Exercici. El sistema:
$$x\,e^{u+v}+2uv=1$$
$$y\,e^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$
determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,2)=v(1,2)=0$. Calculeu $\partial_x u(1,2)$, $\partial_y v(1,2)$

S. (a) Apliquem el T. de la funció implícita al sistema
$$\begin{cases} f_1(x,y,u,v)=xe^{u+v}+2uv-1=0\\ f_2(x,y,u,v)=ye^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}-2x=0\end{cases}$$
en el punt $(x,y,u,v)=(1,2,0,0)$.

- La funció $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^4\setminus\{(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4: v\neq -1\}\to\mathbb{R}^2$ és C^∞ i $f(1,2,0,0)=(0,0)$
- $D_{u,v}f(1,2,0,0)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det D_{u,v}f(1,2,0,0)=-2-1=-3\neq 0.$

Pel T.F. Implícita

Per tant: $\exists\, U=\mathring{U}\subseteq\mathbb{R}^2$, amb $(1,2)\in U$,

$\exists\, V=\mathring{V}\subseteq\mathbb{R}^4\setminus\{(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4: v\neq -1\}$, amb $(1,2,0,0)\in V$

t.q. per a cada $(x,y)\in U$ $\exists!$ $g(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ amb $(x,y,g(x,y))=(x,y,u(x,y),v(x,y))\in V$

i $f(x,y,g(x,y))=f(x,y,u(x,y),v(x,y))=0$. A més:

- La funció $(x,y)\in U\to g(x,y)=(u(x,y),v(x,y))\in\mathbb{R}^2$ així definida és de classe C^∞
- $g(1,2)=(u(1,2),v(1,2))=(0,0)$
- $Dg(x,y)=-\left(D_{u,v}f(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\cdot D_{x,y}f(x,y,g(x,y))$

Em particular: $Dg(1,2) = -\left(D_{u,v}f(1,2,0,0)\right)^{-1}\cdot D_{x,y}f(1,2,0,0)$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = +\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3} \end{array} \quad (*)$$

Alternativament: Derivació Implícita!

$$x\,e^{u(x,y)+v(x,y)} + 2u(x,y)v(x,y) - 1 = 0 \;:\; (1)$$

$$y\,e^{u(x,y)-v(x,y)} - \frac{u(x,y)}{1+v(x,y)} - 2x = 0 \;:\; (2)$$

Tenint en compte que $u(1,2)=0$ i $v(1,2)=0$

Avaluem en $(x,y)=(1,2)$

$$\partial_x(1):\quad e^{u+v} + x(u_x+v_x)e^{u+v} + 2u_x v + 2u v_x = 0 \longrightarrow 1 + u_x(1,2) + v_x(1,2) + 0 \Leftrightarrow u_x(1,2)+v_x(1,2) = -1$$

$$\partial_x(2):\quad y(u_x - v_x)e^{u-v} - \frac{(1+v)u_x - u v_x}{(1+v)^2} - 2 = 0 \longrightarrow 2\left(u_x(1,2) - v_x(1,2)\right) - u_x(1,2) = 2 \Leftrightarrow u_x(1,2) - 2v_x(1,2) = 2 \quad (\&)$$

Resolent el sistema (&) s'obté: $u_x(1,2) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 0$, $v_x(1,2) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1$

Procedint de la mateixa manera però ara derivant (implícitament!) respecte de y (1) i (2) i avaluant després en $(x,y)=(1,2)$ s'obté: $u_y(1,2) = \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -\frac{1}{3}$ i $v_y(1,2) = \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}$. □

Altre exemple: Exercici 48 de la col·lecció.