EXTREMS. Problemes 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57.

(51) Troben els candidats a extrems relatius de les funcions següents i classifiqueu-los.

(a) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

Proposició (extrems relatius, cas particular dimensió 2: $n=2$). Si $f(x,y)$ és una funció definida en un entorn de (x_0,y_0) on és de classe C^2 (i.e., totes les seves derivades parcials existeixen i són contínues en aquest entorn) i $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. Aleshores:

(i) Si $f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2>0$, f té un extrem relatiu (o extrem local) en (x_0,y_0). Aquest extrem relatiu és:

(i.1) Un mínim relatiu si $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ $(f_{yy}(x_0,y_0)>0)$.

(i.2) Un màxim relatiu si $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ $(f_{yy}(x_0,y_0)<0)$.

(ii) Si $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2<0$ no hi ha extrem en (x_0,y_0). De fet (x_0,y_0) és un punt de sella de la funció (els VAPs de $\mathrm{Hess} f(x_0,y_0)$ tenen signe diferent).

(iii) Si $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2=0$: pot haver o no un extrem de la funció a (x_0,y_0), però no es pot decidir a partir d'aquest criteri i es requereix un estudi complementari. □

(a) $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

$f_x(x,y)=4x^3-4y=0 \iff y=x^3$ i substituïm a la 2ª equació:

$f_y(x,y)=4y^3-4x=0 \iff x=y^3$: $x=x^9 \iff x(1-x^8)=0$. Sols: $x=0,\pm1$.

D'on tenim que els punts crítics són: $(x_0,y_0)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$.

- $(0,0)$: $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-4$: $f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=-16<0$: $(0,0)$ és un punt de sella.
- $(1,1)$: $f_{xx}(1,1)=12$, $f_{xy}(1,1)=-4$, $f_{yy}(1,1)=12$: $f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1)-f_{xy}(1,1)^2=$ $=144-16=128>0$ i $f_{xx}(1,1)=12>0$. Aleshores $(1,1)$ és un punt de mínim

relatiu de la funció, en aquesta val $f(1,1)=-1$.

- $(-1,-1)$: $f_{xx}(-1,-1)=12$, $f_{xy}(-1,-1)=-4$, $f_{yy}(-1,-1)=12$: $f_{xx}(-1,-1)\cdot f_{yy}(-1,-1)-f_{xy}(-1,-1)^2=128>0$. Alashores $(-1,-1)$ és un punt de mínim relatiu de la funció on val $f(-1,-1)=-1$. □

(b) $f(x,y)=x^2+xy+y^3-y^2-3x-2y+1$

$f_x(x,y)=2x+y-3=0 \iff y=3-2x$ i substituint a la 2ª equació:

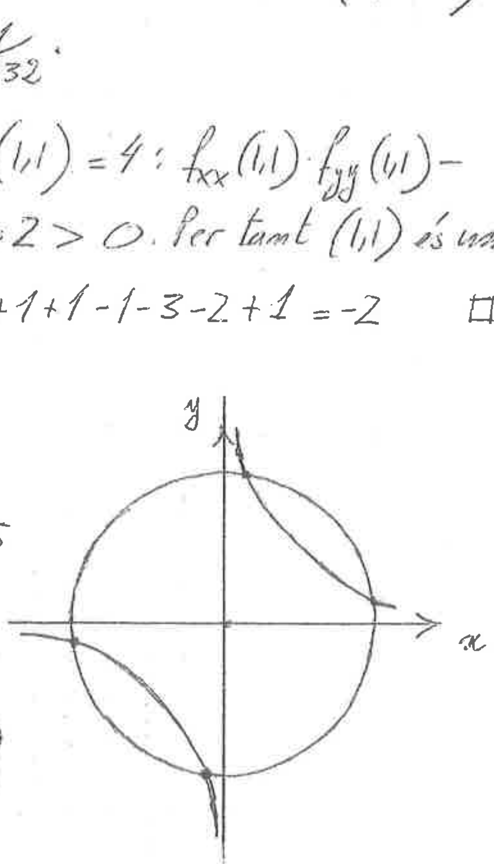
$f_y(x,y)=x+3y^2-2y-2=0$; $x+3(3-2x)^2-2(3-2x)-2=x+3(9-12x+4x^2)-6+4x-2=12x^2-31x+19=0$

$$x=\frac{31\pm\sqrt{31^2-4\cdot 12\cdot 19}}{24}=\frac{31\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{31\pm 7}{24}=\begin{cases}19/12\ ;\ y=3-19/6=-1/6.\\ 1\ ;\ y=3-2=1.\end{cases}$$

Tenim doncs els punts crítics: $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$ i $(1,1)$.

- $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$: $f_{xx}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=2$, $f_{xy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=1$, $f_{yy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=-3$; d'on: $f_{xx}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)-f_{xy}\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)^2=-7<0$. Per tant $\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)$ és un punt de sella de f i $f\left(\frac{19}{12},-\frac{1}{6}\right)=-\frac{521}{432}$.
- $(1,1)$: $f_{xx}(1,1)=2$, $f_{xy}(1,1)=1$, $f_{yy}(1,1)=4$: $f_{xx}(1,1)\cdot f_{yy}(1,1)-f_{xy}(1,1)^2=8-1=7>0$ i $f_{xx}(1,1)=2>0$. Per tant $(1,1)$ és un punt de mínim relatiu de f, i $f(1,1)=1+1+1-1-3-2+1=-2$ □

(c) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$



$f_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0$, d'on: $x^2+y^2=5$

$f_y(x,y)=6xy-12=0$, d'on: $xy=2$

$y=\frac{2}{x}$: $x^2+\frac{4}{x^2}=5 \iff x^4-5x^2+4=0$;

$$x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm 3}{2}}=\begin{cases}\pm 2: & (2,1),\ (-2,-1)\\ \pm 1: & (1,2),\ (-1,-2)\end{cases}$$

$$f_{xx}(x,y)=6x\,,\quad f_{xy}(x,y)=6y$$
$$f_{yy}(x,y)=6x$$

- $(2,1)$: $f_{xx}(2,1)=12$, $f_{xy}(2,1)=6$, $f_{yy}(2,1)=12$: $f_{xx}(2,1)\cdot f_{yy}(2,1)-f_{xy}(2,1)^2=$
  $=144-36=108>0$ amb $f_{xx}(2,1)=12>0$. Per tant $(2,1)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(2,1)=-28$
- $(-2,-1)$: $f_{xx}(-2,-1)=-12$, $f_{xy}(-2,-1)=-6$, $f_{yy}(-2,-1)=-12$: $f_{xx}(-2,-1)\,f_{yy}(-2,-1)-$
  $-f_{xy}(-2,-1)^2=144-36=108>0$ amb amb $f_{xx}(-2,-1)=-12<0$. Aleshores, $(-2,-1)$ és un punt de màxim relatiu de la funció, on val:
  $f(-2,-1)=28$.
- $(1,2)$: $f_{xx}(1,2)=6$, $f_{xy}(1,2)=12$, $f_{yy}(1,2)=6$: $f_{xx}(1,2)\cdot f_{yy}(1,2)-f_{xy}(1,2)^2=-108<0$
  Llavors $(1,2)$ és un punt de sella de la funció, on f val $f(1,2)=-26$.
- $(-1,-2)$: $f_{xx}(-1,-2)=-6$, $f_{xy}(-1,-2)=-12$, $f_{yy}(-1,-2)=-6$: $f_{xx}(-1,-2)\cdot f_{yy}(-1,-2)-f_{xy}(-1,-2)^2$
  $=-108<0$. Així $(-1,-2)$ correspon a un punt de sella de la funció, on f val $f(-1,-2)=26$ □

(d) $f(x,y)=8xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, si $x,y>0$

$$f_x(x,y)=8y-\frac{1}{x^2}=0 \iff y=\frac{1}{8x^2} \text{ i substituïm a la 2ª}$$
$$f_y(x,y)=8x-\frac{1}{y^2}=0\ :\ 8x-64x^4=8x(1-8x^3)=0 \begin{cases} x=0 \ (\text{No}) \\ x=1/2 \end{cases}$$

Llavors el punt crític és: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$f_{xx}(x,y)=2/x^3$, $f_{xy}(x,y)=8$, $f_{yy}(x,y)=2/y^3$

Aleshores: $f_{xx}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot f_{yy}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})-f_{xy}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2=16^2-64=256-64=192>0$ i com que $f_{xx}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=16>0$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=6$. □

(e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, si $x,y>0$

$f_x(x,y) = y - \frac{50}{x^2} = 0 \iff y = \frac{50}{x^2}$ i substituint a la 2ª:

$f_y(x,y) = x - \frac{20}{y^2} = x - \frac{20}{2500}x^4 = \frac{x}{125}(125-x^3) = 0$; $\begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=5. \end{cases}$

Tenim doncs que $(5,2)$ és un punt crític de f.

$f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3}$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3}$

$f_{xx}(5,2)\cdot f_{yy}(5,2) - f_{xy}(5,2)^2 = \frac{4}{5}\cdot 5 - 1 = 3 > 0$, amb $f_{xx}(5,2) = 4/5 > 0$, i per tant $(5,2)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f, on val $f(5,2) = 30$. □

(f) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$, si $(x,y)\neq(0,0)$.

$f_x(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = y\cdot\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$

$f_y(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = x\cdot\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0$

Agafant $y=0$ a la 1ª equació i substituint a la 2ª equació s'obté: $x\ln x^2 = 2x\ln|x| = 0$: $\begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=\pm 1. \text{ Punts crítics } (\pm1,0). \end{cases}$

Agafant, de la 1ª equació $\ln(x^2+y^2) = -\frac{2x^2}{x^2+y^2}$ i substituint a la 2ª, resulta:

$2x\,\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0$: $x=0$, i llavors: $\ln|y| = 0$, d'on $y=\pm1$ i aleshores $(0,\pm1)$ són punts crítics.

$y=\pm x$, i llavors $\ln(2x^2) = -1$, d'on $x = \pm 1/\sqrt{2e}$ i així tenim altres 4 punts crítics: $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2)-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)$.

$f_{xy}(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2$

$f_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2)-4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$.

Aleshores:

- $(\pm 1,0)$: $f_{xx}(\pm1,0)=0$, $f_{xy}(\pm1,0)=2$, $f_{yy}(\pm1,0)=0$

  $f_{xx}(\pm1,0)\cdot f_{yy}(\pm1,0)-f_{xy}(\pm1,0)^2=-4<0$. Aleshores $(\pm1,0)$ són punts de sella de la funció f, on pren el valor $f(\pm1,0)=0$

- $(0,\pm1)$: $f_{xx}(0,\pm1)=0$, $f_{xy}(\pm1,0)=2$, $f_{yy}(\pm1,0)=0$

  $f_{xx}(0,\pm1)\cdot f_{yy}(0,\pm1)-f_{xy}(0,\pm1)^2=-4<0$. Aleshores els punts $(0,\pm1)$ són punts de sella de la funció f, on pren el valor $f(0,\pm1)=0$.

- $\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right), \left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$: $f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=2$,

  $f_{xy}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xy}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=0$, $f_{yy}\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{yy}\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=2$.

  Aleshores:

  $$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=2\cdot2-0=4>0$$

  i com que $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=2>0$, llavors $\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)$ i $\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$ són punts de mínims relatiu de f, on la funció val:

  $$f\left(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f\left(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=-\frac{1}{2e}.$$

- $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$: $f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=-2$,

  $f_{xy}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{xy}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=0$; $f_{yy}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=f_{yy}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=-2$

  Aleshores:

  $$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)\cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2$$

  $$=f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)-f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2=4>0,$$

  amb $f_{xx}\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)=f_{xx}\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)=-2<0$. Per tant, els punts $\left(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}\right)$ i $\left(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}\right)$ són punts de màxim relatiu de la funció f, on aquesta funció val $f(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = f(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) = 1/2e$. □

(g) $f(x,y,z) = x^2/2 + xyz - z - y$

$$f_x(x,y,z) = x + yz = 0$$
$$f_y(x,y,z) = xz - 1 = 0 \quad \text{d'on } z = 1/x$$
$$f_z(x,y,z) = xy - 1 = 0 \quad \text{d'on } y = 1/x$$

i substituint a la 1ª equació $x + \frac{1}{x^2} = 0$ i llavors $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$; d'on tenim que $(-1,-1,-1)$ és un punt crític de la funció.

Criteri de Silvester-Jacobi
$A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^T = A$
A def + $\Leftrightarrow$ tots els seus menors són estrictament +
A def − $\Leftrightarrow$ ..

$$f_{xx}(x,y,z) = 1, \quad f_{xy}(x,y,z) = z, \quad f_{xz}(x,y,z) = y$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 0, \quad f_{yz}(x,y,z) = x$$
$$f_{zz}(x,y,z) = 0$$

Per tant:

$$\operatorname{Hess} f(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant el criteri de Sylvester: $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$

la matriu $\operatorname{Hess} f(-1,-1,-1)$ no és definida ni positiva ni negativa, amb $\det \operatorname{Hess} f(-1,-1,-1) < 0$ $(\neq 0)$. Llavors f té un punt de sella en $(-1,-1,-1)$ on val $f(-1,-1,-1) = 3/2$. □

(h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2x + y = 0 \\ f_y(x,y,z) &= 2y + x = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

$$f_z(x,y,z) = 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Aleshores la funció té l'origen $(0,0,0)$ com punt crític, i:

$$f_{xx}(x,y,z) = 2, \quad f_{xy}(x,y,z) = 1, \quad f_{xz}(x,y,z) = 0$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 2, \quad f_{yz}(x,y,z) = 0, \quad f_{zz}(x,y,z) = 2.$$

- $\operatorname{Hess} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aplicant el criteri de Sylvester: $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$

tenim que $\operatorname{Hess} f(0,0,0)$ és definida positiva; per tant $(0,0,0)$ és un punt de mínim relatiu de f on $f(0,0,0)=0$.

Remarca. Això es pot deduir d'immediat si expressem la funció com

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy = \left(x+\tfrac{1}{2}y\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 + z^2 \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \square$$

52) Troben els màxims i mínims absoluts (si existeixen) per a les següents funcions de dues variables definides en els dominis D que s'indiquen. Justifiquen la resposta en cada cas.

(a) $f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$, $D = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 2x\, e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 2x(1-x^2-2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

$$f_y(x,y) = 4y\, e^{-(x^2+y^2)} - 2y\,(x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 2y\,(2-x^2-2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

- De la 1ª equació: $x=0$ i substituint a la 2ª,

$$2y(2-2y^2)=0 \; ; \begin{cases} y=0, \text{ d'on } (0,0) \text{ és un p.c.} \\ y=\pm 1, \text{ d'on } (0,\pm 1) \text{ són p.c.} \end{cases}$$

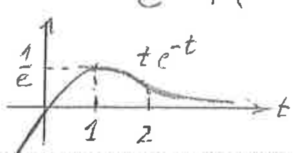
- De la 1ª equació, agafant: $x^2+2y^2=1$ i substituint a la 2ª: $2y=0 \Leftrightarrow y=0$ i llavors $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Això dóna altres dos punts crítics: $(\pm 1, 0)$.

Valor de f als punts crítics: $f(0,0)=0$, $f(\pm 1,0) = 1/e$, $f(0,\pm 1) = 2/e$.

D'altra banda tenim que, per tot $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(0,0) = 0 \leq f(x,y) = (x^2+2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$$
$$\leq 2(x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} \overset{(*)}{\leq} 2/e = f(0,\pm 1) \qquad (\&)$$

(*) Es comprova fàcilment que $te^{-t} \leq 1/e$:



Aleshores és clar que $(0,0)$ és un punt de mínim absolut de la funció, mentre que $(0,\pm 1)$ són punts de màxim absolut de f; i $f(0,0)=0$, $f(0,\pm1)=2/e$. $\square$

(b) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$, $D=\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y)=2x-1=0 \iff x=1/2$$
$$f_y(x,y)=2y-1=0 \iff y=1/2$$

Així $(x_0,y_0)=(1/2,1/2)$ és un punt crític de la funció f i, d'altra banda:

$$f_{xx}\left(\tfrac12,\tfrac12\right)\cdot f_{yy}\left(\tfrac12,\tfrac12\right)-f_{xy}\left(\tfrac12,\tfrac12\right)^2=2\cdot2-0=4>0, \text{ amb } f_{xx}\left(\tfrac12,\tfrac12\right)=2>0;$$

per tant el punt crític $(1/2,1/2)$ correspon a un mínim relatiu de f que, de fet es un mínim absolut, ja que:

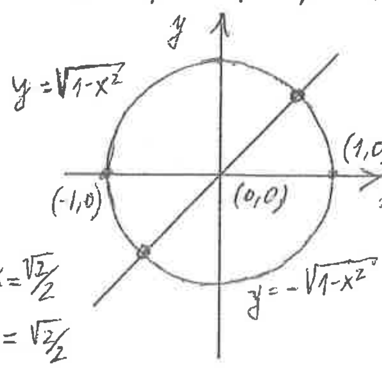
$$f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1=\left(x-\tfrac12\right)^2+\left(y-\tfrac12\right)^2+\tfrac12\geq\tfrac12=f\left(\tfrac12,\tfrac12\right)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

D'altra banda f és no acotada superiorment a $\mathbb{R}^2$, com es comprova d'immediat restringint f per ex. sobre la recta $y=0$, i.e. $f(x,0)=x^2-x+1\longrightarrow+\infty$ quan $x\to\pm\infty$. Llavors no té màxim absolut. $\square$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y+1$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq1\}=\overline{B}_1(0,0)$ (compacte!)

De l'apartat anterior tenim que f té un punt crític $(x_0,y_0)=\left(\tfrac12,\tfrac12\right)\in\overset{\circ}{D}$.

A continuació restringirem f sobre $\partial D=\partial D_+\cup\partial D_-\cup\{(1,0)\}\cup\{(-1,0)\}$ on $\partial D_\pm=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\pm\sqrt{1-x^2},\ -1<x<1\}$:



- $g_+(x)=f\big|_{\partial D_+}=f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=2-x-\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

$$g_+'(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ -1<x<1 \iff x=\sqrt{1-x^2}\iff x=\sqrt2/2$$
d'on $y=\sqrt2/2$

- $g_-(x)=f\big|_{\partial D_-}=f\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)=2-x+\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

$$g_-'(x)=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,\ -1<x<1\iff x=-\sqrt{1-x^2}\iff x=-\sqrt2/2$$
d'on $y=-\sqrt2/2$

Per últim, avaluem f sobre els candidats a extrem

$$f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2},\ f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-\sqrt{2},\ f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2},\ f(1,0)=1,$$

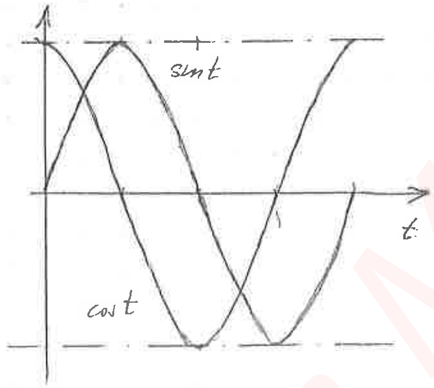
$f(-1,0)=3$ (notem que $2-\sqrt{2}=2-1'414\cdots=0'586>\frac{1}{2}=0'5$ i $2+\sqrt{2}=2+1'414=3'414\cdots>3$)

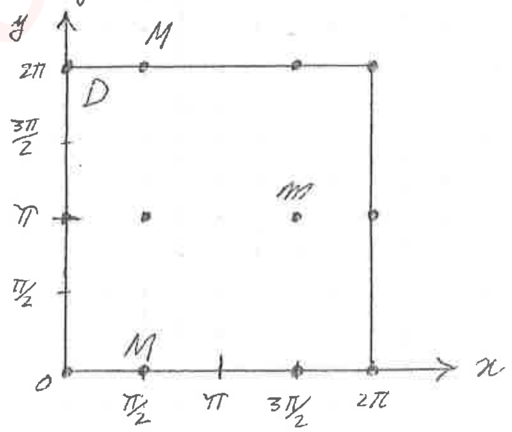
D'on es conclou que, sobre el compacte $D=B_1(0,0)$, f té un màxim absolut a $(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$, on val $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2}$ i un mínim absolut a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, on val $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. □

(d) $f(x,y)=\sin x+\cos y$ sobre el compacte $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi\}$

$f_x(x,y)=\cos x=0$, amb $0<x<2\pi \iff x=\pi/2,\ 3\pi/2$

$f_y(x,y)=-\sin y=0$, amb $0<y<2\pi \iff y=\pi$.





Així doncs, tenim 2 punts crítics a l'interior del compacte D: $(\frac{\pi}{2},\pi),(\frac{3\pi}{2},\pi)\in\mathring{D}$.

Es considera la descomposició de ∂D (frontera de D) següent:

$$\partial D=\partial D_1^-\cup\partial D_1^+\cup\partial D_2^-\cup\partial D_2^+\cup\{(0,0),(2\pi,0),(2\pi,2\pi),(0,2\pi)\},$$

on:

$\partial D_1^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<2\pi,\ y=0\}$, $\partial D_1^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<2\pi,\ y=2\pi\}$,

$\partial D_2^-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0,\ 0<y<2\pi\}$, $\partial D_2^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=2\pi,\ 0<y<2\pi\}$.

A continuació, busquem els punts crítics de les restriccions de f sobre $\partial D_1^\pm$, $\partial D_2^\pm$: $f|_{\partial D_1^\pm}$, $f|_{\partial D_2^\pm}$

- $f|_{\partial D_1^\pm}$: $u(x):=f(x,0)=f(x,2\pi)=\sin x+1$, $0<x<2\pi$, d'on

  $u'(x)=\cos x=0$ amb $0<x<2\pi \iff x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

Tenim doncs 4 punts crítics de $f\big|_{\partial D_1^- \cup \partial D_1^+}$: $\left\{ \left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \right\}$

- $f\big|_{\partial D_2^\pm}$: $V(y) := f(0,y) = f(2\pi,y) = \cos y$, $0<y<2\pi$, d'on

$$V'(y) = -\sin y = 0 \text{ amb } 0<y<2\pi \iff y=\pi.$$

Tenim així 2 punts crítics per $f\big|_{\partial D_2^- \cup \partial D_2^+}$: $\left\{ (0,\pi), (2\pi,\pi) \right\}$

Resumint: hem trobat com candidats a extrem (absolut) de f en el compacte D, els punts:

$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) \in \mathring{D}$,

$\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \in \partial D_1^- \cup \partial D_1^+$

$(0,\pi), (2\pi,\pi) \in \partial D_2^- \cup \partial D_2^+$

$(0,0), (2\pi,0), (2\pi,2\pi), (0,2\pi)$: "vèrtexs" de D.

Per decidir a quins d'aquests punts correspon el màxim i el mínim absolut, avaluem la funció:

$f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1-1 = 0$

$f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi = -1-1 = -2$; mín. abs. en $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1+1 = 2$ màx. abs. en $\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0 = -1+1 = 0$

$f(0,\pi) = f(2\pi,\pi) = \sin 0 + \cos\pi = -1$

$f(0,0) = f(2\pi,0) = f(2\pi,2\pi) = f(0,2\pi) = 1.$

En conclusió: sobre el compacte D f té un mínim absolut al punt $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ i la funció val $f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = -2$ i dos punts de màxim absolut: $\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$, on la funció val $f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right) = 2$. $\square$

53 Per a la funció $f(x,y) = x^2y + xy^2$ vegeu que $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu però que el mètode del hessià no permet caracteritzar-lo. A quina conclusió **arribem si restringim els valors de (x,y) als de la recta $y=x$?**

S.

$$f_x(x,y) = 2xy + y^2 = y(2x+y) = 0$$
$$f_y(x,y) = x^2 + 2xy = x(x+2y) = 0$$

Obviament $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \Rightarrow (x_0,y_0) = (0,0)$ és un candidat a extrem.

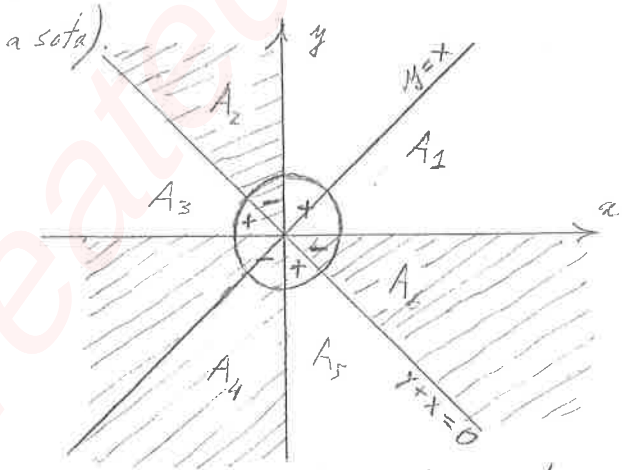
A més, veiem que $f(0,0) = 0$.

$$f_x(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x+2y,$$
$$f_{xx}(x,y) = 2x,$$

Però, en canvi: $f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 0$, i aleshores el mètode del hessià no permet caracteritzar el punt crític.

Si restringim f sobre la recta $y=x$: $g(x) := f(x,x) = 2x^3$ (>0, si $x>0$, <0, si $x<0$), i com que $f(0,0)=0$, tenim que a qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on la funció pren valors més grans que $f(0,0)$ i punts on f pren valors més petits que $f(0,0)$ (en particular, els de les semirectes $y=x$ $(x>0)$ i $y=x$ $(x<0)$ respectivament). Aleshores $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxim ni de mínim de la funció.

Alternativament, podem escriure $f(x,y) = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$ i estudiar el signe de f a partir del signe de xy i $x+y$. És clar que s'arriba a la mateixa conclusió (Veure figura a sota).



En qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on $f > f(0,0) = 0$ i punts on $f < f(0,0) = 0$ (*)

	$x+y$	xy	f
A_1	+	+	+
A_2	+	−	−
A_3	−	−	+
A_4	−	+	−
A_5	−	−	+
A_6	+	−	−

$(B_\delta(0,0)\setminus\{(0,0)\}) \cap A_i \neq \emptyset$
$\forall\, i = 1,2,3,4,5,6$
i qualsevol $\delta > 0$.

(54) Considerem la funció $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$.

(a) Si restringim els valors de (x,y) als d'una recta passant pel $(0,0)$, vegeu que l'origen és un mínim relatiu de la funció amb independència de la recta triada.

Considerem la família de rectes:

$y=mx$, $m\in\mathbb{R}$, i definim la restricció de f sobre les rectes d'aquesta família.

$$g_m(x):=f(x,mx)=(mx-x^2)(mx-3x^2)$$
$$=m^2x^2-3mx^3-mx^3+3x^4$$
$$=3x^4-4mx^3+m^2x^2$$

d'on veiem que $g_m(x)$ té un mínim relatiu en $x=0$ per qualsevol $m\in\mathbb{R}$ (*)

Considerem la recta $x=0$ (no inclosa a la família $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$) i definim la corresponent restricció de f sobre aquesta recta:

$v(y):=f(0,y)=y^2$.

Clarament $v(y)$ té un mínim relatiu (de fet un mínim absolut), a $y=0$

Aleshores hem comprovat que la restricció de la funció f sobre qualsevol recta que passi per l'origen té un mínim relatiu a l'origen. □

(b) Discutiu si el resultat de l'apartat (a) us permet concloure que $f(x,y)$, com a funció de dues variables té un mínim relatiu en el $(0,0)$.

No necessàriament. En aquest cas, de fet, $(x_0,y_0)=(0,0)$ no és un punt de màxim ni

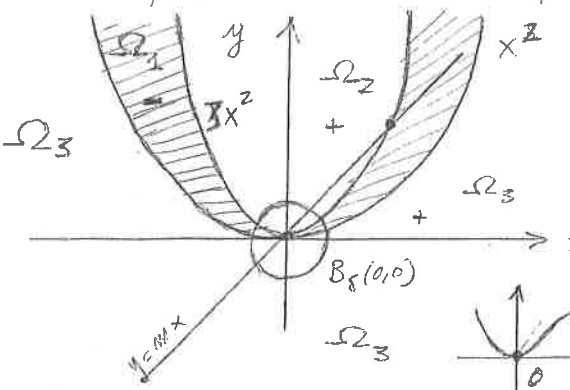
---

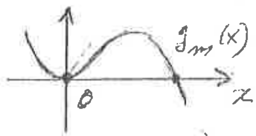
(*) Si $m\neq0$: $g_m'(\ )=0$, $g_m''(0)=2m^2>0 \Longrightarrow x=0$ mín. rel. de $g_m(x)$

Si $m=0$: $g_0(x)=3x^4$ que també té una mín. rel. a $x=0$ (de fet un mínim absolut).

de mín relatiu de la funció f. Una manera de comprovar això es considerar els tres sub-dominis $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ següents (Veure figura).

$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > x^2,\ y < 3x^2\}$, $\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > 3x^2\}$, $\Omega_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < x^2\}$





	$y-x^2$	$y-3x^2$	f
Ω_1	$+$	$-$	$-$
Ω_2	$+$	$+$	$+$
Ω_3	$-$	$-$	$+$

Clarament: $\left(B_\delta(0,0)\setminus\{(0,0)\}\right)\cap\Omega_i \neq \emptyset \quad \forall i=1,2,3$ i qualsevol $\delta>0$.
Això implica que en qualsevol entorn del $(0,0)$ hi ha punts on $f>0\ (=f(0,0))$ i punts on $f<0\ (=f(0,0))$. Per tant $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxim ni de mínim relatiu $\square$

55) Considereu la funció $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$

(a) Demostreu que $(0,0)$ és l'únic extrem relatiu de f i classifiqueu-lo.

(b) Demostreu que f no té extrems absoluts (Indicació: Fixeu valors de x o de y de forma adequada i estudieu la funció d'1 variable resultant.

(a) $f_x(x,y) = 2x\,e^{-x^2} + \dfrac{e^x - 2x\,e^{-x^2}}{\sqrt{e^x+e^{-x^2}}}\,y^2 = 0$

$f_y(x,y) = -4y^3 + 4y\sqrt{e^x+e^{-x^2}} = -4y\left(y^2 - \sqrt{e^{+x}+e^{-x^2}}\right) = 0 \quad \begin{cases} y=0 \\ y^2 = \sqrt{e^x+e^{-x^2}} \end{cases}$

Si agafem $y=0$ a la 2ª i substituim a la 1ª: $2x\,e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x=0$.

En canvi, si de la 2ª agafem $y^2 = \sqrt{e^x - e^{-x^2}}$ i substituim a la 1ª, arribem a

$2x\,e^{-x^2} + \dfrac{e^x - 2x\,e^{-x^2}}{\sqrt{e^{+x}+e^{-x^2}}}\sqrt{e^x+e^{-x^2}} = \cancel{2x\,e^{-x^2}} + e^x - \cancel{2x\,e^{-x^2}} = e^x$,

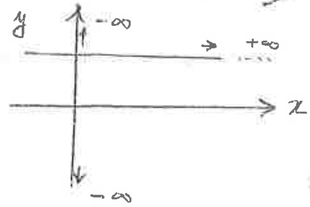
però e^x no s'anul·la per a cap valor de x. Llavors $(x_0,y_0)=(0,0)$ és l'únic punt crític de la funció. Per classificar-lo, calculem les derivades segones:

$$f_{xx}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(2x e^{-x^2}\right)\Big|_{x=0} = 2 \qquad f_{xy}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\right)\Big|_{y=0} = 0.$$

$$f_{yy}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(\dots\right)\Big|_{y=0} = 4\sqrt{2}, \quad \therefore \ \text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

def >0

Veiem que $f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 8\sqrt{2}$, amb $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Llavors $(x_0,y_0) = (0,0)$ correspon a un mínim relatiu de la funció, on val $f(0,0) = -1$.



(b) Considerem primer la restricció de f sobre la recta $y = 1$:

$$f(x,1) = -1 + e^{-x^2} + 2\sqrt{e^{x} + e^{-x^2}} \longrightarrow +\infty, \text{ quan } x \to +\infty,$$

Llavors, f no està acotada supeiorment i per tant no té màxim absolut.

A continuació, considerem la restricció de f sobre la recta $x = 0$.

$f(0,y) = -y^4 + 1 + 2\sqrt{2}\,y^2 \longrightarrow -\infty$ quan $y \to \pm\infty$, la qual cosa implica que

f no està acotada inferiorment, per tant no pot tenir mínim absolut. □

56. Una sargantana es mou sobre el semiplà $\{x \geq 3\}$ on la temperatura en cada punt ve donada per l'expressió

$$T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2}.$$

Suposem que la sargantana busca l'escalfor i es mou sempre en la direcció on la temperatura creix més ràpidament.

(a) Si en un instant donat la sargantana és al punt $(3,4)$, en quina direcció es mourà. Quin és l'increment de temperatura aproximat que experimentarà si es desplaça una petita quantitat h en aquesta direcció?

(b) Busqueu l'únic extrem relatiu de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$ i classifiqueu-lo.

(c) Busqueu i dibuixeu les corbes de nivell de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$.

(d) Usant el croquis de l'apartat anterior, expliqueu perquè l'extrem relatiu de l'apartat (b) és el màxim absolut de $T(x,y)$ al semiplà $\{x > 3\}$.

(e) Feu un dibuix esquemàtic de la trajectòria que seguirà la sargantana des del punt $(3,4)$ fins a aquest màxim absolut en la seva recerca de la màxima escalfor possible. (No us demanem que sigueu rigorosos amb la justificació del dibuix).

Solució:

(a) Calculem el gradient de la fucnció $T(x,y)$ al punt $(3,4)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x(x-3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(x-3)y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6y-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Per tant,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,4) = \frac{18-9+16}{25^2} = \frac{1}{25}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) = 0$$

i llavors

$$\nabla T(3,4) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,4), \frac{\partial T}{\partial y}(3,4)\right)^\top = \left(\frac{1}{25}, 0\right)^\top.$$

La sargantana es mourà inicialment en la direcció del vector $u^\top = (1,0)$. Si es desplaça una distància petita, h en aquesta direcció, l'increment de la temperatura serà, aproximadament

$$T(3+h,4) - T(3,4) \approx \nabla T(3,4) \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial T}{\partial x}(3,4) \cdot h + \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) \cdot 0 = \frac{h}{25}.$$

(b) Busquem els punts crítics de $T(x,y)$,

$$\nabla T(x,y) = 0 \iff \left\{ \begin{aligned} 6x - x^2 + y^2 &= 0 \\ 2y(x-3) &= 0 : \left\{ \begin{array}{l} x = 3, \text{ i substituint a la 1}^{\text{a}} \text{ equació: } 9 + y^2 = 0 \text{ (NO)} \\ y = 0, \text{ i substituint a la 1}^{\text{a}} \text{ equació: } x(6-x) = 0 : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ (NO)} \\ x = 6 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned} \right.$$

D'això es dedueix que la funció $T(x,y)$ té un únic punt crític a $(x_*, y_*) = (6,0)$, el qual està al semiplà $\{x > 3\}$. Per classificar-lo, trobem les derivades parcials segones en aquest punt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(6,0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{6}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right)\bigg|_{s=6} = \left(-\frac{18}{s^4} + \frac{2}{s^3}\right)\bigg|_{s=6} = -\frac{3}{6^3} + \frac{2}{6^3} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(6,0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(0)\bigg|_{s=6} = 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(6,0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{-6s}{(36+s^2)^2}\right)\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}. \end{aligned}$$

D'on resulta $T_{xx}(6,0)T_{yy}(6,0) - T_{xy}(6,0)^2 = 1/6^6 - 0^2 > 0$, amb $T_{xx}(6,0) < 0$. Per tant, en el punt $(6,0)$ la funció $T(x,y)$ té un màxim relatiu i pren el valor: $T(6,0) = 1/12$.

(c) Per a trobar les corbes de nivell busquem els punts del pla que satisfan $T(x,y) = \lambda$, amb $(x,y) \neq (0,0)$. Si suposem a més que $\lambda \neq 0$,

$$T(x,y) = \lambda \iff x - 3 = \lambda x^2 + \lambda y^2 \iff x^2 - 2\frac{x}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda^2} + y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{3}{\lambda} \iff \left(x - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{1-12\lambda}{4\lambda^2}.$$

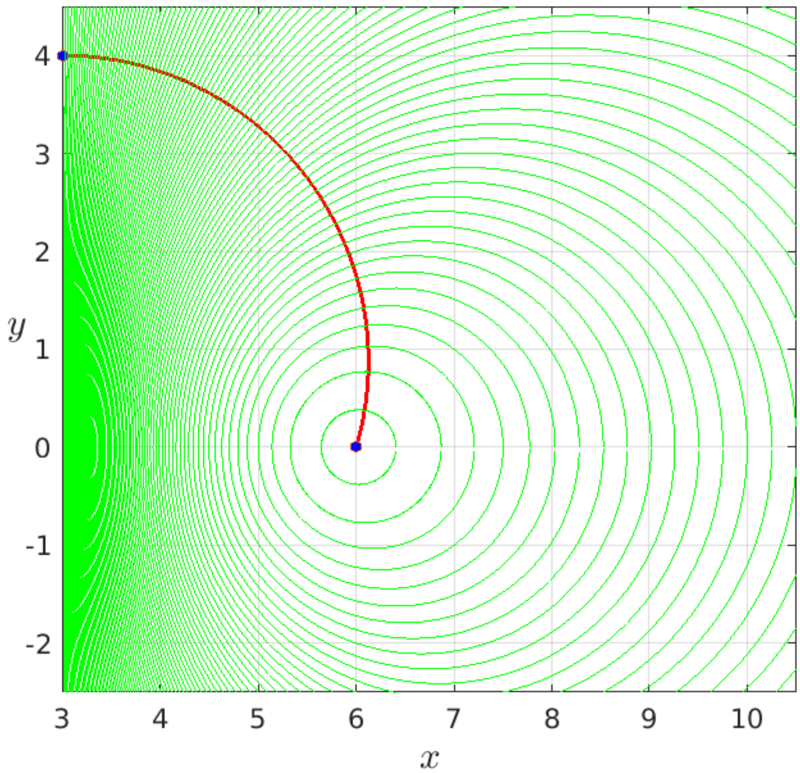


Figura 1: Corbes de nivell de la funció $T(x, y)$ al semiplà $\{x > 3\}$ (veure el text per a més detalls). També es dibuixa, en vermell, la trajectòria de la sargantana des del punt inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$ fins al punt crític $(x_*, y_*) = (6, 0)$.

Les corbes de nivell corresponen doncs, per a $\lambda \neq 0$, a circumferències amb centre i radi donats respectivament per,

$$(x_c(\lambda), y_c(\lambda)) = \left(\frac{1}{2\lambda}, 0\right), \qquad R(\lambda) = \sqrt{\frac{1 - 12\lambda}{4\lambda^2}}, \tag{1}$$

De la fórmula per al radi, $R(\lambda)$ es dedueix que cal, a més, $\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right)$. D'altra banda $T(3, y) = 0$, per a tota $y \in \mathbb{R}$. Resumint:

- Per a $\lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{12}\right)$ les corbes de nivell corresponen a les circumferències $\left(x - \frac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{1 - 12\lambda}{4\lambda^2}$.
- Per a $\lambda = 0$, la corba de nivell corresponent és la recta $x = 3$.

A la figura 1 es dibuixen les corbes de nivell $T(x, y) = \lambda$ al semiplà $\{x > 3\}$ per als nivells $\lambda = 10^{-3}i$, amb $i = 1, \ldots, 83$. Es comprova d'immediat que $R(\lambda)$ —vegeu (1)—és una funció monòtona decreixent per a $0 < \lambda < 1/12$. Així, a la figura, les circumferències amb λ més gran són les tenen radi més petit (les més "internes"). Quan $\lambda = 1/12 \approx 0.0833$, $R(1/12) = 0$ i la corba de nivell per a aquest valor es redueix al punt crític $(x_*, y_*) = (6, 0)$.

(d) De l'apartat (c) es dedueix que $T(x, y) \leq \frac{1}{12} = T(6, 0)$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Per tant $(x_*, y_*) = (6, 0)$ és (l'únic) punt on la funció assoleix el seu màxim absolut.

(e) La trajectòria de la sargantana (veure la figura 1) es caracteritza perquè, a cada punt, la seva tangent és perpendicular a la tangent a la corba de nivell (a la circumferència, en aquest cas) que talla la trajectòria pel mateix punt. $\square$

57) Una generalització de la funció de Cobb-Douglas al cas de tres variables és la següent:

$$U(x,y,z) = xy^2z^3, \quad x,y,z \geq 0,$$

on x,y,z verifiquen el lligam $3x+2y+z=1$ (i.e., els costos unitaris de x,y i z són 3, 2, i 1 respectivament i la suma de la inversió total que fem és la unitat).

(a) Useu el lligam entre (x,y,z) per expressar $U(x,y,z)$ en termes d'una nova funció $u(x,y)$.

(b) Dibuixeu el domini per a les variables (x,y) de $u(x,y)$. Quant val la funció $u(x,y)$ en la frontera d'aquest domini?

(c) Busqueu el màxim absolut de la funció $u(x,y)$ en el domini de l'apartat (b).

Solució

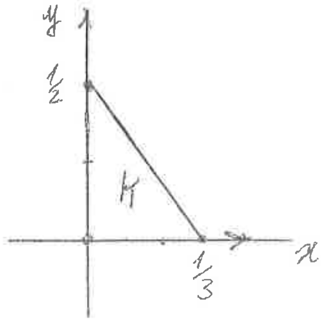
a) $U(x,y,z) = xy^2z^3$, $x,y,z \geq 0$

$3x+2y+z=1$

Per tant: $z = 1-3x-2y$, però cal que $z \geq 0$. Llavors, necessàriament $y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ i $x \geq 0$, i com que $y \geq 0$, necessàriament: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

$$u(x,y) = U(x,y,1-3x-2y) = xy^2(1-3x-2y)^3, \text{ amb } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{3},\ 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x$$

b) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{3},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\}$



Tenim que $u(x,y) = U(x,y,1-3x-2y) = 0 \ \forall (x,y) \in \partial K$.

c) $$u_x(x,y) = y^2(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-3)$$
$$= y^2(1-3x-2y)^2(1-3x-2y-9x)$$
$$= y^2(1-3x-2y)^2(1-12x-2y) = 0$$

$$u_y(x,y) = 2xy(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-2)$$
$$= 2xy(1-3x-2y)^2(1-3x-5y) = 0$$

Si busquem punts crítics a l'interior de K llavors $xy \neq 0$ i $1-3x-2y \neq 0$. Aleshores caldrà

$12x+2y=1$ solució: $x = \frac{1}{18}$

$3x+5y=1$ $y = 1/$

Comprovem si $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in \mathring{K}$. En efecte, ja que $0 < \frac{1}{18} < \frac{1}{3}$,

$$0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{18}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\left(3 - \frac{1}{2}\right).$$

D'altra banda:

$$u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6 3^4} = \frac{1}{5184} > 0 = u\big|_{\partial K}$$

Per tant el màxim absolut sobre el compacte K s'atany a $\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in \mathring{K}$ i val $u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5184}$.

□