

Teorema de la funció implícita. Problemes 48, 49 i 50

48) El sistema:

$$x + yv + e^{yu} + e^{xv} = 3$$

$$y - xv + e^{xu} + e^{yv} = 3$$

determinen dues funcions $u(x,y), v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$.
 Sigui ara $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Calculen $Dg(1,1), Dg^{-1}(0,0)$.

Solució: Definim $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donada per:

$$f_1(x,y,u,v) = x + yv + e^{yu} + e^{xv} - 3,$$

$$f_2(x,y,u,v) = y - xv + e^{xu} + e^{yv} - 3.$$

Temim que:

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$: les seves components són sumes de funcions elementals: polinomis i exponencials de polinomis.

$$\begin{aligned} 2) f(1,1,0,0) &= (f_1(1,1,0,0), f_2(1,1,0,0)) = (1+0+e^{1 \cdot 0} + e^{1 \cdot 0} - 3, 1-1 \cdot 0 + e^{1 \cdot 0} + e^{1 \cdot 0} - 3) \\ &= (1+1+1-3, 1+1+1-3) = (0,0) \end{aligned}$$

$$3) D_{u,v} f(1,1,0,0) \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ don: } \det D_{u,v} f(1,1,0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Aleshores, pel T.F. Implícita $\exists W \subseteq \mathbb{R}^2$, obert, amb $(1,1) \in W$ i una funció $g = (g_1, g_2) : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ (abusant notació escriurem $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$), t.e.

a) $g \in C^\infty(W)$

b) $g(1,1) = (u(1,1), v(1,1)) = (0,0)$

c) $f(x,y,g(x,y)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \\ f_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0, \text{ per } (x,y) \in W \end{cases}$

$$(1) \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) = y e^{yu} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) = y + e^{xv} x \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 1+1=2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) = x e^{xu} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) = -x + y e^{yv} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 0$$

De fet, en un cert obert $U \subseteq \mathbb{R}^4$, amb $(x,y,u,v) = (1,1,0,0)$ aquesta funció g si demanem que $(x,y, u(x,y), v(x,y)) \in U$, és a dir:

$$f(x,y,u,v) = 0, \text{ amb } (x,y,u,v) \in U \Leftrightarrow (u,v) = (u(x,y), v(x,y)), \text{ amb } (x,y) \in W.$$

D'altra banda, derivant a (c):

$$D_{xy} f(x,y, g(x,y)) + D_{uv} f(x,y, g(x,y)) \cdot Dg(x,y) = 0, \text{ amb } (x,y) \in W, \text{ d'on:}$$

$$Dg(x,y) = -D_{uv} f(x,y, g(x,y))^{-1} \cdot D_{xy} f(x,y, g(x,y)).$$

En $(x,y) = (1,1)$, tenint en compte que $u(1,1) = v(1,1) = 0$, l'equació de dalt resulta:

$$\begin{aligned} Dg(1,1) &= -D_{uv} f(1,1, g(1,1))^{-1} D_{xy} f(1,1, g(1,1)) \\ &= -D_{uv} f(1,1, 0, 0)^{-1} D_{xy} f(1,1, 0, 0) \stackrel{(a)}{=} -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com que, a més $\det Dg(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$, g és localment invertible en $(1,1)$ amb inversa local g^{-1} de classe C^∞ en un obert $V \subseteq \mathbb{R}^2$ amb $g(1,1) = (0,0) \in V$. A més $Dg^{-1}(0,0) = Dg(g^{-1}(0,0))^{-1} = Dg(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = -2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. \square

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0,0) &= 1 + ve^{xv} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0,0) = v + ue^{yu} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0,0) &= -v + ue^{xu} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0,0) = 1 + ve^{yv} \Big|_{(x,y,u,v)=(1,1,0,0)} = 1. \end{aligned}$$

49) Donat el sistema:

$$x \cos v + \pi = y + y \sin u$$

$$u \sin x = v \cos y$$

determinen dues funcions $x(u,v), y(u,v)$ que satisfan $x(\pi, 0) = 0, y(\pi, 0) = \pi$.
Signi ara $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ i $g(x,y) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calculen $D(g \circ h)(\pi, 0)$
i $D(g \circ h^{-1})(0, \pi)$.

Solució.

$$f(x,y,u,v) := (x \cos v - y - y \sin u + \pi, u \sin x - v \cos y)$$

$$f_1(x,y,u,v) := x \cos v - v \cos y$$

Tenim:

$$1) f(0, \pi, \pi, 0) = (0 \cdot \cos 0 + \pi - \pi \sin \pi, \pi \sin 0 - 0 \cdot \cos \pi) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(0, \pi, \pi, 0) = 0 \\ f_2(0, \pi, \pi, 0) = 0 \end{cases}$$

2) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$: pels criteris de generació: les components de f són sumes i productes de funcions elementals (sinus, cosinus, polinomis...)

$$3) D_{xy} f(0, \pi, \pi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, \pi, \pi, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, \pi, \pi, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, \pi, \pi, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, \pi, \pi, 0) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'on } \det D_{xy} f(0, \pi, \pi, 0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{vmatrix} = \pi \neq 0.$$

Aleshores, pel T.F. Implícita $\exists W \subseteq \mathbb{R}^2$ obert, amb $(\pi, 0) \in W$ i una funció $h := (h_1, h_2) : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Nota: moltes vegades, abusant la notació escriurem $h_1(u,v) = x(u,v)$ i $h_2(u,v) = y(u,v)$) t.q.:

$$a) h \in C^\infty(W), \quad b) h(\pi, 0) = (x(\pi, 0), y(\pi, 0)) = (0, \pi), \quad c) f(h(u,v), u, v) = 0,$$

per $(u,v) \in W$

$$(1) \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dx} (x - \pi + \pi) \Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dy} (-y + \pi) \Big|_{y=\pi} = -1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dx} (\pi \sin x) \Big|_{x=0} = \pi, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dy} (0) \Big|_{y=\pi} = 0.$$

De fet, en un obert $U \subseteq \mathbb{R}^2$, amb $(0, \pi, \pi, 0) \in U$, aquesta funció h és única si s'exigeix, a més, que $(h_1(u, v), h_2(u, v)) \in U$, i.e.:

$$f(x, y, u, v) = 0, \text{ amb } (x, y, u, v) \in U \Leftrightarrow x = x(u, v), y = y(u, v), \text{ amb } (u, v) \in W.$$

Per a calcular $Dh(\pi, 0)$, derivarem implícitament a (*) en $(u, v) = (\pi, 0)$, tenint en compte que $x(\pi, 0) = 0, y(\pi, 0) = \pi$:

$$x(u, v) \cos v - y(u, v) - y(u, v) \sin u + \pi = 0$$

$$u \sin(x(u, v)) - v \cos(y(u, v)) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial u}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \cdot \cos v - \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \sin u - y(u, v) \cos u \\ = \cos v \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) - (1 + \sin u) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) - \cos u \cdot y(u, v) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x(u, v)) + u \cos(x(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + v \sin(y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ = u \cos(x(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + v \cdot \sin(y(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) + \sin(x(u, v)) \right) = 0 \end{aligned}$$

en $(u, v) = (\pi, 0)$, $x(\pi, 0) = 0, y(\pi, 0) = \pi$:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(\pi, 0) - \frac{\partial y}{\partial u}(\pi, 0) + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial u}(\pi, 0) = \pi}$$

$$\pi \frac{\partial x}{\partial u}(\pi, 0) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial u}(\pi, 0) = 0}$$

$\frac{\partial}{\partial v}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \cos v - \sin v \cdot x(u, v) - \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \sin u \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ = \cos v \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) - (1 + \sin u) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \sin v \cdot x(u, v) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot \cos(x(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) - \cos(y(u, v)) + v \sin(y(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right. \\ \left. = u \cos(x(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + v \cdot \sin(y(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \cos(y(u, v)) \right) = 0 \right) \end{aligned}$$

en $(u,v) = (\pi, 0)$: $x(\pi, 0) = 0$, $y(\pi, 0) = \pi$:

$$\frac{\partial x}{\partial v}(\pi, 0) - \frac{\partial y}{\partial v}(\pi, 0) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial v}(\pi, 0) = \frac{\partial x}{\partial v}(\pi, 0) = -\frac{1}{\pi}}$$

$$\pi \frac{\partial x}{\partial v}(\pi, 0) + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial x}{\partial v}(\pi, 0) = -1/\pi}$$

Alors : $Dh(\pi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\pi, 0) & \frac{\partial x}{\partial v}(\pi, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\pi, 0) & \frac{\partial y}{\partial v}(\pi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix}$ (2)

Alternativement ; de $f(h(u,v), u, v) = 0$, $(u,v) \in W$, derivant :

$$D_{xy} f(h(u,v), u, v) \cdot Dh(u,v) + D_{uv} f(h(u,v), u, v) = 0, \text{ d'où :}$$

$$Dh(u,v) = -[D_{xy} f(h(u,v), u, v)]^{-1} \cdot D_{uv} f(h(u,v), u, v).$$

En $(u,v) = (\pi, 0)$:

$$\begin{aligned} Dh(\pi, 0) &= -[D_{xy} f(h(\pi, 0), \pi, 0)]^{-1} D_{uv} f(h(\pi, 0), \pi, 0) \\ &= -D_{xy} f(0, \pi, \pi, 0)^{-1} \cdot D_{uv} f(0, \pi, \pi, 0) \stackrel{(3)}{=} -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\pi^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(que coincideix amb (2)).

— Calcul de les derivades $D(g \circ h)(\pi, 0)$ i $D(g \circ h^{-1})(\pi, 0)$, ou $g(x,y) = \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$:

$$\begin{aligned} D(g \circ h)(\pi, 0) &= Dg(h(\pi, 0)) \cdot Dh(\pi, 0) = Dg(0, \pi) \cdot Dh(\pi, 0) \\ &\stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} +1/\pi^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(3) \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{du} (-\pi - \pi \sin u + \pi) \Big|_{u=\pi} = \pi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dv} (-\pi + \pi) \Big|_{v=0} = 0.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{du} (0) \Big|_{u=\pi} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v}(0, \pi, \pi, 0) = \frac{d}{dv} (v) \Big|_{v=0} = 1.$$

$$(4) \frac{\partial g}{\partial x}(0, \pi) = \frac{d}{dx} \left[\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \right] \Big|_{(x=0)} = \frac{x^2 + \pi^2 - 1x^2}{(x^2 + \pi^2)^2} \cos\left(\frac{x}{x^2 + \pi^2}\right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, \pi) = \frac{d}{dy} \left[\sin\left(\frac{0}{0^2 + y^2}\right) \right] \Big|_{y=\pi} = 0$$

$D(g \circ h^{-1})_{(0,\pi)}$: observem que $h^{-1} \in C^\infty(W)$, $W \subseteq \mathbb{R}^2$ obert amb $(\pi, 0) \in W$ i $\det Dh(\pi, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Llavors, pel teorema de la funció inversa, h és localment invertible en $(\pi, 0)$ amb inversa local de classe C^∞ , i.e. $\exists A \subseteq W$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ oberts, amb $(\pi, 0) \in A$, $h(\pi, 0) = (0, \pi) \in B$ t.q. $h|_A: A \rightarrow B$ és una bijecció i la corresponent inversa (local) $h^{-1}|_B: B \rightarrow A$ és $C^\infty(B)$. Moltes vegades aquesta restricció se sobreenten i escriurem h en comptes de $h|_A$ (i.d. per h^{-1} en comptes de $h^{-1}|_A$). Així tenim que $Dh^{-1}(u,v) = Dh(h^{-1}(u,v))^{-1}$ per $(u,v) \in B$ ($h \circ h^{-1} = \text{Id}_B$, i derivant: $Dh(h^{-1}(u,v)) \cdot Dh^{-1}(u,v) = \text{Id}_B \Rightarrow Dh^{-1}(u,v) = Dh(h^{-1}(u,v))^{-1}$, per $(u,v) \in B$).

En particular, en $(u,v) = (\pi, 0)$:

$$Dh^{-1}(0,\pi) = Dh(h^{-1}(0,\pi))^{-1} = Dh(\pi, 0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\pi \\ \pi & -1/\pi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\pi & 1/\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

Remarca: recordem que, per matrius 2×2 , $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, amb $ad - cb \neq 0$:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Llavors:

$$\begin{aligned} D(g \circ h^{-1})_{(0,\pi)} &= Dg(h^{-1}(0,\pi)) \cdot Dh^{-1}(0,\pi) = Dg(\pi, 0) \cdot Dh(h^{-1}(0,\pi))^{-1} = Dg(\pi, 0) \cdot Dh(\pi, 0)^{-1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \left(-\frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{1}{\pi}\right), 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} -1/\pi & 1/\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\pi^3} \cos\left(\frac{1}{\pi}\right), -\frac{1}{\pi^3} \cos\left(\frac{1}{\pi}\right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(\pi, 0) = \frac{d}{dx} \left[\sin\left(\frac{x}{x^2 + 0^2}\right) \right]_{x=\pi} = \frac{d}{dx} \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]_{x=\pi} = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_{x=\pi} = -\frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(\pi, 0) = \frac{d}{dy} \left[\sin\left(\frac{\pi}{\pi^2 + y^2}\right) \right]_{y=0} = -\frac{2\pi y}{(\pi^2 + y^2)^2} \cos\left(\frac{\pi}{\pi^2 + y^2}\right) \Big|_{y=0} = 0.$$

$$Dg(\pi, 0) = \left(-\frac{1}{\pi^2} \cos\left(\frac{1}{\pi}\right), 0 \right)$$

(*)

9. Sigui el sistema

$$\begin{cases} x^2y - \ln uv^2 = 0 \\ x^2u^2 - y^3 + xv = 2 \end{cases}$$

a) Proveu que defineix dues funcions implícites $u(x, y)$, $v(x, y)$ localment en el punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 0, 1, -1)$.

b) Sigui $g = (u, v)$ la funció de components les esmentades funcions implícites. Calculeu $dg_{(2,0)}$.

c) Proveu que en $(2, 0)$ la funció $g = (u, v)$ és localment invertible. Justifiqueu que

$$g^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

on $x(u, v)$, $y(u, v)$ són les altres funcions implícites definides pel sistema donat en el mateix punt.

d) Calculeu la diferencial de la funció inversa local de g en el punt $g(2, 0)$ mitjançant:

- d₁) teorema de la funció inversa
- d₂) teorema de la funció implícita

e) Trobeu $u_{xx}(2, 0)$, $v_{xx}(2, 0)$

Solució:

a) Considerem la funció

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

definida per

$$f(x, y, u, v) = (x^2y - \ln uv^2, x^2u^2 - y^3 + xv - 2),$$

on U és un obert de \mathbb{R}^4 . Òbviament $(2, 0, 1, -1) \in U$, i f és de classe C^∞ en U . Verifiquem les condicions del teorema de la funció implícita en el punt $(2, 0, 1, -1)$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(2, 0, 1, -1) = (0, 0) \\ 2) \quad & \det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \Big|_{(2,0,1,-1)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{uv^2}v^2 & -\frac{1}{uv^2}u2v \\ x^22u & x \end{vmatrix} \Big|_{(2,0,1,-1)} = \\ & = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0, \end{aligned}$$

(*) Tret de J. Clotet, J. Ferrer, M.I. García-Plamas :
 "Càlcul de n-Variables. Problemes Resolts". CPDA-ETSEIB,
 UPC. Gerner 1995 p 114-118.

per tant el sistema donat defineix funcions implícites $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ (de classe C^∞) localment en $(2, 0, 1, -1)$. En particular $u(2, 0) = 1$, $v(2, 0) = -1$.

b) Procedint com a l'exercici 7, apartat b), es verifica en un cert obert $V \subset \mathbb{R}^2$, amb $(2, 0) \in V$,

$$x^2 y - \ln u(x, y)(v(x, y))^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2(u(x, y))^2 - y^3 + xv(x, y) - 2 = 0 \quad (2)$$

Derivant les igualtats (1) i (2) respecte a x es té

$$y2x - \frac{1}{uv^2}(u_x v^2 + 2v v_x u) = 0 \quad (3)$$

$$2xu^2 + 2uu_x x^2 + v + v_x x = 0 \quad (4)$$

substituint ara en el punt $(2, 0)$ i tenint en compte que $u(2, 0) = 1$, $v(2, 0) = -1$, es té

$$\begin{cases} -(u_x(2, 0) - 2v_x(2, 0)) = 0 \\ 4 + 8u_x(2, 0) - 1 + 2v_x(2, 0) = 0 \end{cases}$$

d'on

$$u_x(2, 0) = -\frac{1}{3},$$

$$v_x(2, 0) = -\frac{1}{6}.$$

Anàlogament, derivant les igualtats (1) i (2) respecte a y es té

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{uv^2}(u_y v^2 + 2v v_y u) = 0 \\ x^2 2uu_y - 3y^2 + xv_y = 0 \end{cases}$$

substituint ara en el punt $(2, 0)$ es té

$$\begin{cases} 4 - (u_y(2, 0) - 2v_y(2, 0)) = 0 \\ 8u_y(2, 0) + 2v_y(2, 0) = 0 \end{cases}$$

d'on

$$u_y(2, 0) = \frac{4}{9},$$

$$v_y(2, 0) = -\frac{16}{9}.$$

Així doncs

$$dg_{(2,0)} = \begin{pmatrix} u_x(2,0) & u_y(2,0) \\ v_x(2,0) & v_y(2,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\det dg_{(2,0)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{16}{9} \end{vmatrix} = \frac{16}{3 \cdot 9} + \frac{4}{6 \cdot 9} = \frac{18}{27} \neq 0,$$

per tant la funció g és localment invertible en $(2,0)$.

Així doncs existeix la inversa local $g^{-1}(u,v)$, de classe C^∞ , en un entorn del punt $g(2,0) = (1,-1)$. A més el teorema de la funció implícita, en un entorn del punt $(2,0,1,-1)$, ens garanteix la existència i unicitat de la funció implícita

$$(x(u,v), y(u,v))$$

per tant

$$g^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

d₁) Segons el teorema de la funció inversa

$$d(g^{-1})_{g(a)} = (dg_a)^{-1}$$

i donat que $g(2,0) = (1,-1)$ tenim:

$$d(g^{-1})_{(1,-1)} = (dg_{(2,0)})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d₂) Procedint com a l'exercici 7, apartat b), es verifica en un cert obert $V \subset \mathbb{R}^2$, amb $(1,-1) \in V$,

$$(x(u,v))^2 y(u,v) - \ln uv^2 = 0 \quad (5)$$

$$(x(u,v))^2 u^2 - (y(u,v))^3 + x(u,v)v - 2 = 0 \quad (6)$$

Derivant les igualtats (5) i (6) respecte a u es té

$$\begin{cases} 2xx_u y + y_u x^2 - \frac{1}{uv^2} v^2 = 0 \\ 2xx_u u^2 + 2ux^2 - 3y^2 y_u + x_u v = 0 \end{cases}$$

substituint ara en el punt $(1, -1)$ i tenint en compte que $x(1, -1) = 2$, $y(1, -1) = 0$, es té

$$\begin{cases} 4y_u(1, -1) - 1 = 0 \\ 4x_u(1, -1) + 8 - x_u(1, -1) = 0 \end{cases}$$

d'on

$$\begin{aligned} x_u(1, -1) &= -\frac{8}{3}, \\ y_u(1, -1) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Anàlogament, derivant les igualtats (5) i (6) respecte a v es té

$$\begin{cases} 2xx_v y + y_v x^2 - \frac{1}{uv^2} u 2v = 0 \\ 2xx_v u^2 - 3y^2 y_v + x_v v + x = 0 \end{cases}$$

substituint ara en el punt $(1, -1)$ es té

$$\begin{cases} 4y_v(1, -1) + 2 = 0 \\ 4x_v(1, -1) - x_v(1, -1) + 2 = 0 \end{cases}$$

d'on

$$\begin{aligned} x_v(1, -1) &= -\frac{2}{3}, \\ y_v(1, -1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Així doncs

$$d(g^{-1})_{(1, -1)} = \begin{pmatrix} x_u(1, -1) & x_v(1, -1) \\ y_u(1, -1) & y_v(1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e) Derivant una altra vegada respecte a x les igualtats (3) i (4) es té

$$\begin{aligned} 2y - \left[-\frac{(u_x v^2 + 2v v_x u)}{u^2 v^4} (u_x v^2 + 2v v_x u) + \right. \\ \left. + (u_{xx} v^2 + 2v v_x u_x + (2(v_x)^2 + v_{xx} 2v)u + u_x 2v v_x) \frac{1}{uv^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$2u^2 + 2u u_x 2x + 2(u_x)^2 x^2 + 2u(u_{xx} x^2 + 2x u_x) + v_x + v_{xx} x + v_x = 0$$

substituint ara en el punt $(2, 0)$ i tenint en compte que $u(2, 0) = 1$, $v(2, 0) = -1$, $u_x(2, 0) = -\frac{1}{3}$, $v_x(2, 0) = -\frac{1}{6}$, es té

$$\begin{cases} -[0 + u_{xx}(2, 0) - 2\frac{1}{18} + 2\frac{1}{36} - 2v_{xx}(2, 0) - 2\frac{1}{18}] = 0 \\ 2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)4 + 2\frac{1}{9}4 + 2(4u_{xx}(2, 0) - 4\frac{1}{3}) - \frac{1}{6} + 2v_{xx}(2, 0) - \frac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

o sigui

$$\begin{cases} 6u_{xx}(2, 0) - 1 - 12v_{xx}(2, 0) = 0 \\ -25 + 72u_{xx}(2, 0) + 18v_{xx}(2, 0) = 0 \end{cases}$$

d'on

$$\begin{aligned} u_{xx}(2, 0) &= \frac{53}{162}, \\ v_{xx}(2, 0) &= \frac{39}{486}. \end{aligned}$$

10. Sigui $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Considereu l'equació

$$F(x^2 - y, y^2, x^2y) = 0.$$

a) Quines condicions ha de verificar la funció F perquè l'equació anterior defineixi, localment en $(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$, y com a funció implícita de x ?

b) Suposant que es verifiquen les condicions de l'apartat anterior, calculeu $y'(0)$, $y''(0)$.

Solució:

a) Apliquem el teorema de la funció implícita a la funció

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

definida per

$$f(x, y) = F(x^2 - y, y^2, x^2y).$$

Òbviament f és de classe C^2 en \mathbb{R}^2 . Verifiquem les condicions del teorema de la funció implícita en el punt $(0, a)$:

$$1) \quad f(0, a) = F(-a, a^2, 0) = 0$$

$$2) \quad \det \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0, a)} =$$