$$

$$\lim_{(a,b),B} f = \lim_{(a,b)} f\Big|_B = \lim_{(a,b)} y = b\,.$$

Per tant, si $(a,b) \in \partial B_1^2(0,0)$ amb $a \neq b$ $\lim\limits_{(a,b),A} f = a \neq b = \lim\limits_{(a,b),B} f$

i llavors f no és contínua en aquests punts. En canvi, pels punts $(a,b) \in \partial B_1^2(0,0)$ amb $a = b$ i.e.: $(a,b) = (a,a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $(a,b) = (a,a) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, tenim:

$\lim\limits_{(a,a),A} f = a = \lim\limits_{(a,a),B} f$ amb $a = \pm\sqrt{2}/2$. i llavors $\lim\limits_{(a,a)} f = a = f(a,a)$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resumint, f no és contínua als punts $\partial B_1^2(0,0) \setminus \left\{\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right), \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)\right\}$. □

Propera classe, problemes: 16, 20, 21, 23 (Derivació).

15. (a) Demostreu que $\text{màx}\{x,y\}$ admet l'expressió $\text{màx}\{x,y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$. Troben una expressió anàloga per a $\text{mín}\{x,y\}$.

(b) Si $g(x,y)$ i $h(x,y)$ són funcions contínues és $f(x,y) = \text{màx}\{g(x,y), f(x,y)\}$ també una funció contínua?

Solució:

(a) • $x > y \Rightarrow x-y>0 \Rightarrow |x-y| = x-y \Rightarrow \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x$
$= \text{màx}(x,y)$

• $x \leq y \Rightarrow x-y \leq 0 \Rightarrow |x-y| = -(x-y) \Rightarrow \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{2y}{2} = y$
$= \text{màx}(x,y)$.

Alechores és cert que $\text{màx}(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Es comprova, de la mateixa manera que: $\text{mín}(x,y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$

$x>y$: $\frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2} = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \text{mín}(x,y)$

$x \leq y$: $\frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \text{mín}(x,y)$

(b) Segons l'apartat (a)

$$f(x,y) = \text{màx}\left(g(x,y), h(x,y)\right) = \frac{g(x,y)+h(x,y)}{2} + \frac{|g(x,y)-h(x,y)|}{2}$$

$f(x,y)$ és una funció contínua en tot $\mathbb{R}^2$ perquè és suma i composició de funcions contínues (suma/diferència de $g(x,y)$ amb $h(x,y)$ i composició amb el valor absolut). □

17) Calculeu $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)$ essent $f(x,y) = \dfrac{(e^{xy}-1)\arcsin(y^x) + y^4\cos(\pi+xy)}{x^2y^2+x^2+y^2}$

Solució.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=\pi} f(0,y) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=\pi}\left(\frac{y^4\cos\pi}{y^2}\right) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=\pi}(-y^2) = \boxed{2\pi}.$$

18) Calculeu $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, essent $f(x,y) = x\cdot(x^2+y^2)^{-3/2}e^{\cos(x^2y)}$

Solució.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=1} f(x,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=1}\left(x|x|^{-3}e\right) \underset{\substack{|x|=x \\ \text{en un entorn} \\ \text{de } x=1}}{=} \frac{d}{dx}\Big|_{x=1}\left(\frac{e}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{2e}{x^3}\Big|_{x=1} = \boxed{-2e}$$

Remarca. Notem que en els problemes 17 i 18 les respectives derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ existeixen (criteris de generació) per tant podem calcular-les com derivades de funcions d'1 variable fixant les variables respecte de les quals no es deriva.

19) Calculeu les derivades parcials primeres de $f(x,y) = x^2\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ i comproveu que: $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Solució:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\cdot\frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\cdot\frac{2y(x^2+y^2)-2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)\cos^2\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

$$= -\frac{2x^4y^2}{(\ldots)^2\cos^2(\ldots)} + \frac{2y^2x^4}{(\ldots)^2\cos^2(\ldots)} + 2x^2\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = 2f(x,y)\ \square$$

20. Calculeu per derivació directa les derivades parcials de les següents funcions i doneu en cada cas el domini de validesa de les expressions.

20.1 $f(x,y) = x^{y^x}$

$$f_x(x,y) = y^x x^{y^x - 1} + y^x x^{y^x} (\ln x)(\ln y) = y^x x^{y^x}\left((\ln x)(\ln y) + \frac{1}{x}\right);$$

$$f_y(x,y) = x y^{x-1} x^{y^x} \ln x. \quad \square \qquad (x>0,\ y>0)$$

20.2 $f(x,y) = x^{x \cdot y}$

$$f_x(x,y) = xy\, x^{xy-1} + y x^{xy} \ln x = y x^{x \cdot y}(1 + \ln x), \qquad (x>0)$$

$$f_y(x,y) = x x^{xy} \ln x = x^{xy+1} \ln x. \quad \square \qquad (x>0)$$

20.3 $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$

$$f_x(x,y) = 2x^2(x^2+y^2)^{x-1} + (x^2+y^2)^x \ln(x^2+y^2)$$

$$= (x^2+y^2)^x\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)\right). \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_y(x,y) = x(x^2+y^2)^{x-1} 2y = 2xy(x^2+y^2)^{x-1}. \quad \square \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

20.4 $f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = y \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.$$

$$f_y(x,y) = x \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}. \quad \square \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

20.5 $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\ \left(= \ln(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}. \quad \square \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

20.6 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(= (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$

$$f_x(x,y) = -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}\, 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_y(x,y) = -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}\, 2y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \square$$

20.7 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)y - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)x - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \square$$

20.8 $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2-y^2)2x - (x^2+y^2)2x}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2x(\cancel{x^2} - y^2 - \cancel{x^2} - y^2)}{(x^2-y^2)^2} = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2-y^2)2y + (x^2+y^2)2y}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2y(x^2 - \cancel{y^2} + x^2 + \cancel{y^2})}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}. \square$$

20.9 $f(x,y) = \dfrac{\cos x + e^{xy}}{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(-\sin x + ye^{xy}) - (\cos x + e^{xy})2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{e^{xy}(-2x + x^2y + y^3) - (x^2+y^2)\sin x - 2x\cos x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(xe^{xy}) - (\cos x + e^{xy})2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{e^{xy}(-2y + x^3 + xy^2) - 2y\cos x}{(x^2+y^2)^2}. \square$$

(20.10) $f(x,y,z) = e^x \tan(y^2 z)$

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \tan(y^2 z)}, \ \underline{\frac{\partial f}{\partial y} \overset{(*)}{=} 2yz\, e^x \sec^2(y^2 z)}, \ \underline{\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 e^x \sec^2(y^2 z)}. \square$$

(*) Nota: recordem que: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ i que $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

(20.11) $f(x,y,z) = x \sinh\left(\frac{y}{z}\right)$

$$\underline{f_x(x,y,z) = \sinh\left(\tfrac{y}{z}\right)}, \ \underline{f_y(x,y,z) = \tfrac{x}{z}\cosh\left(\tfrac{y}{z}\right)}, \ \underline{f_z(x,y,z) = -\frac{xy}{z^2}\cosh\left(\frac{y}{z}\right)}. \square$$

(16) Aplicant la definició calculeu (si existeixen) les derivades parcials primeres de les següents funcions en el (0,0).

(16.1) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Per tant: $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ □

(16.2) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\ln t^2}{t} = \lim_{t\to 0} \ln t^2 = -\infty \Rightarrow \nexists\, f_x(0,0).$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot \ln t^2 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0. \square$$

(16.3) $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 1$

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\ln t^2} - 1}{t} \overset{(*)}{=} -\infty \Rightarrow \nexists\, f_x(0,0)$$

(*) $$\lim_{t\to 0} \frac{D(e^{t\ln t^2} - 1)}{D(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{(2\ln|t| + 2)\, e^{2t\ln|t|}}{1} = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\ln t^2} - 1}{t} = -\infty$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2)^0 - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0. \square$$

classe 27/02/2014

(21) Calculeu les derivades parcials primeres de les següents funcions i doneu la seva matriu jacobiana.

(21.1) $f(x,y) = (e^{xy}+y,\ y^2x)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}. \square$$

(21.2) $f(x,y) = (\cos(x+2y),\ ye^{x+y},\ \cosh(xy^2))$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+2y) & -2\sin(x+2y) \\ ye^{x+y} & (1+y)e^{x+y} \\ y^2\sinh(xy^2) & 2xy\sinh(xy^2) \end{pmatrix}. \square$$

(21.3) $f(x,y,z) = (z\tan(x^2+y^2),\ xy\ln z)$

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz\sec^2(x^2+y^2) & 2yz\sec^2(x^2+y^2) & \tan(x^2+y^2) \\ y\ln z & x\ln z & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}. \square$$

(23) D'acord amb la llei dels gasos perfectes tenim la relació $PV = kT$, on P és la pressió, V el volum, T la temperatura i k una constant. Demostreu que

$$\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

($\frac{\partial T}{\partial V}$ vol dir que aïllem T com a funció de (P,V) i derivem respecte P. Ídem per a les altres).

Solució: $T = T(P,V) = \frac{1}{k}PV$: $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}$; $P = P(T,V) = k\frac{T}{V}$: $\frac{\partial P}{\partial V} = -k\frac{T}{V^2}$; $V = V(T,P) = k\frac{T}{P}$: $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P}$. Aleshores: $\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{V}{k}\left(-k\frac{T}{V^2}\right)\left(\frac{k}{P}\right) = -k\frac{T}{PV} = -k\frac{T}{kT} = -1. \square$

22 Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció d'1 variable donada, contínua en tot $\mathbb{R}$. Definim $g(x,y) = \int_{xy}^{x^2-y^2} f(t)\,dt$. Calculeu $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial g}{\partial y}$ (Indicació: Si F és una primitiva de f, expresseu g en termes de F.)

Solució.

Sigui F una primitiva de f, llavors:

$$g(x,y) = \int_{xy}^{x^2-y^2} f(t)\,dt = F(x^2-y^2) - F(xy)$$

Aleshores:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = F'(x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) - F'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy)$$

$$= \boxed{2x \cdot f(x^2-y^2) - y \cdot f(xy)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = F'(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) - F'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)$$

$$= \boxed{-2y \cdot f(x^2-y^2) - x\, f(xy)}$$

24) Per a quins valors a, b, c i d pot existir una funció $f(x,y)$ tq.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ax+by \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y} = cx+dy \text{ ?}$$

Per a aquests valors, calculeu totes les possibles solucions per a f.

Solució.

Com que f és de classe C^2, les derivades parcials creuades han de coincidir, aleshores:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = b = c = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow b = c \text{ necessàriament. Llavors:}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ax+by \Rightarrow f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + byx + \gamma(y)$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = bx + \gamma'(y) = cx+dy \underset{c=b}{=} bx+dy \Rightarrow \gamma'(y) = dy$

$\Rightarrow \gamma(y) = \frac{d}{2}y^2 + A$, $A \in \mathbb{R}$ ctnt.

Aleshores: $f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{d}{2}y^2 + A$, amb A ctnt arbitrària. $\square$.

25) Considerem la funció $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) Aplicant la definició de derivada parcial, calculeu $f_x(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \implies f_x(0,0) = 0.$$

A partir de la simetria — respecte de l'intercanvi de x i y — es segueix de l'enunciat que també $f_y(0,0) = 0$.

b) Calculeu $f_x(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x^2y/\sqrt{x^2+y^2}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{y^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3},\ (x,y)\neq(0,0)$$

i, de nou, per simetria respecte de l'intercanvi de x i y es dedueix que $f_y(x,y) = \dfrac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ per $(x,y)\neq(0,0)$. □

c) Demostreu que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$.

Es comprova fàcilment fent límits a l'origen per rectes $r_{\alpha,\beta} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha t, y=\beta t, t\in\mathbb{R}\}$ amb $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ r_{\alpha,\beta}}} f_x(x,y) = \lim_{t\to 0} f_x(\alpha t,\beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\beta^3 t^3}{|t|^3\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}\cdot\dfrac{t^3}{|t|^3} = \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}, \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}\cdot\dfrac{t^3}{|t|^3} = \dfrac{-\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}, \end{cases}$$

per tant $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f_x$ (per $\beta\neq 0$ ni tan sols existeixen límits direccionals). De la mateixa manera es comprova que $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f_y$. □

En canvi, fora de $(x,y)=(0,0)$ f_x i f_y són funcions contínues perquè són quocients de funcions contínues i el denominador no s'anul·la fora de l'origen (criteris de generació).

d) Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que f és $C^1(D)$?

Pel que s'ha dit a l'apartat anterior, és clar que $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

27) Considerem la funció $f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

a) Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$ com es dedueix de la (anti) simetria de la funció f respecte de l'intercanvi de x i y (i.e $f(y,x) = -f(y,x)$)

b) Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0,$$ i de l'anti-simetria de f respecte de l'intercanvi de x i y es dedueix d'immediat que també $f_y(0,0) = 0$.

Per tant $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

c) Usant la definició, calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

- $$\lim_{t\to 0} \frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5/t^4 - 0}{t} = 1,$$

d'on: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1,$$

- $$\lim_{t\to 0} \frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^5/t^4 - 0}{t} = -1,$$

d'on: $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

d) Quin és el conjunt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^2(D)$?

f és un quocient de polinomis on el denominador només s'anul·la en $(x,y)=(0,0)$. Per tant, totes les seves derivades parcials, a qualsevol ordre seran contínues fora de l'origen. En canvi, com que a l'origen les seves derivades parcials creuades no coincideixen aquestes funcions f_{xy} i f_{yx} no són contínues en $(x,y)=(0,0)$. Llavors $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ és el conjunt més gran on f és de classe C^2.

e) Quin és el conjunt $D\subseteq\mathbb{R}^2$ més gran on tenim $f\in C^\infty(D)$?

Pel que s'ha assenyalat a l'apartat anterior $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: fora de l'origen tenim un quocient de polinomis (funcions de classe C^∞) on el denominador no s'anul·la. En canvi f no pot ser de classe C^∞ a tot $\mathbb{R}^2$ perquè f_{xy} i f_{yx} no són contínues en $(0,0)$. $\square$.

26) Calculeu les derivades parcials segones de les següents funcions i doneu el seu hessià.

(a) $f(x,y) = \sin x \sin^2 y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \cdot \sin^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sin x \cdot \sin y \cos y$
$= \sin x \cdot \sin(2y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x \sin^2 y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos x \sin(2y)$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos x \sin(2y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin x \cos(2y)$

Hessiana: $\text{Hess} f(x,y) = D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin^2 y & \cos x \sin(2y) \\ \cos x \sin(2y) & 2\sin x \cos(2y) \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y) = \sin(x^2-3xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x-3y)\cos(x^2-3xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x\cos(x^2-3xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\cos(x^2-3xy) - (2x-3y)^2 \sin(x^2-3xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3\cos(x^2-3xy) + 3x(2x-3y)\sin(x^2-3xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3\cos(x^2-3xy) + 3x(2x-3y)\sin(x^2-3xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -9x^2\cos(x^2-3xy)$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2-3xy)-(2x-3y)^2\sin(x^2-3xy) & * \\ -3\cos(x^2-3xy)+3x(2x-3y)\sin(x^2-3xy) & -9x^2\cos(x^2-3xy) \end{pmatrix}$$

$(*) = -3\cos(x^2-3xy)+3x(2x-3y)\sin(x^2-3xy)$.

c) $f(x,y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{1 + x^2/y^2} \cdot \frac{1}{y} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{-x^2}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1/y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^3-xy^2+x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2x(x^2+y^2)-2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\text{Hess} f(x,y) = D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

d) $f(x,y) = \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)^2 - 8x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) + \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 2\cdot\frac{y^4-3x^4-2x^2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{-4xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(-\frac{1}{\cdots}\right) + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(-\frac{1}{\cdots}\right)$$

$$= \frac{4xy(1-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{-4xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right) + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{4xy(1-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cdot\frac{x^4-3y^4-2x^2y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^4}\exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2}\right)$$

(e) $f(x,y,z) = xy^2z^3e^x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2z^3e^x + xy^2z^3e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xyz^3e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 3xy^2z^2e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2z^3e^x + y^2z^3e^x + xy^2z^3e^x = y^2z^3(2+x)e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2yz^3e^x + 2xyz^3e^x = 2yz^3(1+x)e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y) = 3y^2z^2e^x + 3xy^2z^2e^x = 3y^2z^2(1+x)e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2yz^3e^x + 2xyz^3e^x = 2yz^3(1+x)e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2xz^3e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y) = 6xyz^2e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y) = 3y^2z^2e^x + 3xy^2z^2e^x = 3y^2z^2(1+x)e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y) = 6xyz^2e^x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y) = 6xy^2ze^x.$$

Llavors la Hessiana de la funció resulta:

$$\text{Hess} f(x,y,z) = D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^3z^2(2+x)e^x & 2yz^3(1+x)e^x & 3y^2z^2(1+x)e^x \\ 2yz^3(1+x)e^x & 2xz^3e^x & 6xyz^2e^x \\ 3y^2z^2(1+x)e^x & 6yxz^2e^x & 6xy^2ze^x \end{pmatrix}.$$

(f) $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + yz^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x+2y & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y) = 2x+2y & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y) = 2z \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y) = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y) = 2z & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y) = 2y \end{pmatrix}$$

Llavors la matriu Hessiana resulta:

$$\operatorname{Hess} f(x,y,z) = D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y & 0 \\ 2x+2y & 2x & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix}. \quad \square$$

28 Siguin $f(x,y) = (x^2 + \cos y, e^{x+y})$ i $g(u,v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$

(a) Doneu una fórmula explícita per a $f \circ g$

(b) Calculeu $D(f \circ g)(0,0)$ mitjançant la regla de la cadena.

S. (a) $(f \circ g)(u,v) = f(e^{u^2}, u - \sin v) = \left(e^{2u^2} + \cos(u - \sin v), e^{e^{u^2} + u - \sin v}\right)$

(b) $$\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)_1(u,v) = 4u e^{2u^2} - \sin(u - \sin v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)_1(u,v) = \sin(u - \sin v) \cos v$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(f \circ g)_2(u,v) = (2u e^{u^2} + 1)\, e^{e^{u^2} + u - \sin v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(f \circ g)_2(u,v) = -e^{e^{u^2} + u - \sin v} \cos v$$

$$D(f \circ g)(u,v) = \begin{pmatrix} 4u e^{2u^2} - \sin(u - \sin v) & \cos v \cdot \sin(u - \sin v) \\ (2u e^{u^2} + 1)\, e^{e^{u^2} + u - \sin v} & -e^{e^{u^2} + u - \sin v} \cdot \cos v \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{pmatrix}$$

Mitjançant la regla de la cadena.

$$D(f \circ g)(u,v) = (Df \circ g)(u,v) \cdot Dg(u,v)$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}, \quad Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 2u e^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(u,v) = (Df \circ g)(u,v)\, Dg(u,v) = Df(g(u,v)) \cdot Dg(u,v) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{u^2} & -\sin(u - \sin v) \\ e^{e^{u^2} + u - \sin v} & e^{e^{u^2} + u - \sin v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u e^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u e^{2u^2} - \sin(u - \sin v) & \sin(u - \sin v) \cdot \cos v \\ (2u e^{u^2} + 1)\, e^{e^{u^2} + u - \sin v} & -e^{e^{u^2} + u - \sin v} \cdot \cos v \end{pmatrix}$$

d'on:

$$D(f\circ g)(0,0) = Df\circ g(0,0)\cdot Dg(0,0) = Df(g(0,0))\cdot Dg(0,0) = Df(1,0)\cdot Dg(0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & -e \end{pmatrix}. \square$$

29 Siguin $f(u,v) = (\tan(u-1)-e^{v}, u^2-v^2)$ i $g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$. Calculeu $D(f\circ g)(1,1)$ mitjançant la regla de la cadena.

S.

$$D(f\circ g)(1,1) = Df\circ g(1,1)\cdot Dg(1,1) = Df(g(1,1))\cdot Dg(1,1) = Df(1,0)\cdot Dg(1,1).$$

$$D_1 g_1(1,1) = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1} g_1(x,1) = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1} e^{x-1} = 1,$$

$$D_2 g_1(1,1) = \left.\frac{d}{dy}\right|_{y=1} g_1(1,y) = \left.\frac{d}{dy}\right|_{y=1} e^{1-y} = -1,$$

$$D_1 g_2(1,1) = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1} g_2(x,1) = \left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1} (x-1) = 1,$$

$$D_2 g_2(1,1) = \left.\frac{d}{dy}\right|_{y=1} g_2(1,y) = \left.\frac{d}{dy}\right|_{y=1} (1-y) = -1$$

Aleshores: $Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$D_1 f_1(1,0) = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=1} (\tan(u-1) - e^0) = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=1} (\tan(u-1)-1) = \left.\frac{1}{\cos^2(u-1)}\right|_{u=1} = 1.$$

$$D_2 f_1(1,0) = \left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} (-e^{v}) = -1$$

$$D_1 f_2(1,0) = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=1} (u^2) = 2$$

$$D_2 f_2(1,0) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} (1-v^2) = 0$$

Aleshores: $Df(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

i llavors:

$$D(f\circ g)(1,1) = Df(1,0)\cdot Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \square$$

(30) Siguin $f(u,v,w) = \left(e^{u-w}, \ln(u+v) + \sin(u+v-w)\right)$ i $g(x,y) = (e^x, \sin(y-x), e^{-y})$. Calculeu $D(f\circ g)(0,0)$ mitjançant la regla de la cadena.

S.

$$D_1 f_1(1,0,1) = \frac{d}{du}\Big|_{u=1} f_1(u,0,1) = \frac{d}{du}\Big|_{u=1} (e^{u-1}) = e^0 = 1.$$

$$D_2 f_1(1,0,1) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} f_1(1,v,1) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} (e^{1-1}) = 0,$$

$$D_3 f_1(1,0,1) = \frac{d}{dw}\Big|_{w=1} f_1(1,0,w) = \frac{d}{dw}\Big|_{w=1} (e^{1-w}) = -1,$$

$$D_1 f_2(1,0,1) = \frac{d}{du}\Big|_{u=1} f_2(u,0,1) = \frac{d}{du}\Big|_{u=1} \left(\ln(u) + \sin(u-1)\right) = \frac{1}{u} + \cos(u-1)\Big|_{u=1} = 2,$$

$$D_2 f_2(1,0,1) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} f_2(1,v,1) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} \left(\ln(1+v) + \sin(1+v-1)\right) = \frac{1}{1+v} + \cos v\Big|_{v=0} = 2,$$

$$D_3 f_2(1,0,1) = \frac{d}{dw}\Big|_{w=1} f_2(1,0,w) = \frac{d}{dw}\Big|_{w=1} \left(\ln(1+0) + \sin(1+0-w)\right) = -\cos(1-w)\Big|_{w=1} = -1,$$

$$D_1 g_1(0,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} (e^x) = 1, \quad D_2 g_1(0,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=0} (e^0) = 0$$

$$D_1 g_2(0,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \sin(-x) = -1, \quad D_2 g_2(0,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=0} \sin(y) = 1$$

$$D_1 g_3(0,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \left(e^{-0}\right) = 0, \quad D_2 g_3(0,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=0} \left(e^{-y}\right) = -1$$

Per tant:

$$Df(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad Dg(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i llavors:

$$D(f\circ g)(0,0) = Df\circ g(0,0) \cdot Dg(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0) = Df(1,0,1) \cdot Dg(0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

31. Siguin $g(s,t)$ i $h(s,t)$ dues funcions verificant $g(0,0)=0$, $h(0,0)=\pi/2$ i $\partial g/\partial s(0,0)=1$, $\partial g/\partial t(0,0)=-1$, $\partial h/\partial s(0,0)=0$, $\partial h/\partial t(0,0)=2$. Si $f(x,y) = \arctan(e^x \sin y)$ i definim $F(s,t)$ fent les substitucions $x=g(s,t)$ i $y=h(s,t)$ ie, $F(s,t)=f(g(s,t),h(s,t))$, calculeu $\frac{\partial F}{\partial s}(0,0)$ i $\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)$:

S. $$DF(0,0) = Df(g(0,0),h(0,0)) \cdot \begin{pmatrix} \partial g/\partial s(0,0) & \partial g/\partial t(0,0) \\ \partial h/\partial s(0,0) & \partial h/\partial t(0,0) \end{pmatrix} = Df(0,\pi/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).} \quad \square$$

d'on: $\quad \frac{\partial F}{\partial s}(0,0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(0,0) = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/2) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \arctan\left(e^x \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} \arctan(e^x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}\Big|_{x=0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=\pi/2} \arctan(\sin y) = \frac{\cos y}{1+\sin^2 y}\Big|_{y=\pi/2} = \boxed{0}$$

32) Direm que $f(x,y)$ és homogènia de grau $m \in \mathbb{N}$ si $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

(a) Demostreu que si $f \in C^1$ llavors: $x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = m f(x,y)$

(b) Si $m=1$, $f \in C^2$ i $(x,y) \neq (0,0)$, vegeu que $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Solució.

(a) Derivem respecte de t:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = m t^{m-1} f(x,y)$$

i avaluem en $t=1$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = m f(x,y). \qquad (1)$$

(b) $m=1$. Derivant (1) respecte de x i de y

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \qquad (3)$$

Multiplicant totes dues expressions i tenint en compte que $f \in C^2$ i llavors les derivades parcials creuades coincideixen:

$$(1),(2) \Longrightarrow xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \text{ si } x \cdot y \neq 0.$$

- Si $x=0$, $y\neq 0$; tenim, de (1) i (2):

(1): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,y)=0$, (2): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)=0$

d'on:
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,y)\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y),\ \forall\, y\neq 0$$

- Anàlogament, si $x\neq 0$ i $y=0$, tenim:

(1): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)=0$, (2): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,0)=0$ $(f\in C^2)$.

d'on:
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,0)\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0),\ \forall\, x\neq 0.$$

- Finalment, si $(x,y)=(0,0)$, com que $f\in C^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,0)=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)=0.$$

Llavors:
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

Per tant:
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

per tot $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\square$

33) Donada una funció $f = f(u,v,w)$ de classe C^1, calculeu mitjançant la regla de la cadena expressions per a les derivades o derivades parcials primeres de la funció h en termes de les α, β, γ en cadascun dels casos següents

(a) $h(x) = f(x, \alpha(x), \beta(x))$

(b) $h(x,y) = f(y, \alpha(x,y), \beta(x))$

(c) $h(x,y,z) = f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))$

Solució:

(a) $h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\alpha(x),\beta(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\alpha(x),\beta(x))\alpha'(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,\alpha(x),\beta(x))\cdot\beta'(x)$

(b) $D_1 h(x,y) = D_2 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) + D_3 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\beta'(x)$.

$D_2 h(x,y) = D_1 f(y,\alpha(x,y),\beta(x)) + D_2 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y)$.

(c) $D_1 h(x,y,z) = D_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,y,z)$

$D_2 h(x,y,z) = D_2 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\frac{\partial\beta}{\partial y}(y,z)$
$\qquad + D_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial y}(x,y,z)$

$D_3 h(x,y,z) = D_1 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\alpha'(z)$
$\qquad + D_2 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\frac{\partial\beta}{\partial z}(y,z)$
$\qquad + D_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,y,z)$.

34 Signi $f(x,y,z) = (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Proveu que f té una inversa global i calculeu la seva derivada.

Solució

1) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. Obviament, cadascuna de les funcions components de f són funcions elementals o suma de funcions elementals.

2) $\det Df(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{2(y+z)} - 4e^{2(x+z)} = -4e^{2z}(e^{2y}+e^{2x}) < 0$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

3) f és injectiva: en efecte,

$$f(x,y,z) = f(x',y',z') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{2y}+e^{2z} = e^{2y'}+e^{2z'} \\ e^{2x}-e^{2z} = e^{2x'}-e^{2z'} \\ x-y = x'-y' \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\underset{\text{de (1) i (2)}}{\Rightarrow} \left(e^{2y}+e^{2x} = e^{2y'}+e^{2x'} \Leftrightarrow e^{2y}(1+e^{2x-2y}) = e^{2y'}(1+e^{2x'-2y'}) \right.$$

$$\underset{\text{de (3)}}{\Rightarrow} e^{2y} = e^{2y'} \Rightarrow y = y' \underset{(3)}{\Rightarrow} x = x' \underset{(2)}{\Rightarrow} e^{2z} = e^{2z'}$$

$$\Rightarrow z = z'$$

Aleshores $f(x,y,z) = f(x',y',z') \Rightarrow (x,y,z) = (x',y',z')$ i aleshores f és injectiva. D'aquesta manera, si $B = f(\mathbb{R}^3) = \{ b \in \mathbb{R}^3 : \exists a \in \mathbb{R}^3$ amb $f(a) = b\}$; tenim, d'acord amb el Corol·lari, que:

1'.- B és un obert de $\mathbb{R}^3$,

2'.- $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^3$ és C^{∞} en B

3'.- $Df^{-1}(u,v,w) = Df^{-1}(f(x,y,z)) = (Df(x,y,z))^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2e^{y} & 2e^{z} \\ 2e^{x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{e^{-2z}}{4(e^{2y}+e^{2x})} \begin{pmatrix} -2e^{2z} & -2e^{2z} & -4e^{2(y+z)} \\ -2e^{2z} & -2e^{2z} & 4e^{2(x+z)} \\ -2e^{2x} & 2e^{2y} & -4e^{2(x+y)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(\&)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & \frac{1}{1+e^{2w}} \\ \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & \frac{-e^{2w}}{1+e^{2w}} \\ \frac{\frac{1}{2}e^{w}}{ue^{2w}-v} & \frac{-\frac{1}{2}}{ue^{2w}-v} & \frac{(u+v)e^{2w}}{(1+e^{2w})(ue^{2w}-1)} \end{pmatrix}$$

(&) $e^{2x} = \dfrac{u+v}{1+e^{2w}} e^{2w}$, $e^{2y} = \dfrac{u+v}{1+e^{2w}}$, $e^{2z} = \dfrac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}$

on hem posat: $\begin{pmatrix} u = e^{2y}+e^{2z} \\ v = e^{2x}-e^{2z} \\ w = x-y \end{pmatrix}$

De fet, de (&) es veu que podem calcular <u>explícitament</u> la funció inversa; ie.:

$$x(u,v,w) = w + \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}}, \quad y(u,v,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}}, \quad z(u,v,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}$$

Així $(x,y,z) = f^{-1}(u,v,w) = \left(w + \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}}, \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}}, \frac{1}{2}\ln\frac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}\right)$

$$Df^{-1}(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & \frac{1}{1+e^{2w}} \\ \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & -\frac{e^{2w}}{1+e^{2w}} \\ \frac{\frac{1}{2}e^{2w}}{ue^{2w}-v} & \frac{-1/2}{ue^{2w}-v} & \frac{(u+v)e^{2w}}{(1+e^{2w})(ue^{2w}-v)} \end{pmatrix} . \square$$

(35) Fem el mateix per $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) =$
$= (x^2-y^2, xy)$

Solució.

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ (les seves components són funcions elementals: polinomis).

2) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$; $\det Df(x,y) = 2x^2 + 2y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(Només s'anul·la si $(x,y) = (0,0)$).

$(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow (x^2-y^2, xy) =$
$= (x'^2 - y'^2, x'y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2-y^2 = (x')^2-(y')^2 \\ xy = x'y' \end{array}$

Si suposem $xy \neq 0 \Rightarrow x'y' \neq 0$. Aleshores: $y' = \dfrac{xy}{x'}$ i llavors:

$x^2 - y^2 = (x')^2 - \dfrac{x^2y^2}{(x')^2} \Leftrightarrow x^2\left(1 + \dfrac{y^2}{(x')^2}\right) = (x')^2 + y^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(x')^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow |x| = |x'|$

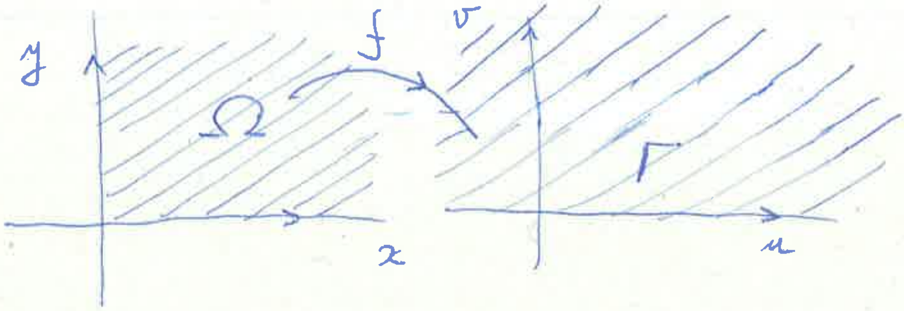
d'on resulta, substituint a la 1^a equació: $|y| = |y'|$

D'altra banda, si $x=0, y \neq 0$: $f(0,y) = f(0,-y)$; mentre que si $x \neq 0, y=0$ tenim que $f(x,0) = f(-x,0)$.

Veiem doncs que f no és injectiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En canvi, sí que ho és si ens restringim, per exemple, al conjunt obert:

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$

Aleshores $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és globalment inversible, amb inversa $f^{-1} : \Gamma = f(\Omega) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \to \Omega$, de classe $C^\infty(\Gamma)$



d'altra banda, si $(u,v) = f(x,y)$, amb $(x,y) \in \Omega$

$$Df^{-1}(u,v) = Df^{-1}(f(x,y)) = (Df(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1/2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & 2x \end{pmatrix} \overset{(\&)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2u+2\sqrt{u^2+4v^2}}\,(u+\sqrt{u^2+4v^2})}{4(u\sqrt{u^2+v^2}+u^2+4v^2)} & \dfrac{2v(u+\sqrt{u^2+4v^2})}{\sqrt{2u+2\sqrt{u^2+4v^2}}\,(u\sqrt{u^2+4v^2}+u^2+4v^2)} \\ \dfrac{v(u+\sqrt{u^2+4v^2})}{\sqrt{2u+2\sqrt{u^2+4v^2}}\,(u\sqrt{u^2+4v^2}+u^2+4v^2)} & \dfrac{\sqrt{2u+2\sqrt{u^2+4v^2}}\,(u+\sqrt{u^2+4v^2})}{2(u\sqrt{u^2+4v^2}+u^2+4v^2)} \end{pmatrix} \quad \square$$

(&) $\begin{array}{l} u^2 = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} u = x^2 - v^2/x^2 \\ \text{d'on: } x^4 - ux^2 - v^2 = 0 \end{array}$

Llavors:

$$x = \sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}}$$

36 (a) Suposem que les equacions $2z = x^2 - y$ i $y = z^2 + 2x$ defineixen y i z com a funcions implícites de x. Calculeu $y'(x)$ i $z'(x)$.

(b) Suposem que les equacions $2z = x^2 - y$ i $y = z^2 + 2x$ defineixen x i y com a funcions implícites de z. Calculeu $x'(z)$ i $y'(z)$.

Solució:

(a) $$f(x,y,z) = (\overbrace{2z - x^2 + y}^{=:f_1}, \overbrace{y - z^2 - 2x}^{=:f_2}) = 0$$

$$f(x, y(x), z(x)) = 0$$

Derivant respecte x:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y(x), z(x))\, y'(x) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y(x), z(x))\, z'(x) =$$

$$= -2x + y'(x) + 2z'(x) = 0 \iff y'(x) + 2z'(x) = 2x.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y(x), z(x))\, y'(x) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y(x), z(x))\, z'(x) =$$

$$= -2 + y'(x) - 2z(x)\, z'(x) = 0 \iff y'(x) - 2z(x)\, z'(x) = 2.$$

Resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2z(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2z(x) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1/2}{1+z(x)} \begin{pmatrix} -2z(x) & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + 2xz(x)}{1+z(x)} \\ \dfrac{x-1}{1+z(x)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Aleshores:}\\ y'(x) = 2\,\frac{1 + xz(x)}{1+z(x)}, \\ z'(x) = \frac{x-1}{1+z(x)}.\end{gathered}}$$

(b) Suposem $x = x(z)$, $y = y(z)$, d'on: $f(x(z), y(z), z) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} 2 - 2x(z)\, x'(z) + y'(z) = 0 &\iff -2x(z)\, x'(z) + y'(z) = -2 \\ y'(z) - 2z - 2x'(z) = 0 &\iff -2x'(z) + y'(z) = 2z \end{aligned}\right\}$$

Resolent el sistema: $\boxed{x'(z) = \dfrac{z+1}{x(z)-1},\quad y'(z) = 2 \cdot \dfrac{1 + zx(z)}{x(z)-1}}$

Problema 37. El sistema

$$x + yv + e^{yu} + e^{xv} = 3$$
$$y - xv + e^{xu} + e^{yv} = 3$$

determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$. Sigui ara $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Calculeu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$.

Solució.
Les dues funcions que defineixen les equacions $f_1(x,y,u,v) = x + yv + e^{yu} + e^{xv} - 3$ i $f_2(x,y,u,v) = y - xv + e^{xu} + e^{yv} - 3$ són sumes de funcions elementals, per tant, funcions de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^4$. D'altra banda $f_1(1,1,0,0) = f_2(1,1,0,0) = 0$, i

$$\det D_{u,v} f(1,1,0,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Aleshores, pel teorema de la funció implícita, existeix un obert $W \subseteq \mathbb{R}^2$, amb $(1,1) \in W$ i una funció $g = (g_1, g_2) : W \to \mathbb{R}^2$ t.q.:

1) $g \in C^\infty(W)$, 2) $g(1,1) = (g_1(1,1), g_2(1,1)) = (0,0)$

3) $\forall (x,y) \in W$:

$$f_1(x,y,g_1(x,y),g_2(x,y)) = 0, \quad f_2(x,y,g_1(x,y),g_2(x,y)) = 0 \qquad (*)$$

Derivant implícitament respecte de (x,y) les equacions $(*)$, substituint $(x,y) = (1,1)$ i tenint en compte 2)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,\ ) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \underset{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}{0},$$

d'on:

$$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(*) $\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} (1+e^u+1-3) = 1,$

$\frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} (1+v+1+e^v-3) = 2,$

$\frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} (1+e^u+1-3) = 1,$

$\frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0} (1-v+1+e^v-3) = 0,$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,0,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=1} (x+1+1-3) = 1$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=1} (1+1+1-3) = 0,$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,0,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=1} (1+1+1-3) = 0,$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=1} (y+1+1-3) = 1$

i.e, calculem les derivades parcials com derivades de funcions d'1 variable, fixant les coordenades respecte de les quals no es deriva.

Recordem també que si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, amb $\det M = ad-cb \neq 0$, llavors:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

Per últim, com que $g\in C^{\infty}(W)$, amb $(1,1)\in W$, resulta que:

$$\det Dg(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2} \neq 0$$

i aplicant el <u>teorema de la funció inversa</u>, tenim que la funció implícita trobada, g, és <u>localment inversible</u> en $(x,y)=(1,1)$, amb inversa local g^{-1}, de classe C^{∞}.

D'altra banda, com que $g(1,1)=(0,0)$, tenim:

$$Dg^{-1}(0,0) = Dg^{-1}(g(1,1)) = \left(Dg(1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Remarca. Alternativament, podem calcular les derivades de g derivant implícitament les equacions. Abusant notació, escrivim $u(x,y)=g_1(x,y)$, $v(x,y)=g_2(x,y)$. Llavors:

$$\left.\begin{aligned} x+y\,v(x,y)+e^{y\,u(x,y)}+e^{x\,v(x,y)} &= 3 \\ y-x\,v(x,y)+e^{x\,u(x,y)}+e^{y\,v(x,y)} &= 3 \end{aligned}\right\}\ \forall (x,y)\in W\subset \mathbb{R}^3,$$
on recordem que $(1,1)\in W$.

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ 1+y v_x + y u_x e^{yu} + (v+x v_x)e^{xv} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\ v+y v_y + (u+y u_y)e^{yu} + x v_y e^{xv} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ -v-x v_x + (u+x u_x)e^{xu} + y v_x e^{yv} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\ 1-x v_y + x u_y e^{xu} + (v+y v_y)e^{yv} = 0 \quad (4)$$

Avaluem en $(x,y)=(1,1)$ tenint en compte que $u(1,1)=0$, $v(1,1)=0$ i llavors:

$$\left.\begin{aligned} (1')\quad & 1+v_x(1,1)+u_x(1,1)+v_x(1,1) = 1+u_x(1,1)+2v_x(1,1) = 0 \\ (3')\quad & -0-v_x(1,1)+u_x(1,1)+\quad(1,1) = u_x(1,1) = 0 \end{aligned}\right\}$$
d'on: $u_x(1,1)=0$
$v_x(1,1)=-1/2$

$$\left.\begin{aligned} (2')\quad & v_y(1,1)+u_y(1,1)+v_y(1,1) = u_y(1,1)+2v_y(1,1) = 0 \\ (4')\quad & 1-v_y(1,1)+u_y(1,1)+v_y(1,1) = 1+u_y(1,1) = 0 \end{aligned}\right\}$$
d'on: $u_y(1,1)=-1$
$v_y(1,1)=\frac{1}{2}$

Aleshores: $Dg(1,1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

38 El sistema

$$\begin{cases} x\cos v + \pi = y + y\sin u \\ u\sin x = v\cos y \end{cases}$$

determina dues funcions $x(u,v)$ i $y(u,v)$ que satisfan $x(\pi,0)=0$ i $y(\pi,0)=\pi$

Sigui ara $h(x(u,v),y(u,v))$ i $g(x,y) = \sin\frac{x}{x^2+y^2}$. Calculeu $D(g\circ h)(\pi,0)$ i $D(g\circ h^{-1})(0,\pi)$

Solució.

$$f(x,y,u,v) := \left(f_1(x,y,u,v) = x\cos v + \pi - y - y\sin u,\ f_2(x,y,u,v) := u\sin x - v\cos y\right)$$

(i) $f\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$: les seves components són sumes de productes de funcions elementals, per tant podem aplicar els criteris de generació.

(ii) $f(0,\pi,\pi,0) = \left(0\cdot\cos(0)+\pi-\pi-\pi\sin(0),\ \pi\sin(0)-0\cdot\cos(\pi)\right) = (0,0)$,

(iii) $$J_{x,y}f(0,\pi,\pi,0) = \begin{vmatrix} \partial_x f_1(0,\pi,\pi,0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0}(x\cdot\cos 0+\pi-\pi-\pi\sin\pi) = 1 & \partial_y f_1(0,\pi,\pi,0) = -1 \\ \partial_x f_2(0,\pi,\pi,0) = \pi & \partial_y f_2(0,\pi,\pi,0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=\pi}(\pi\cdot\sin 0 - 0\cdot\cos(y)) = 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{vmatrix} = \pi \neq 0.$$

Aleshores, de (i), (ii), (iii) tenim, pel teorema de la implícita[1] que $\exists\, W\subset\mathbb{R}^2$ obert, amb $(\pi,0)\in W$ i $\exists$ una funció $h: W\to\mathbb{R}^2$ $(u,v)\in W \overset{h}{\mapsto} h(u,v) = \left(x(u,v) = h_1(u,v),\ y(u,v) = h_2(u,v)\right)$ (on abusem notació, posant $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$) t.q.

(i') $h\in C^\infty(W)$

ii') $h(\pi,0) = (x(\pi,0), y(\pi,0)) = (0,\pi)$

iii') $$f(x(u,v),y(u,v),u,v) = \left(2x(u,v)\cos v + \pi - y(u,v) - y(u,v)\sin u,\ u\sin(x(u,v)) - v\cos(y(u,v))\right) = (0,0)\ \forall (u,v)\in W$$

(1) Veure Ferrer, J. i Puerta, F.: "Càlcul Diferencial" CPDA-ETSEIB, 1990. Tema 18.

de fet, "en un cert obert $U \subseteq \mathbb{R}^4$, amb $(0,\pi,\pi,0) \in U$ aquesta funció, h, és única si s'exigeix, a més que $(x(u,v), y(u,v), u, v) \in U$. És a dir, per a aquest entorn U:

$f(x,y,u,v) = 0$ amb $(x,y,u,v) \in U \iff (x,y) = h(u,v)$ amb $(u,v) \in W$."

(veure F&P. tema 18)

Calculem:

$$D(g \circ h)_{(\pi,0)} = Dg(h(\pi,0)) \cdot Dh(\pi,0) = Dg(0,\pi) \cdot Dh(\pi,0)$$

(regla de la cadena). Per trobar $Dh(\pi,0)$, derivem (i.i') respecte de (u,v) en $(u,v) = (\pi,0)$, i.e.:

$$J_{(x,y)} f(x(\pi,0), y(\pi,0), \pi, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_u(\pi,0) & x_v(\pi,0) \\ y_u(\pi,0) & y_v(\pi,0) \end{pmatrix} + J_{(u,v)} f(x(\pi,0), y(\pi,0), \pi, 0) = 0$$

d'on, tenint en compte que $x(\pi,0) = 0$, $y(\pi,0) = \pi$, resulta: $Dh(\pi,0) =$

$$= \begin{pmatrix} x_u(\pi,0) & x_v(\pi,0) \\ y_u(\pi,0) & y_v(\pi,0) \end{pmatrix} = -J_{(x,y)} f(0,\pi,\pi,0)^{-1} \cdot J_{(u,v)}(0,\pi,\pi,0)$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_u f_1(0,\pi,\pi,0) = \left.\frac{df_1}{du}\right|_{u=\pi} (\pi - \pi - \pi \sin u) = \pi & \partial_v f_1(0,\pi,\pi,0) = \left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} (0 + \pi - \pi - 0) = 0 \\ \partial_u f_2(0,\pi,\pi,0) = \left.\frac{df_2}{du}\right|_{u=\pi} (u \sin 0 - 0 \cdot \cos \pi) = 0 & \partial_v f_2(0,\pi,\pi,0) = \left.\frac{d}{dv}\right|_{v=0} (\pi \sin 0 - v \cos \pi) = 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix}.$$

D'altra banda:

$$Dg(0,\pi) = \left(\partial_x g(0,\pi), \partial_y g(0,\pi)\right) = \left(\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0} \sin\left(\frac{x}{x^2+\pi^2}\right), \left.\frac{d}{dy}\right|_{y=\pi} \sin\left(\frac{0}{0+y^2}\right) \right)$$

$$= \left(\left.\frac{x^2+\pi^2-2x^2}{(x^2+\pi^2)^2} \cos\left(\frac{x}{x^2+\pi^2}\right)\right|_{x=0}, 0 \right) = \left(\left.\frac{\pi^2-x^2}{(x^2+\pi^2)^2} \cos\left(\frac{x}{x^2+\pi^2}\right)\right|_{x=0}, 0 \right) = \left(\frac{1}{\pi^2}, 0\right)$$

Així doncs:

$$D(g\circ h)_{(\pi,0)} = Dg(0,\pi)\cdot Dh(\pi,0) = \left(\frac{1}{\pi^2},0\right)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} \\ \pi & -\frac{1}{\pi}\end{pmatrix} = \left(0,-\frac{1}{\pi^3}\right).$$

A continuació, calculem $D(g\circ h^{-1})_{(0,\pi)}$:

$$D(g\circ h^{-1})_{(0,\pi)} = Dg\left(h^{-1}(0,\pi)\right)\cdot Dh^{-1}(0,\pi) = Dg(\pi,0)\cdot Dh^{-1}(h(\pi,0))$$

$$= Dg(\pi,0)\cdot\left(Dh(\pi,0)\right)^{-1} = \left(\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=\pi} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{1}{\pi},\ \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=0}\sin\left(\frac{\pi}{\pi^2+y^2}\right)=0\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\pi} \\ \pi & -\frac{1}{\pi}\end{pmatrix}^{-1} = \left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{1}{\pi},0\right)\cdot\begin{pmatrix} -1/\pi & \frac{1}{\pi} \\ -\pi & 0\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\pi^3}\cos\frac{1}{\pi},-\frac{1}{\pi^3}\cos\frac{1}{\pi}\right) \square$$

39) Useu la fórmula del gradient per a calcular les següents derivades direccionals.

a) $D_u f(1,0)$ si $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $u = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$

$$D_u f(1,0) = \langle \nabla f(1,0), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T \rangle = (1,0)\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \boxed{2/\sqrt{5}} \quad \square$$

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)^T = (1,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+0^2}\right)\Big|_{x=1} = \frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{d}{dy}\left(\ln\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_{y=1} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right)\Big|_{y=0} = \frac{y}{1+y^2}\Big|_{y=0} = 0$$

b) $D_u f(0,-1)$ si $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$ i $u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

$$D_u f(0,-1) = \langle \nabla f(0,-1), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T \rangle = (-1,0)\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \boxed{1/\sqrt{2}} \quad \square$$

$$\nabla f(0,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\right)^T = (-1,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \frac{d}{dx}\left(e^x\cos(-\pi)\right)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(-e^x\right)\Big|_{x=0} = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = \frac{d}{dy}\left(\cos(\pi y)\right)\Big|_{y=-1} = -\pi\sin(\pi y)\Big|_{y=-1} = 0.$$

c) $D_u f(1,0,0)$ si $f(x,y,z) = x^2e^{-yz}$, $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$.

$$D_u f(1,0,0) = \langle \nabla f(1,0,0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^T \rangle = (2,0,0)\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \boxed{2/\sqrt{3}} \quad \square$$

$$\nabla f(1,0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0), \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)\right)^T = (2,0,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=1} = 2x\Big|_{x=1} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = \frac{d}{dy}(1)\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = \frac{d}{dz}(1)\Big|_{z=0} = 0.$$

40) El perfil d'una certa muntanya es modula mitjançant la funció $h(x,y) = 5000-0{\cdot}01x^2-0{\cdot}02y^2$, on si (x,y) és un punt del pla (imaginari) que defineix la base de la muntanya, llavors $z=h(x,y)$ ens dóna la corresponent alçada.

(a) Un muntanyer es troba al punt $(x,y)=(10,10)$, a punt de fer el cim. En quina direcció s'ha de moure per pujar més ràpidament? Quin és el pendent?

(b) Si en lloc de triar la direcció de màxima pendent opta per triar-ne una amb pendent del 40%, quina direcció ha de seguir? (Indicació: un pendent del 40% correspon a un vector $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ unitari tal que $D_{(\alpha,\beta)}h(10,10)=0{\cdot}4$. Hi ha dues possibles solucions per a (α,β)).

(a) $h(x,y)=5000-0{\cdot}01x^2-0{\cdot}02y^2$; $z=h(x,y)$.

$$\nabla h(x,y)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(10,10),\frac{\partial h}{\partial y}(10,10)\right)^T=(-0{\cdot}2,-0{\cdot}4)^T$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(10,10)=(-0{\cdot}02x)\Big|_{x=10}=-0{\cdot}2\ ,\ \frac{\partial h}{\partial y}(10,10)=(-0{\cdot}04y)\Big|_{y=10}=-0{\cdot}4.$$

La direcció segons la qual la derivada direccional és màxima és la direcció del gradient.

$$u=\frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|}=\frac{(-1,-2)^T}{\|(-1,-2)\|}=\left(-\tfrac{1}{\sqrt5}\ -\tfrac{2}{\sqrt5}\right)^T,$$

i llavors el pendent (i.e., el valor de la derivada direccional), en aquesta direcció és el mòdul del gradient:

$$D_{u=\frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|}}h(10,10)=\left\langle\nabla h(10,10),\frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|}\right\rangle=\|\nabla h(10,10)\|$$
$$=\sqrt{0{\cdot}2^2+0{\cdot}4^2}=0{\cdot}2\sqrt5=$$

(b) $D_{(\alpha,\beta)}h(10,10)=0.4 \Leftrightarrow \langle\nabla h(10,10),(\alpha,\beta)^T\rangle=-0{\cdot}2\alpha-0{\cdot}4\beta=0{\cdot}4$ (1),

amb $\alpha^2+\beta^2=1$ (2). De l'equació (1) aïllant $\alpha=-2(1+\beta)$ i substituint a la 2ª: $5\beta^2+8\beta+3=0$, d'on: $\beta=-1$ i $\beta=-3/5$ són les dues solucions. Llavors les dues direccions possibles corresponen a $u=(0,-1)^T$, $u=\left(-4/5,-3/5\right)^T$

41. La funció de Cobb-Douglas s'usa en economia per modelar un procés de producció on intervenen les variables $x>0$ i $y>0$ —per exemple, el nombre d'hores treballades i el capital invertit en els mitjans de producció—. La seva expressió és:

$$W(x,y) = Kx^{\alpha}y^{\beta},$$

on K, α i β són constants positives. Per simplificar prenem $K=1$, $\alpha=1$ i $\beta=2$.

(a) Si $(x,y)=(2,3)$, quin és el vector (a,b) unitari tal que $W(x,y)$ creix el màxim possible si fem una petita correcció de (x,y) en la direcció d'aquest vector.

(b) Un plantejament més pràctic és suposar que les correccions que fem en els valors de x i y no són independents sinó que estan lligats. Així, si incrementem el nombre d'hores treballades o millorem els mitjans de producció, la suma dels costos d'ambdós increments ha de ser igual al nou capital invertit.

i. Siguin $\Delta x \geq 0$ i $\Delta y \geq 0$ els (petits) increments que fem de x i y, respectivament —és clar que ara el vector $(\Delta x, \Delta y)$ no és unitari!— Useu l'aproximació lineal per a veure que si $|\Delta x|$ i $|\Delta y|$ són prou petits llavors:

$$W(2+\Delta x, 3+\Delta y) \approx W(2,3)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\Delta x + \frac{2}{3}\Delta y\right).$$

ii. Suposem que els increments verifiquen $2\Delta x + \Delta y = \delta$, on $\delta>0$ (fixat) és petit. Usant l'aproximació lineal de l'apartat anterior, quin increment triaríeu per a Δx i Δy per tal de maximitzar el creixement de W?

PLUS PAPEL

Solució

$W(x,y) = Kx^{\alpha}y^{\beta}$. Agafem $K=1$, $\alpha=1$, $\beta=2$. Aleshores $W(x,y) = xy^2$

(a) $(x,y)=(2,3)$. La direcció segons la qual l'increment de la funció és màxim és la direcció del gradient: $\vec{u} = \dfrac{\nabla W(2,3)}{\|\nabla W(2,3)\|} = \dfrac{(9,12)^T}{\sqrt{9^2+12^2}} = \dfrac{(9,12)^T}{\sqrt{225}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)^T$.

(b) (i) $0 < \Delta x \ll 1$, $0 < \Delta y \ll 1$. Si busquem l'aproximació lineal:

$$W(2+\Delta x, 3+\Delta y) - W(2,3) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(2,3)\cdot \Delta x + \frac{\partial W}{\partial y}(2,3)\,\Delta y =$$

$$= \langle \nabla W(2,3), (\Delta x, \Delta y)^T \rangle = (9,12)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = 9\Delta x + 12\Delta y.$$

És a dir:

$$W(2+\Delta x, 3+\Delta y) \approx \overset{18}{\overset{=}{W(2,3)}} + W(2,3)\cdot\frac{\Delta x}{2} + W(2,3)\cdot\tfrac{2}{3}\Delta y = W(2,3)\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{2}+\tfrac{2}{3}\Delta y\right).$$

(ii) $2\Delta x + \Delta y = \delta$, $0 < \delta << 1$. Agafant l'aproximació lineal feta a (i):

$$W(2+\Delta x, 3+\Delta y) - W(2,3) = \frac{1}{6}W(2,3)\cdot(3\Delta x + 4\Delta y) = \frac{W(x,y)}{6}(8\Delta x + 4\Delta y - 5\Delta x)$$

$$= \frac{W(2,3)}{6}\left(4(2\Delta x+\Delta y) - 5\Delta x\right)$$

$$= \frac{W(2,3)}{6}(4\delta - 5\Delta x) = 3(4\delta - 5\Delta x) \leq 12\delta$$

Aleshores, aquest increment serà màxim si agafem $\Delta x = 0$, $\Delta y = \delta$. $\square$

42 La resistència equivalent R corresponent a dues resistències R_1 i R_2 connectades en paral·lel verifica:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Usant l'aproximació lineal, estimeu la variació del valor de R si incrementem el valor de R_1 de $10\,\Omega$ a $10.5\,\Omega$ i decreixem el valor de R_2 de $15\,\Omega$ a $13\,\Omega$.

Solució: $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} \iff R(R_1,R_2) = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$R_1^0 = 10\,\Omega,\ \Delta R_1 = 0'5\,\Omega;\ R_2^0 = 15\,\Omega,\ \Delta R_2 = -2\,\Omega.$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1,R_2) = \frac{R_2(R_1+R_2) - R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2},\quad \frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1,R_2) = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}.$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}(10,15) = \frac{225}{625} = \frac{9}{25},\quad \frac{\partial R}{\partial R_2}(10,15) = \frac{100}{625} = \frac{4}{25}.$$

- Aproximació lineal

$$R(R_1^0+\Delta R_1, R_2^0+\Delta R_2) - R(R_1^0, R_2^0) \simeq \frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1^0,R_2^0)\cdot\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1^0,R_2^0)\cdot\Delta R_2$$

$$|R(10.5,13) - R(10,15)| \simeq \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}(10,15)\cdot 0'5 + \frac{\partial R}{\partial R_2}(10,15)\cdot(-2)\right|$$

$$= \left|\frac{9}{50} - \frac{16}{50}\right| = \frac{7}{50} = 0.14$$

- Acotació de l'error:

$$|R(R_1^0+\Delta R_1, R_2^0+\Delta R_2) - R(R_1^0, R_2^0)| \le \max_r \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1,R_2)\right|\cdot|\Delta R_1| + \max_r\left|\frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1,R_2)\right|\cdot|\Delta R_2|$$

on r és el segment que uneix (R_1^0, R_2^0) i $(R_1^0+\Delta R_1, R_2^0+\Delta R_2)$.

$$\max_r\left|\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1,R_2)\right| \le \max_{\substack{10\le R_1\le 10.5\\ 13\le R_2\le 15}} \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \le \frac{15^2}{23^2} = \frac{225}{529} =: M_1$$

MIQUELRIUS

$$\max_{r} \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1,R_2)\right| \leq \max_{\substack{10\leq R_1\leq 10.5\\ 13\leq R_2\leq 15}} \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} \leq \frac{10.5^2}{23^2} = \frac{441}{2116} =: M_2 .$$

Aleshores:

$$|R(10.5,13)-R(10,15)| \leq M_1\cdot|\Delta R_1| + M_2\cdot|\Delta R_2| = \frac{225}{529}\times 0.5 + \frac{441}{2116}\times 2$$

$$= \frac{450+882}{2116} = \frac{1332}{2116} = \frac{333}{529} = 0.629489603024575\ldots$$

D'altra banda, l'error "real" és:

$$|R(10.5,13)-R(10,15)| = \left|\frac{273}{47}-6\right| = \frac{|273-282|}{47} = \frac{9}{47} = 0.191489361702128\ldots \quad \square$$

45 Calculeu totes les derivades parcials fins a ordre 2 de les següents funcions i doneu el seu desenvolupament de Taylor fins a termes de grau 2 inclosos entorn al punt que s'indica en cada cas.

Solució. Recordem (fórmula de Taylor a grau 2):

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, D^2 f(a) h\rangle + R_2(h)$$

(a) Taylor de $f(x,y) = \sin(xy)$ entorn al punt $(1,\pi/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\sin(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\tfrac{\pi}{2}) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,\tfrac{\pi}{2}) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{4},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,\tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\tfrac{\pi}{2}) = -1.$$

$$\boxed{f(x,y) = 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 + R_2\left(x-1, y-\frac{\pi}{2}\right).}$$

(b) $f(x,y) = x^y$ en un entorn del punt $(x,y)=(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = y x^{y-1}\ln x + x^{y-1} = x^{y-1}(1+y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y(\ln x)^2.$$

$$f(1,1)=1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0.$$

$$\boxed{f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2(x-1,y-1) = x + (x-1)(y-1) + R_2(x-1,y-1).}$$

(c) $f(x,y) = e^{x/y}$ en un entorn del punt $(0,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}e^{x/y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}e^{x/y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}e^{x/y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2}e^{x/y} - \frac{x}{y^3}e^{x/y} = -\frac{1}{y^2}e^{x/y}\left(1+\frac{x}{y}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^3}e^{x/y} + \frac{x^2}{y^4}e^{x/y} = \frac{x}{y^3}e^{x/y}\left(2+\frac{x}{y}\right)$$

$$f(0,1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0.$$

$$\boxed{f(x,y) = e^{x/y} = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_2(x,y-1).}$$

(d) Taylor de $f(x,y,z) = e^{-x}\sin(yz)$ entorn del punt $(0,1,\pi)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -e^{-x}\sin(yz), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{-x}\cos(yz), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = ye^{-x}\cos(yz),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = e^{-x}\sin(yz), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -ze^{-x}\cos(yz), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -ye^{-x}\cos(yz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -z^2e^{-x}\sin(yz), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = e^{-x}\cos(yz) - zye^{-x}\sin(yz),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -y^2 e^{-x} \sin(yz).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,\pi)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,\pi) = -\pi$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,\pi) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1,\pi) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1,\pi) = \pi$,

, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,1,\pi) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,1,\pi) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1,\pi) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,1,\pi) = 0$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x,y,z) = e^{-x}\sin(yz) = -\pi(y-1) - (z-\pi) + \pi x(y-1) + x(z-\pi) - (y-1)(z-\pi) \\ + R_2(x, y-1, z-\pi) \end{gathered}}$$

(46.) Mitjançant l'ús de desenvolupaments de Taylor de funcions d'1 variable (coneguts a priori), calculeu els desenvolupaments de Taylor en l'origen fins a termes de grau 2 inclosos de les següents funcions.

(a) $f(x,y) = e^{xy}\ln(1+x+y) \overset{(1)}{=} \left(1+xy+\frac{1}{2!}(xy)^2+\dots\right)\left(x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\dots\right)$

$$= x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\dots = x+y-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+R_2(x,y) \ \square$$

(1) on fem ús dels desenvolupaments, en $t=0$:

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^p}{p!}+\dots$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots+(-1)^p\frac{t^{p+1}}{p+1}+\dots$$

(b) $f(x,y) = e^x\cos y \overset{(2)}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)\left(1-\frac{y^2}{2!}+\dots\right)$

$$= 1-\frac{y^2}{2!}+x+\frac{x^2}{2!}+\dots = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+R_2(x,y) \ \square$$

(2) on fem ús dels desenvolupaments, en $t=0$ de e^t (veure nota 1) i de:

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\dots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+\dots$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y} \overset{(3)}{=} 1-x-y+(x+y)^2+\dots = 1-x-y+x^2+2xy+y^2$
$+R_2(x,y) \ \square$

(3) on fem ús del desenvolupament, en $t=0$, de:

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^p t^p+\dots$$

(d) $f(x,y,z) \overset{(4)}{=} e^{x+y}\sqrt{1+x}\,\cos(x+y+z) = \left(1+x+y+\frac{1}{2}(x+y)^2+\dots\right)\times$

$$\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\dots\right)\times\left(1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2+\dots\right) =$$

$$= \left(1+x+y+\tfrac{1}{2}(x+y)^2+\cdots\right)\left(1+\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+\cdots\right)\left(1-\frac{(x+y+z)^2}{2}+\cdots\right)$$

$$= \left(\begin{array}{llll} 1+\frac{x}{2} & -\frac{x^2}{8} & & \\ \quad +x & +\frac{x^2}{2} & & \\ \quad\quad +y & \quad +\frac{1}{2}xy & & \\ & +\frac{x^2}{2} + xy & +\frac{y^2}{2} & +\cdots \end{array}\right)\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}(x+y+z)^2+\cdots\right)$$

$$= \left(1+\tfrac{3}{2}x+y+\tfrac{7}{8}x^2+\tfrac{3}{2}xy+\tfrac{y^2}{2}+\cdots\right)\left(1-\tfrac{1}{2}(x+y+z)^2+\cdots\right)$$

$$= 1+\tfrac{3}{2}x+y+\left(\tfrac{7}{8}-\tfrac{1}{2}\right)x^2+\left(\tfrac{3}{2}-1\right)xy+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)y^2-xz-yz-\tfrac{z^2}{2}+\cdots$$

$$= 1+\tfrac{3}{2}x+y+\tfrac{3}{8}x^2+\tfrac{1}{2}xy-xz-yz-\tfrac{z^2}{2}+R_2(x,y,z) \quad \square$$

(4) On hem fet ús dels desenvolupaments, en $t=0$, de e^t, $\cos t$ (veure notes 1 i 2) i:

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1+\binom{1/2}{1}t+\binom{1/2}{2}t^2+\cdots+\binom{1/2}{p}t^p+\cdots = 1+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}t^2+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{(2p-3)!!}{2^p\,p!}+\cdots$$

on: $\binom{1/2}{1}=1$, $\binom{1/2}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=\dfrac{-1}{2^2\,2!}$, $\binom{1/2}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}=\dfrac{3\cdot 1}{2^3\cdot 3!}$, ...

..., $\binom{1/2}{p}=(-1)^{p-1}\dfrac{(2p-3)!!}{2^p\,p!}$, per $p=2,3,\ldots$

(47) Calculeu el desenvolupament de Taylor en l'origen de les següents funcions fins l'ordre que s'indica en cada cas, doneu el valor de totes les derivades parcials de la funció en el (0,0) corresponents a l'ordre màxim fins al qual s'ha desenvolupat (per ex., si desenvolupem fins a ordre 5 volem $\frac{\partial^5 f}{\partial x^n \partial y^m}(0,0)$ amb $n+m=5$).

Solució.

Primer, recordem que, per desenvolupaments de funcions de dues variables en (x_0,y_0):

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x_0,y_0)(x-x_0)^j(y-y_0)^{k-j}+R_p(x-x_0,y-y_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k} coef_{j,k-j}\,(x-x_0)^j(y-y_0)^{k-j}+R_p(x-x_0,y-y_0),$$

d'on tenim que les derivades d'ordre k es poden calcular amb la fórmula:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(0,0)=j!(k-j)!\,coef_{j,k-j}\,,\quad \text{amb } j=0,1,2,\dots,k.$$

(a) $f(x,y)=\ln(1+x^2-y)$, fins a ordre 3.

$$f(x,y)=(x^2-y)-\frac{1}{2}(x^2-y)^2+\frac{1}{3}(x^2-y)^3+\dots$$

$$=-y+x^2-\frac{y^2}{2}+x^2y-\frac{1}{3}y^3+R_3(x,y)$$

Llavors les derivades d'ordre 3 vénen donades per:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=-\frac{1}{3}3!=-2.\ \square$$

(òbviament, totes les derivades parcials "creuades" coincideixen al (0,0); i.e.:

$$f_{xxy}(0,0)=f_{xyx}(0,0)=f_{yxx}(0,0)=2,$$

$$f_{xyy}(0,0)=f_{yxy}(0,0)=f_{yyx}(0,0)=-2.$$

(b) $f(x,y) = \cos(xy)$, fins ordre 8

$$f(x,y) = \cos(xy) = 1 - \frac{x^2y^2}{2!} + \frac{x^4y^4}{4!} + R_4(x,y),$$

d'on tenim que les derivades d'ordre 8 al $(0,0)$ són:

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^8}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^7 \partial y}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^6 \partial y^2}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^5 \partial y^3}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0) = \frac{1}{\cancel{4!}}\cancel{4!}\,4! = 24,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^3 \partial y^5}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^2 \partial y^6}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x \partial y^7}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial y^8}(0,0) = 0. \ \square$$

(c) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ fins ordre 8.

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2} = 1 + \frac{1}{1}(x^2-y^2) + \frac{1}{2!}(x^2-y^2)^2 + \frac{1}{3!}(x^2-y^2)^3 + \frac{1}{4!}(x^2-y^2)^4 + \dots$$

$$= 1 + x^2 - y^2 + \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{2}x^2y^4$$
$$- \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{6}x^6y^2 + \frac{1}{4}x^4y^4 - \frac{1}{6}x^2y^6 + \frac{1}{24}y^8$$
$$+ R_8(x,y).$$

Aleshores, les derivades parcials d'ordre 8 en $(0,0)$, resulten:

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^8}(0,0) = \frac{1}{24}8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^7 \partial y}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^6 \partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{6}6!2! = -240.$$

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^5 \partial y^3}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0) = \frac{1}{4}4!4! = 144,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x^3 \partial y^5}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^2 \partial y^6}(0,0) = -\frac{1}{6}2!6! = -240,\ \frac{\partial^8 f}{\partial x \partial y^7}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^8 f}{\partial y^8}(0,0) = \frac{1}{24}8! = 1680$$

$\square$

48 Calculeu, si existeix, el següent límit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2}$$

Indicació: calculeu el desenvolupament de Taylor del numerador fins ordre 2 i useu les propietats del residu de Taylor $R_2(x,y)$

Solució:

$$e^x \sin(x+y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)\cdot\left(x+y - \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= x+y + x(x+y) + R_3(x,y) = x+y+x^2+xy+R_3(x,y).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{x+y+x^2+xy} + R_3(x,y) \cancel{- x - y - x^2 - xy}}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(0,0)} \frac{R_3(x,y)}{\|(x,y)\|^2} = 0. \square$$

(49) Determineu el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Solució.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y) - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{(5)}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y) - \frac{1}{3}(x^2+y)^3 + \dots - x^2 - y - \lambda y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(5) fem ús del desenvolupament, en $t=0$, de $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{2p+1} + \dots$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{y} + \cancel{x^2} - (\lambda + \frac{1}{3}) y^3 - \cancel{x^2} - \cancel{y} + R_3(x,y)}{\|(x,y)\|^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{-(\lambda+\frac{1}{3})y^3}{\|(x,y)\|^3} + \underbrace{\frac{R_3(x,y)}{\|(x,y)\|^3}}_{\downarrow \; 0 \text{ (Taylor)}} \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_3(x,y)}{\|(x,y)\|^3} = 0, \text{ si } \lambda = -\frac{1}{3}.$$

Si $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ el límit no existeix. Per comprovar-ho és suficient considerar el límit a l'origen segons la recta $\{x=0\}$. En efecte:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y - y - \lambda y^3}{|y|^3} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y} - \frac{1}{3}y^3 - \cancel{y} - \lambda y^3 + R_3(y)}{|y|^3} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left[\frac{R_3(y)}{|y|^3} - \left(\frac{1}{3}+\lambda\right)\frac{y^3}{|y|^3} \right] = \begin{cases} -(\frac{1}{3}+\lambda), & \text{si } y\to 0^+ \\ \frac{1}{3}+\lambda, & \text{si } y \to 0^- \end{cases}$$

Llavors el límit segons la recta $\{x=0\}$ no existeix i per tant no pot existir el límit a l'origen. □

Remarca 1. Com es faria el problema 45 a partir de desenvolupaments, a l'origen, de funcions d'1 variable?

(a) Taylor de $f(x,y) = \sin(xy)$ entorn del punt $(1, \frac{\pi}{2})$

$$f(x,y) = \sin(xy) = \sin\left((x-1+1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left((x-1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left((x-1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\left((x-1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \dots$$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$

$$= 1 - \tfrac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \tfrac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + R_2\left(x-1, y-\tfrac{\pi}{2}\right) \quad \square$$

(b) $f(x,y) = x^y$ en un entorn del punt $(x,y) = (1,1)$

$$= x \cdot x^{y-1} = (x-1+1)\, e^{(y-1)\ln(1+(x-1))} = (1+(x-1))\exp\left((y-1)((x-1)+\dots)\right)$$

$$= (1+(x-1))(1+(x-1)(y-1)+\dots) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2(x-1, y-1).$$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$ $\square$

(c) $f(x,y) = e^{x/y}$ en un entorn del punt $(0,1)$

$$= \exp\left(\frac{x}{y}\right) = \exp\left(\frac{x}{1+y-1}\right) = \exp\left(x\left(1-(y-1)+\dots\right)\right)$$

$$= 1 + x(1-(y-1)+\dots) + \tfrac{1}{2}\left(x(1-(y-1)+\dots)\right)^2 + \dots$$

$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_2(x, y-1).$$

(d) Taylor de $f(x,y,z) = e^{-x}\sin(yz)$ entorn del punt $(0,1,\pi)$

$$f(x,y,z) = e^{-x}\sin(yz) \overset{(*)}{=} e^{-x}\sin\left((y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + (z-\pi) + \pi\right)$$

$$= -e^{x}\sin\left((y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + z-\pi\right) =$$

(*) $(y-1+1)(z-\pi+\pi) = (y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + z-\pi+\pi$

$$= -\left(1-x+\dots\right)\left(\left(y-1\right)\left(z-\pi\right)+\pi\left(y-1\right)+\left(z-\pi\right)+\dots\right)$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \dots$

$$= -(y-1)(z-\pi)-\pi(y-1)-(z-\pi)+\pi x(y-1)+x(z-\pi)+\dots$$

$$= -\pi(y-1)-(z-\pi)+\pi x(y-1)+x(z-\pi)-(y-1)(z-\pi)+R_3(x,y-1,z-\pi)$$

$\square$

Remarca 2. Càlcul de derivades direccionals quan la funció no és C^1. Exemple (Parcial 29 oct. 2012).

Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{xy^2-2x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0)=0$

a) Calculeu $D_v f(0,0)$ on v és un vector qualsevol de norma 1.

Es pot comprovar que les derivades parcials de f no són contínues al $(0,0)$. Per tant f no és C^1 en cap entorn de l'origen, llavors no podem fer servir la fórmula del gradient per calcular les derivades direccionals al $(0,0)$, i ho hem de fer a partir de la definició mitjançant el límit. En efecte, sigui $v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ amb $\|v\|=1 \Leftrightarrow v_1^2+v_2^2=0$. Aleshores, per la definició:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2 - 2t^3 v_1^3}{t^2(v_1^2+v_2^2)}}{t} =$$

$$= \frac{v_1 v_2^2 - 2v_1^3}{v_1^2+v_2^2} \underset{v_1^2+v_2^2=1}{=} v_1 v_2^2 - 2v_1^3 = v_1\left(v_2^2-2v_1^2\right).$$

MIGUELPIUS

EXTREMS

(50) Troben els candidats a extrems relatius de les funcions següents i classifiquen-los.

(a) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

Proposició (extrems relatius, cas particular dimensió 2: $n=2$). Si $f(x,y)$ és una funció definida en un entorn de (x_0,y_0) on és de classe C^2 (i.e., totes les seves derivades parcials existeixen i són contínues en aquest entorn) i $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. Aleshores:

(i) Si $f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2>0$, f té un extrem relatiu (o extrem local) en (x_0,y_0). Aquest extrem relatiu és:

(i.1) Un mínim relatiu si $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ $(f_{yy}(x_0,y_0)>0)$.

(i.2) Un màxim relatiu si $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ $(f_{yy}(x_0,y_0)<0)$.

(ii) Si $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2<0$ no hi ha extrem en (x_0,y_0). De fet (x_0,y_0) és un punt de sella de la funció (els VAPs de $\mathrm{Hess}f(x_0,y_0)$ tenen signe diferent).

(iii) Si $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2=0$: pot haver o no un extrem de la funció a (x_0,y_0), però no es pot decidir a partir d'aquest criteri i es requereix un estudi complementari. □

(a) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

$f_x(x,y)=4x^3-4y=0 \iff y=x^3$ i substituïm a la 2ª equació:

$f_y(x,y)=4y^3-4x=0 \iff x=y^3$: $x=x^9 \iff x(1-x^8)=0$. Sols: $x=0,\pm1$.

D'on tenim que els punts crítics són: $(x_0,y_0)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$.

- $(0,0)$: $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-4$: $f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=-16<0$: $(0,0)$ és un punt de sella.
- $(1,1)$: $f_{xx}(1,1)=12$, $f_{xy}(1,1)=-4$, $f_{yy}(1,1)=12$: $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1)-f_{xy}(1,1)^2=$ $=144-16=128>0$ i $f_{xx}(1,1)=12>0$. Aleshores $(1,1)$ és un punt de mínim

relatiu de la funció, en aquesta val $f(1,1)=-1$.

- $(-1,-1)$: $f_{xx}(-1,-1)=12$, $f_{xy}(-1,-1)=-4$, $f_{yy}(-1,-1)=12$: $f_{xx}(-1,-1)\cdot f_{yy}(-1,-1)-$
  $-f_{xy}(-1,-1)^2=128>0$. Alashores $(-1,-1)$ és un punt de mínim relatiu de la funció on val $f(-1,-1)=-1$. $\square$

(b) $f(x,y)=x^2+xy+y^3-y^2-3x-2y+1$

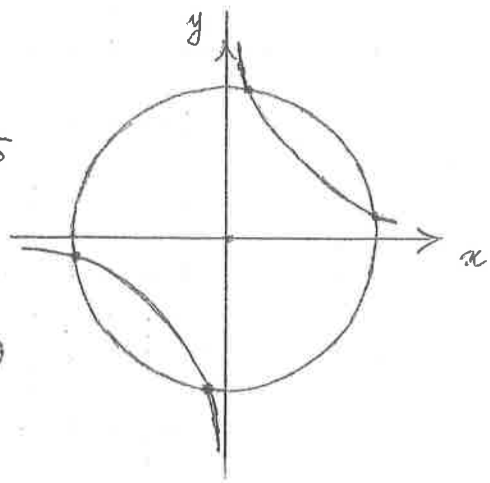
$f_x(x,y)=2x+y-3=0 \iff y=3-2x$ i substituint a la 2ª equació:

$f_y(x,y)=x+3y^2-2y-2=0$; $x+3(3-2x)^2-2(3-2x)-2=x+3(9-12x+4x^2)$
$-6+4x-2=12x^2-31x+19=0$

$$x=\frac{31\pm\sqrt{31^2-4\cdot12\cdot19}}{24}=\frac{31\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{31\pm7}{24}=\begin{cases}19/12: y=3-\frac{19}{6}=-\frac{1}{6}.\\ 1 \;: y=3-2=1.\end{cases}$$

Tenim doncs els punts crítics: $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$ i $(1,1)$.

- $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$: $f_{xx}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=2$, $f_{xy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=1$, $f_{yy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=-3$; d'on: $f_{xx}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)-f_{xy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)^2=-7<0$. Per tant $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$ és un punt de sella de f i $f\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=-\frac{521}{432}$.
- $(1,1)$: $f_{xx}(1,1)=2$, $f_{xy}(1,1)=1$, $f_{yy}(1,1)=4$: $f_{xx}(1,1)\,f_{yy}(1,1)-$
  $-f_{xy}(1,1)^2=8-1=7>0$ i $f_{xx}(1,1)=2>0$. Per tant $(1,1)$ és un punt de mínim relatiu de f, i $f(1,1)=1+1+1-1-3-2+1=-2$ $\square$



(c) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

$f_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0$, d'on: $x^2+y^2=5$

$f_y(x,y)=6xy-12=0$, d'on: $xy=2$

$y=2/x$: $x^2+\frac{4}{x^2}=5 \iff x^4-5x^2+4=0$;

$$x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm3}{2}}=\begin{cases}\pm2: \begin{cases}(2,1)\\(-2,-1)\end{cases}\\ \pm1: \begin{cases}(1,2)\\(-1,-2)\end{cases}\end{cases}$$

$f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 6y$
$f_{yy}(x,y) = 6x$

- $(2,1)$: $f_{xx}(2,1) = 12$, $f_{xy}(2,1) = 6$, $f_{yy}(2,1) = 12$: $f_{xx}(2,1)\cdot f_{yy}(2,1) - f_{xy}(2,1)^2 =$ $= 144 - 36 = 108 > 0$ amb $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$. Per tant $(2,1)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(2,1) = -28$
- $(-2,-1)$: $f_{xx}(-2,-1) = -12$, $f_{xy}(-2,-1) = -6$, $f_{yy}(-2,-1) = -12$: $f_{xx}(-2,-1)\, f_{yy}(-2,-1) -$ $- f_{xy}(-2,-1)^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ amb amb $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$. Aleshores, $(-2,-1)$ és un punt de màxim relatiu de la funció, on val: $f(-2,-1) = 28$.
- $(1,2)$: $f_{xx}(1,2) = 6$, $f_{xy}(1,2) = 12$, $f_{yy}(1,2) = 6$: $f_{xx}(1,2)\cdot f_{yy}(1,2) - f_{xy}(1,2)^2 = -108 < 0$. Llavors $(1,2)$ és un punt de sella de la funció, on f val $f(1,2) = -26$.
- $(-1,-2)$: $f_{xx}(-1,-2) = -6$, $f_{xy}(-1,-2) = -12$, $f_{yy}(-1,-2) = -6$: $f_{xx}(-1,-2)\cdot f_{yy}(-1,-2) - f_{xy}(-1,-2)^2$ $= -108 < 0$. Així $(-1,-2)$ correspon a un punt de sella de la funció, on f val $f(-1,-2) = 26$ □

(d) $f(x,y) = 8xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, si $x, y > 0$

$f_x(x,y) = 8y - \frac{1}{x^2} = 0 \iff y = \frac{1}{8x^2}$ i substituïm a la 2ª

$f_y(x,y) = 8x - 1/y^2 = 0$: $8x - 64x^4 = 8x(1-8x^3) = 0 \begin{cases} x = 0 \ (\text{No}) \\ x = 1/2 \end{cases}$

Llavors el punt crític és: $(1/2, 1/2)$

$f_{xx}(x,y) = 2/x^3$, $f_{xy}(x,y) = 8$, $f_{yy}(x,y) = 2/y^3$

Aleshores: $f_{xx}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot f_{yy}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) - f_{xy}(1/2, 1/2)^2 = 16^2 - 64 = 256 - 64 = 192 > 0$ i com que $f_{xx}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 16 > 0$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(1/2, 1/2) = 6$. □

(e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, si $x,y > 0$

$$f_x(x,y) = y - \frac{50}{x^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{50}{x^2} \text{ i substituint a la 2}^a\text{:}$$

$$f_y(x,y) = x - \frac{20}{y^2} = x - \frac{20}{2500}x^4 = \frac{x}{125}(125 - x^3) = 0 : \begin{cases} x = 0 \text{ (No)} \\ x = 5. \end{cases}$$

Tenim doncs que $(5,2)$ és un punt crític de f.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3}; \quad f_{xy}(x,y) = 1, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3}$$

$f_{xx}(5,2) \cdot f_{yy}(5,2) - f_{xy}(5,2)^2 = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1 = 3 > 0$, amb $f_{xx}(5,2) = 4/5 > 0$, i per tant $(5,2)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(5,2) = 30$. □

(f) $f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x(x,y) = y \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = y \cdot \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right) = 0$$

$$f_y(x,y) = x \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = x \cdot \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right) = 0$$

Agafant $y = 0$ a la 1ª equació i substituint a la 2ª equació s'obté: $x \ln x^2 = 2x \ln|x| = 0 : \begin{cases} x = 0 \text{ (No)} \\ x = \pm 1. \end{cases}$ Punts crítics $(\pm 1, 0)$.

Agafant, de la 1ª equació $\ln(x^2+y^2) = -\frac{2x^2}{x^2+y^2}$ i substituint a la 2ª, resulta:

$2x \frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2} = 0 :$

- $x = 0$, i llavors: $\ln|y| = 0$, d'on $y = \pm 1$ i aleshores $(0, \pm 1)$ són punts crítics.
- $y = \pm x$, i llavors $\ln(2x^2) = -1$, d'on $x = \pm 1/\sqrt{2e}$ i així tenim altres 4 punts crítics: $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm 1/\sqrt{2e}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right).$$

$$f_{xy}(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right).$$

Aleshores:

- $(\pm 1,0)$: $f_{xx}(\pm 1,0)=0$, $f_{xy}(\pm 1,0)=2$, $f_{yy}(\pm 1,0)=0$

  $f_{xx}(\pm 1,0)\cdot f_{yy}(\pm 1,0)-f_{xy}(\pm 1,0)^2=-4<0$. Aleshores $(\pm 1,0)$ són punts de sella de la funció f, on pren el valor $f(\pm 1,0)=0$

- $(0,\pm 1)$: $f_{xx}(0,\pm 1)=0$, $f_{xy}(\pm 1,0)=2$, $f_{yy}(\pm 1,0)=0$

  $f_{xx}(0,\pm 1)\cdot f_{yy}(0,\pm 1)-f_{xy}(0,\pm 1)^2=-4<0$. Aleshores els punts $(0,\pm 1)$ són punts de sella de la funció f, on pren el valor $f(0,\pm 1)=0$.

- $\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)$, $\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$: $f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=2$,

  $f_{xy}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xy}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=0$, $f_{yy}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{yy}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=2$.

  Aleshores:

  $$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=2\cdot 2-0=4>0$$

  i com que $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=2>0$, llavors $\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)$ i $\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$ són punts de mínims relatiu de f, on la funció val:

  $f\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=-\frac{1}{2e}$.

- $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$: $f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=-2$,

  $f_{xy}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{xy}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=0$; $f_{yy}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{yy}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=-2$

  Aleshores:

  $$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2=4>0,$$

  amb $f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=-2<0$. Per tant, els punts $\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)$ i $\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$ són punts de màxim relatiu de la funció f, on aquesta funció val $f(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = f(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) = 1/2e$. □

(g) $f(x,y,z) = x^2/2 + xyz - z - y$

$$f_x(x,y,z) = x + yz = 0$$
$$f_y(x,y,z) = xz - 1 = 0 \quad \text{d'on } z = 1/x$$
$$f_z(x,y,z) = xy - 1 = 0 \quad \text{d'on } y = 1/x$$

i substituint a la 1ª equació $x + 1/x^2 = 0$ i llavors $x=-1$, $y=-1$, $z=-1$; d'on tenim que $(-1,-1,-1)$ és un punt crític de la funció.

Criteri de Silvester-Jacobi
$A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^T = A$
A def $+ \Leftrightarrow$ tots els seus menors són estrictament $+$
A def $- \Leftrightarrow \dots$

$$f_{xx}(x,y,z) = 1, \quad f_{xy}(x,y,z) = z, \quad f_{xz}(x,y,z) = y$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 0, \quad f_{yz}(x,y,z) = x$$
$$f_{zz}(x,y,z) = 0$$

Per tant:

$$\text{Hess} f(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant el criteri de Sylvester: $1>0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$

la matriu $\text{Hess} f(-1,-1,-1)$ no és definida ni positiva ni negativa, amb $\det \text{Hess} f(-1,-1,-1) < 0$ $(\neq 0)$. Llavors f té un punt de sella en $(-1,-1,-1)$ on val $f(-1,-1,-1) = 3/2$. □

(h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y,z) = 2x + y = 0 \\ f_y(x,y,z) = 2y + x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$
$$f_z(x,y,z) = 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Aleshores la funció té l'origen $(0,0,0)$ com punt crític, i:

$$f_{xx}(x,y,z) = 2, \quad f_{xy}(x,y,z) = 1, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 2, \quad f_{yz}(x,y,z) = 0, \quad f_{zz}(x,y,z) = 2.$$

• $\text{Hess} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Aplicant el criteri de Sylvester: $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$

tenim que $\text{Hess} f(0,0,0)$ és definida positiva; per tant $(0,0,0)$ és un punt de mínim relatiu de f on $f(0,0,0)=0$.

Remarca. Això es pot deduir d'immediat si expressem la funció com

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy = \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + z^2 \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; \square$$

51) Troben els màxims i mínims absoluts (si existeixen) per a les següents funcions de dues variables definides en els dominis D que s'indiquen. Justifiquen la resposta en cada cas.

(a) $f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$, $D = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 2x\, e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 2x(1-x^2-2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

$$f_y(x,y) = 4y\, e^{-(x^2+y^2)} - 2y\,(x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 2y\,(2-x^2-2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

• De la 1ª equació: $x=0$ i substituint a la 2ª,

$$2y(2-2y^2)=0 \;:\; \begin{cases} y=0, \text{ d'on } (0,0) \text{ és un p.c.} \\ y=\pm 1, \text{ d'on } (0,\pm 1) \text{ són p.c.} \end{cases}$$

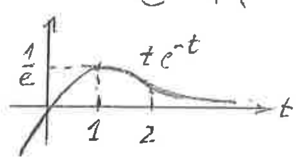
• De la 1ª equació, agafant: $x^2+2y^2=1$ i substituint a la 2ª: $2y=0 \iff y=0$ i llavors $x^2=1 \iff x=\pm 1$. Això dóna altres dos punts crítics: $(\pm 1, 0)$.

Valor de f als punts crítics: $f(0,0)=0$, $f(\pm 1,0) = 1/e$, $f(0,\pm 1) = 2/e$.

D'altra banda tenim que, per tot $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(0,0) = 0 \leq f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$$
$$\leq 2(x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \overset{(*)}{\leq} 2/e = f(0,\pm 1) \qquad (\&)$$

(*) Es comprova fàcilment que $te^{-t} \leq 1/e$:



Aleshores és clar que $(0,0)$ és un punt de mínim absolut de la funció, mentre que $(0,\pm 1)$ són punts de màxim absolut de f; i $f(0,0)=0$, $f(0,\pm 1)=2/e$. $\square$

(b) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$, $D=\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y)=2x-1=0 \iff x=\tfrac{1}{2}$$
$$f_y(x,y)=2y-1=0 \iff y=\tfrac{1}{2}$$

Així $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ és un punt crític de la funció f i, d'altra banda:

$$f_{xx}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\cdot f_{yy}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)-f_{xy}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)^2=2\cdot 2-0=4>0, \text{ amb } f_{xx}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2>0;$$

per tant el punt crític $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ correspon a un mínim relatiu de f que, de fet es un mínim absolut, ja que:

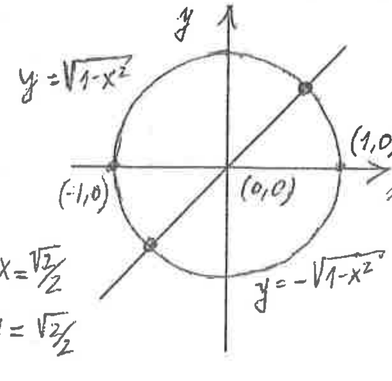
$$f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\geq \tfrac{1}{2}=f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

D'altra banda f és no acotada superiorment a $\mathbb{R}^2$, com es comprova d'immediat restringint f per ex. sobre la recta $y=0$, i.e. $f(x,0)=x^2-x+1\longrightarrow +\infty$ quan $x\to\pm\infty$. Llavors no té màxim absolut. $\square$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}=\bar{B}_1(0,0)$ (compacte!)

De l'apartat anterior tenim que f té un punt crític $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in\mathring{D}$.

A continuació, restringirem f sobre $\partial D=\partial D_+\cup\partial D_-\cup\{(1,0)\}\cup\{(-1,0)\}$ on $\partial D_\pm=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\pm\sqrt{1-x^2},\ -1<x<1\}$:



- $g_+(x)=f\big|_{\partial D_+}=f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=2-x-\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

$$g_+'(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ -1<x<1 \iff x=\sqrt{1-x^2}\iff x=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
d'on $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $g_-(x)=f\big|_{\partial D_-}=f\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)=2-x+\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

$$g_-'(x)=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ -1<x<1 \iff x=-\sqrt{1-x^2}\iff x=-\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
d'on $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Per últim, avaluem f sobre els candidats a extrems

$$f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2},\ f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-\sqrt{2},\ f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2},\ f(1,0)=1,$$

$$f(-1,0)=3 \qquad \text{(notem que } 2-\sqrt{2}=2-1'414\ldots=0'586>\tfrac{1}{2}=0'5 \text{ i}$$

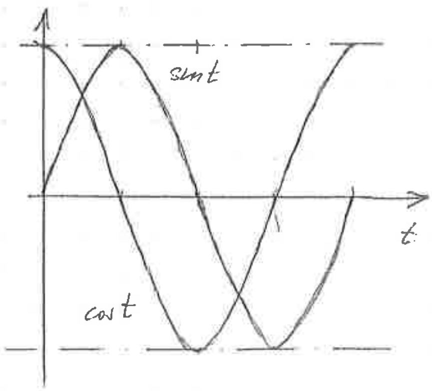
$$2+\sqrt{2}=2+1'414=3'414\ldots>3)$$

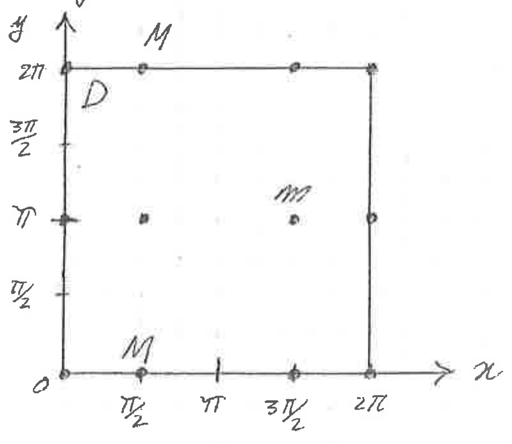
D'on es conclou que, sobre el compacte $D=B_1(0,0)$, f té un màxim absolut a $(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$, on val $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2}$ i un mínim absolut a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, on val $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. □

(d) $f(x,y)=\sin x+\cos y$ sobre el compacte $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi\}$

$f_x(x,y)=\cos x=0$, amb $0<x<2\pi \iff x=\pi/2,\ 3\pi/2$

$f_y(x,y)=-\sin y=0$, amb $0<y<2\pi \iff y=\pi$.





Així doncs, tenim 2 punts crítics a l'interior del compacte D: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)\in\mathring{D}$.

Es considera la descomposició de ∂D (frontera de D) següent:

$$\partial D=\partial D_1^-\cup\partial D_1^+\cup\partial D_2^-\cup\partial D_2^+\cup\{(0,0),(2\pi,0),(2\pi,2\pi),(0,2\pi)\},$$

on:

$$\partial D_1^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<2\pi,\ y=0\},\quad \partial D_1^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<2\pi,\ y=2\pi\},$$

$$\partial D_2^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0,\ 0<y<2\pi\},\quad \partial D_2^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=2\pi,\ 0<y<2\pi\}.$$

A continuació, busquem els punts crítics de les restriccions de f sobre $\partial D_1^\pm$, $\partial D_2^\pm$: $f|_{\partial D_1^\pm}$, $f|_{\partial D_2^\pm}$

- $f|_{\partial D_1^\pm}$: $u(x):=f(x,0)=f(x,2\pi)=\sin x+1,\ 0<x<2\pi$, d'on

$$u'(x)=\cos x=0 \text{ amb } 0<x<2\pi \iff x=\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

Tenim doncs 4 punts crítics de $f\big|_{\partial D_1^- \cup \partial D_1^+}$: $\left\{ \left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \right\}$

- $f\big|_{\partial D_2^\pm}$: $V(y) := f(0,y) = f(2\pi,y) = \cos y$, $0<y<2\pi$, d'on

$$V'(y) = -\sin y = 0 \text{ amb } 0<y<2\pi \iff y = \pi.$$

Tenim així 2 punts crítics per $f\big|_{\partial D_2^- \cup \partial D_2^+}$: $\{(0,\pi), (2\pi,\pi)\}$

Resumint: hem trobat com candidats a extrem (absolut) de f en el compacte D, els punts:

$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) \in \mathring{D}$,

$\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \in \partial D_1^- \cup \partial D_1^+$

$(0,\pi), (2\pi,\pi) \in \partial D_2^- \cup \partial D_2^+$

$(0,0), (2\pi,0), (2\pi,2\pi), (0,2\pi)$: "vèrtexs" de D.

Per decidir a quins d'aquests punts correspon el màxim i el mínim absolut, avaluem la funció:

$f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1-1 = 0$

$f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi = -1-1 = -2$; mín. abs. en $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1+1 = 2$ màx. abs. en $\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0 = -1+1 = 0$

$f(0,\pi) = f(2\pi,\pi) = \sin 0 + \cos\pi = -1$

$f(0,0) = f(2\pi,0) = f(2\pi,2\pi) = f(0,2\pi) = 1.$

En conclusió: sobre el compacte D f té un mínim absolut al punt $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ i la funció val $f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = -2$ i dos punts de màxim absolut: $\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$, on la funció val $f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right) = 2$.

□

(52) Per a la funció $f(x,y) = x^2y + xy^2$ vegeu que $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu però que el mètode del hessià no permet caracteritzar-lo. A quina conclusió arribem si restringim els valors de (x,y) als de la recta $y=x$

$\underline{S}$.

$$f_x(x,y) = 2xy + y^2 = y(2x+y) = 0$$
$$f_y(x,y) = x^2 + 2xy = x(x+2y) = 0$$

Obviament $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \Longrightarrow (x_0,y_0) = (0,0)$ és un candidat a extrem.

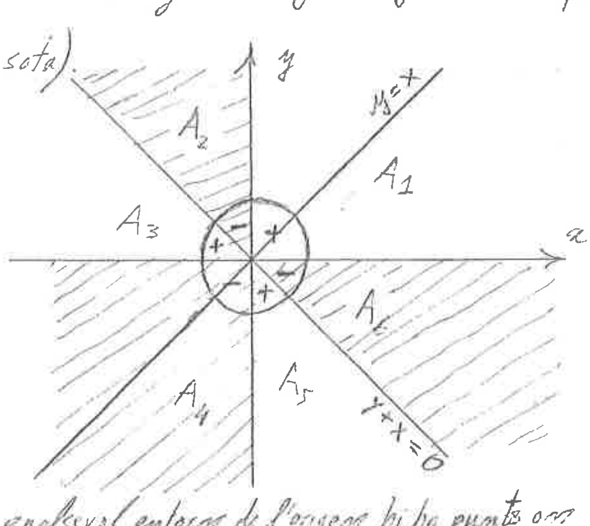
A més, veiem que $f(0,0) = 0$.

$$f_x(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x+2y,$$
$$f_{xx}(x,y) = 2x,$$

Però, en canvi: $f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 0$, i aleshores el mètode del hessià no permet caracteritzar el punt crític.

Si restringim f sobre la recta $y=x$: $g(x) := f(x,x) = 2x^3$ $(>0, \text{ si } x>0, <0, \text{ si } x<0)$, i com que $f(0,0)=0$, tenim que a qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on la funció pren valors més grans que $f(0,0)$ i punts on f pren valors més petits que $f(0,0)$ (en particular, els de les semirectes $y=x$ $(x>0)$ i $y=x$ $(x<0)$ respectivament). Aleshores $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxim ni de mínim de la funció.

Alternativament, podem escriure $f(x,y) = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$ i estudiar el signe de f a partir del signe de xy i $x+y$. És clar que s'arriba a la mateixa conclusió (Veure figura a sota).



En qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on $f > f(0,0) = 0$ i punts on $f < f(0,0) = 0$. (*)

	$x+y$	xy	f
A_1	+	+	+
A_2	+	−	−
A_3	−	−	+
A_4	−	+	−
A_5	−	−	+
A_6	+	−	−

$B_\delta(0,0)\setminus\{(0,0)\}\cap A_i \neq \emptyset$ $\forall\, i=1,2,3,4,5,6$ i qualsevol $\delta>0$.

53 Considerem la funció $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$.

(a) Si restringim els valors de (x,y) als d'una recta passant pel $(0,0)$, vegeu que l'origen és un mínim relatiu de la funció amb independència de la reta triada.

Considerem la família de rectes:

$y=mx$, $m\in\mathbb{R}$; i definim la restricció de f sobre les rectes d'aquesta família.

$$g_m(x):=f(x,mx)=(mx-x^2)(mx-3x^2)$$
$$= m x^2 - 3mx^3 - mx^3 + 3x^4$$
$$= 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2$$

d'on veiem que $g_m(x)$ té un mínim relatiu en $x=0$ per qualsevol $m\in\mathbb{R}$ (*)

Considerem la recta $x=0$ (no inclosa a la família $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$) i definim la corresponent restricció de f sobre aquesta recta:

$$v(y):=f(0,y)=y^2.$$

Clarament $v(y)$ té un mínim relatiu (de fet un mínim absolut), a $y=0$

Aleshores hem comprovat que la restricció de la funció f sobre qualsevol recta que passi per l'origen té un mínim relatiu a l'origen. $\square$

(b) Discutiu si el resultat de l'apartat (a) us permet concloure que $f(x,y)$, com a funció de dues variables té un mínim relatiu en el $(0,0)$.

No necessàriament. En aquest cas, de fet, $(x_0,y_0)=(0,0)$ no és un punt de màxim ni

---

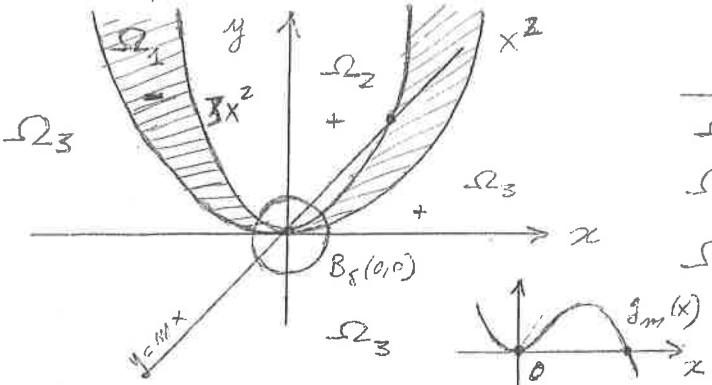
(*) Si $m\neq 0$: $g_m'(\,)=0$, $g_m''(0)=2m^2>0 \Longrightarrow x=0$ mín. rel. de $g_m(x)$

Si $m=0$: $g_0(x)=3x^4$ que també té una mín. rel. a $x=0$ (de fet un mínim absolut).

MIQUELRIUS

de mín relatiu de la funció f. Una manera de comprovar això és considerar els tres sub-dominis $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ següents (Veure figura).

$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 3x^2\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 3x^2\}$, $\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$



	$y-x^2$	$y-3x^2$	f
Ω_1	+	−	−
Ω_2	+	+	+
Ω_3	−	−	+

Clarament: $(B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}) \cap \Omega_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1,2,3$ i qualsevol $\delta > 0$.

Això implica que en qualsevol entorn del $(0,0)$ hi ha punts on $f > 0$ $(= f(0,0))$ i punts on $f < 0$ $(= f(0,0))$. Per tant $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxim ni de mínim relatiu $\square$

54) Considereu la funció $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$

(a) Demostreu que $(0,0)$ és l'únic extrem relatiu de f i classifiqueu-lo.

(b) Demostreu que f no té extrems absoluts (Indicació: Fixeu valors de x o de y de forma adequada i estudieu la funció d'1 variable resultant.

(a) $f_x(x,y) = 2x e^{-x^2} + \dfrac{e^x - 2x e^{-x^2}}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}} y^2 = 0$

$f_y(x,y) = -4y^3 + 4y\sqrt{e^x + e^{-x^2}} = -4y\left(y^2 - \sqrt{e^{x} + e^{-x^2}}\right) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}} \end{cases}$

Si agafem $y=0$ a la 2ª i substituim a la 1ª: $2xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

En canvi, si de la 2ª agafem $y^2 = \sqrt{e^{x} + e^{-x^2}}$ i substituim a la 1ª, arribem a

$2xe^{-x^2} + \dfrac{e^x - 2xe^{-x^2}}{\sqrt{e^{x} + e^{-x^2}}}\sqrt{e^x + e^{-x^2}} = \cancel{2xe^{-x^2}} + e^x - \cancel{2xe^{-x^2}} = e^x$,

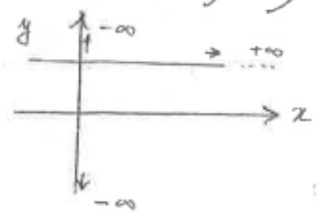
però e^x no s'anul·la per a cap valor de x. Llavors $(x_0,y_0) = (0,0)$ és l'únic punt critic de la funció. Per classificar-lo, calculem les derivades segones:

$$f_{xx}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(2x\, e^{-x^2}\right)\Big|_{x=0} = 2 \qquad f_{xy}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\right)\Big|_{y=0} = 0.$$

$$f_{yy}(0,0) = \frac{d}{dy}(\dots)\Big|_{y=0} = 4\sqrt{2}, \quad \therefore \ \mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

def > 0

Veiem que $f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 8\sqrt{2}$, amb $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Llavors $(x_0,y_0) = (0,0)$ correspon a un mínim relatiu de la funció, on val $f(0,0) = -1$.



(b) Considerem primer la restricció de f sobre la recta $y = 1$:

$$f(x,1) = -1 + e^{-x^2} + 2\sqrt{e^{x} + e^{x^2}} \longrightarrow +\infty, \text{ quan } x \to +\infty,$$

Llavors, f no està acotada superiorment i per tant no té màxim absolut.

A continuació, considerem la restricció de f sobre la recta $x = 0$.

$f(0,y) = -y^3 + 1 + 2\sqrt{2}\,y^2 \longrightarrow -\infty$ quan $y \to \pm\infty$, la qual cosa implica que f no està acotada inferiorment, per tant no pot tenir mínim absolut. $\square$

55. Una sargantana es mou sobre el semiplà $\{x \geq 3\}$ on la temperatura en cada punt ve donada per l'expressió

$$T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2}.$$

Suposem que la sargantana busca l'escalfor i es mou sempre en la direcció on la temperatura creix més ràpidament.

(a) Si en un instant donat la sargantana és al punt $(3,4)$, en quina direcció es mourà. Quin és l'increment de temperatura aproximat que experimentarà si es desplaça una petita quantitat h en aquesta direcció?

(b) Busqueu l'únic extrem relatiu de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$ i classifiqueu-lo.

(c) Busqueu i dibuixeu les corbes de nivell de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$.

(d) Usant el croquis de l'apartat anterior, expliqueu perquè l'extrem relatiu de l'apartat (b) és el màxim absolut de $T(x,y)$ al semiplà $\{x > 3\}$.

(e) Feu un dibuix esquemàtic de la trajectòria que seguirà la sargantana des del punt $(3,4)$ fins a aquest màxim absolut en la seva recerca de la màxima escalfor possible. (No us demanem que sigueu rigorosos amb la justificació del dibuix).

Solució:

(a) Calculem el gradient de la fucnció $T(x,y)$ al punt $(3,4)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x(x-3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(x-3)y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6y-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Per tant,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,4) = \frac{18-9+16}{25^2} = \frac{1}{25}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) = 0$$

i llavors

$$\nabla T(3,4) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,4), \frac{\partial T}{\partial y}(3,4)\right)^\top = \left(\frac{1}{25}, 0\right)^\top.$$

La sargantana es mourà inicialment en la direcció del vector $u^\top = (1,0)$. Si es desplaça una distància petita, h en aquesta direcció, l'increment de la temperatura serà, aproximadament

$$T(3+h,4) - T(3,4) \approx \nabla T(3,4) \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial T}{\partial x}(3,4) \cdot h + \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) \cdot 0 = \frac{h}{25}.$$

(b) Busquem els punts crítics de $T(x,y)$,

$$\nabla T(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 6x - x^2 + y^2 = 0 \\ 2y(x-3) = 0 : \begin{cases} x = 3, \text{ i substituint a la 1}^{\text{a}} \text{ equació: } 9 + y^2 = 0 \text{ (NO)} \\ y = 0, \text{ i substituint a la 1}^{\text{a}} \text{ equació: } x(6-x) = 0 : \begin{cases} x = 0 \text{ (NO)} \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

D'això es dedueix que la funció $T(x,y)$ té un únic punt crític a $(x_*, y_*) = (6,0)$, el qual està al semiplà $\{x > 3\}$. Per classificar-lo, trobem les derivades parcials segones en aquest punt,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(6,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{6}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right)\bigg|_{s=6} = \left(-\frac{18}{s^4} + \frac{2}{s^3}\right)\bigg|_{s=6} = -\frac{3}{6^3} + \frac{2}{6^3} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(6,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(0)\bigg|_{s=6} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(6,0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{-6s}{(36+s^2)^2}\right)\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}.$$

D'on resulta $T_{xx}(6,0)T_{yy}(6,0) - T_{xy}(6,0)^2 = 1/6^6 - 0^2 > 0$, amb $T_{xx}(6,0) < 0$. Per tant, en el punt $(6,0)$ la funció $T(x,y)$ té un màxim relatiu i pren el valor: $T(6,0) = 1/12$.

(c) Per a trobar les corbes de nivell busquem els punts del pla que satisfan $T(x,y) = \lambda$, amb $(x,y) \neq (0,0)$. Si suposem a més que $\lambda \neq 0$,

$$T(x,y) = \lambda \iff x - 3 = \lambda x^2 + \lambda y^2 \iff x^2 - 2\frac{x}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} + y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{3}{\lambda} \iff \left(x - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{1-12\lambda}{4\lambda^2}.$$

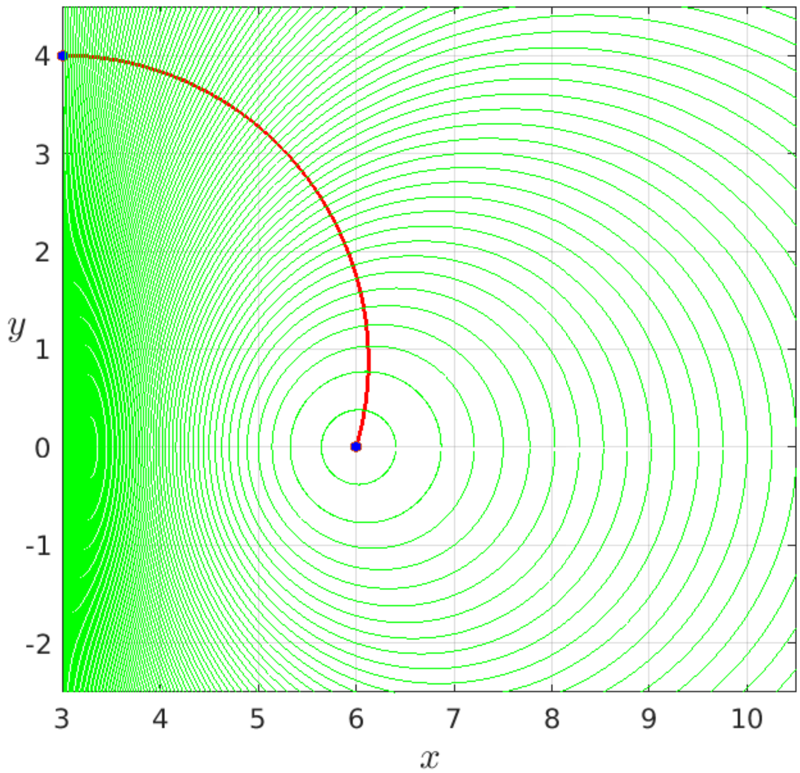


Figura 1: Corbes de nivell de la funció $T(x, y)$ al semiplà $\{x > 3\}$ (veure el text per a més detalls). També es dibuixa, en vermell, la trajectòria de la sargantana des del punt inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$ fins al punt crític $(x_*, y_*) = (6, 0)$.

Les corbes de nivell corresponen doncs, per a $\lambda \neq 0$, a circumferències amb centre i radi donats respectivament per,

$$(x_c(\lambda), y_c(\lambda)) = \left(\frac{1}{2\lambda}, 0\right), \qquad R(\lambda) = \sqrt{\frac{1-12\lambda}{4\lambda^2}}, \tag{1}$$

De la fórmula per al radi, $R(\lambda)$ es dedueix que cal, a més, $\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right)$. D'altra banda $T(3, y) = 0$, per a tota $y \in \mathbb{R}$. Resumint:

- Per a $\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right)$ les corbes de nivell corresponen a les circumferències $\left(x - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{1-12\lambda}{4\lambda^2}$.
- Per a $\lambda = 0$, la corba de nivell corresponent és la recta $x = 3$.

A la figura 1 es dibuixen les corbes de nivell $T(x, y) = \lambda$ al semiplà $\{x > 3\}$ per als nivells $\lambda = 10^{-3}i$, amb $i = 1, \ldots, 83$. Es comprova d'immediat que $R(\lambda)$ —vegeu (1)—és una funció monòtona decreixent per a $0 < \lambda < 1/12$. Així, a la figura, les circumferències amb λ més gran són les tenen radi més petit (les més "internes"). Quan $\lambda = 1/12 \approx 0.0833$, $R(1/12) = 0$ i la corba de nivell per a aquest valor es redueix al punt crític $(x_*, y_*) = (6, 0)$.

(d) De l'apartat (c) es dedueix que $T(x, y) \leq \frac{1}{12} = T(6, 0)$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Per tant $(x_*, y_*) = (6, 0)$ és (l'únic) punt on la funció assoleix el seu màxim absolut.

(e) La trajectòria de la sargantana (veure la figura 1) es caracteritza perquè, a cada punt, la seva tangent és perpendicular a la tangent a la corba de nivell (a la circumferència, en aquest cas) que talla la trajectòria pel mateix punt. $\square$

56) Una generalització de la funció de Cobb-Douglas al cas de tres variables és la següent:
$$U(x,y,z) = xy^2z^3, \quad x,y,z \geq 0,$$
on x,y,z verifiquen el lligam $3x+2y+z=1$ (i.e., els costos unitaris de x,y i z són 3, 2, i 1 respectivament i la suma de la inversió total que fem és la unitat).

(a) Useu el lligam entre (x,y,z) per expressar $U(x,y,z)$ en termes d'una nova funció $u(x,y)$.

(b) Dibuixeu el domini per a les variables (x,y) de $u(x,y)$. Quant val la funció $u(x,y)$ en la frontera d'aquest domini?

(c) Busqueu el màxim absolut de la funció $u(x,y)$ en el domini de l'apartat (b).

Solució

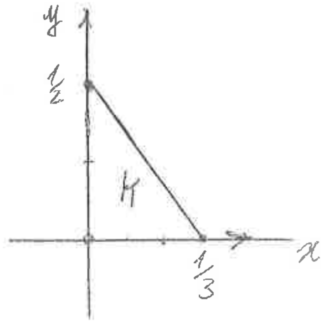
a) $U(x,y,z) = xy^2z^3$, $x,y,z \geq 0$

$3x+2y+z=1$

Per tant: $z = 1-3x-2y$, però cal que $z \geq 0$. Llavors, necessàriament $y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ i com que $y \geq 0$, i $x \geq 0$, necessàriament: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

$$u(x,y) = U(x,y,1-3x-2y) = xy^2(1-3x-2y)^3, \text{ amb } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{3},\ 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x$$

b) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{3},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\}$



Tenim que $u(x,y) = U(x,y,1-3x-2y) = 0 \ \forall (x,y) \in \partial K$.

c)
$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= y^2(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-3) \\ &= y^2(1-3x-2y)^2(1-3x-2y-9x) \\ &= y^2(1-3x-2y)^2(1-12x-2y) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y(x,y) &= 2xy(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-2) \\ &= 2xy(1-3x-2y)^2(1-3x-5y) = 0 \end{aligned}$$

Si busquem punts crítics a l'interior de K llavors $xy \neq 0$ i $1-3x-2y \neq 0$. Aleshores caldrà

$12x+2y=1$
$3x+5y=1$

solució: $x = \frac{1}{18}$, $y = \frac{1}{6}$

Comprovem si $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in \mathring{K}$. En efecte, ja que $\propto \frac{1}{18} < \frac{1}{3}$,

$$0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{18}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\left(3 - \frac{1}{2}\right)$$

D'altra banda:

$$u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6 3^4} = \frac{1}{5184} > 0 = u\Big|_{\partial K}$$

Per tant el màxim absolut sobre el compacte K s'atany a $\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in \mathring{K}$ i val $u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5184}$. $\square$