52(d) Troben els màxims i mínims absoluts (si existeixen) de la funció

$$f(x,y) = \sin x + \cos y,$$

al compacte $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi\}$

S. Punts crítics: (en $\mathring{D}$)

$f_x = \cos x = 0$ amb $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$f_y = -\sin y = 0$ " $0 < y < 2\pi \Leftrightarrow y = \pi$

P.C. de f en $\mathring{D}$: $(\pi/2, \pi), (3\pi/2, \pi)$

$f_{xx} = -\sin x,\quad f_{xy} = 0$

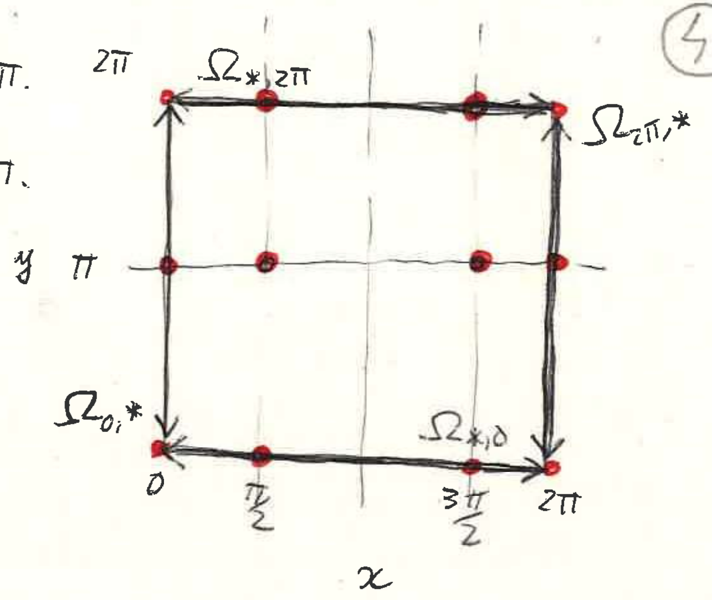
$f_{yx} = 0,\quad f_{yy} = -\cos y$

- $\text{Hess}\, f(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: def negativa $\Rightarrow (\pi/2, \pi)$ és un punt de MÀX. RELATIU estricte, on la funció val $f(\pi/2, \pi) = 0$
- $\text{Hess}\, f(3\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: def positiva $\Rightarrow (3\pi/2, \pi)$ és un punt de MIN. RELATIU estricte on la funció val $f(3\pi/2, \pi) = -2$

$\partial D = \Omega_{*,0} \cup \Omega_{*,2\pi} \cup \Omega_{0,*} \cup \Omega_{2\pi,*} \cup \{(0,0), (2\pi,0), (2\pi,2\pi), (0,2\pi)\}$

- $\Omega_{*,0} = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi\}$: $g_{*,0}(t) := f(t,0) = \sin t + 1,\ 0 < t < 2\pi$
- $\Omega_{*,2\pi} = \{(t,2\pi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi\}$: $g_{*,2\pi}(t) := f(t,2\pi) = \sin t + 1,\ 0 < t < 2\pi$

4



- $\Omega_{0,*} = \{(0,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<t<2\pi\}$: $g_{0,*}(t) = \cos t$, $0<t<2\pi$.
- $\Omega_{2\pi,*} = \{(2\pi,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<t<2\pi\}$: $g_{2\pi,*}(t) = \cos t$, $0<t<2\pi$.

Tenim que:

* $g'_{*,0}(t) = g'_{*,2\pi}(t) = \cos t = 0$ amb $0<t<2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

P.C.: $\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

* $g'_{0,*}(t) = g'_{2\pi,*}(t) = -\sin t = 0$ amb $0<t<2\pi \Leftrightarrow t = \pi$

P.C.: $(0,\pi)$; $(2\pi,\pi)$.

Candidats a extrems abs: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) \in \mathring{D}$

Vertexs!

$\left(\frac{\pi}{2},0\right), \left(\frac{3\pi}{2},0\right), \left(\frac{\pi}{2},2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right), (0,\pi), (2\pi,\pi), \overbrace{(0,0), (2\pi,0), (2\pi,2\pi), (0,2\pi)} \in \partial D$

Avaluem f sobre aquests punts:

$f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) = 1-1 = 0$

$f\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right) = -1-1 = -2$ ⟶ El MÍN. ABSOLUT sobre el compacte D s'assoleix al punt $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right) = 1+1 = 2$ ⟶ El MÀX. ABSOLUT " " " D " als punts: $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2},0\right) = f\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) = -1+1 = 0$

$f(0,\pi) = f(2\pi,\pi) = -1$

$f(0,0) = f(2\pi,0) = f(2\pi,2\pi) = f(0,2\pi) = 1$

Parcial Curs 2018-19/Q2 05/04/2019

Problema 4.

Parcial Curs 2016-17/Q1 02/11/2016 (5)

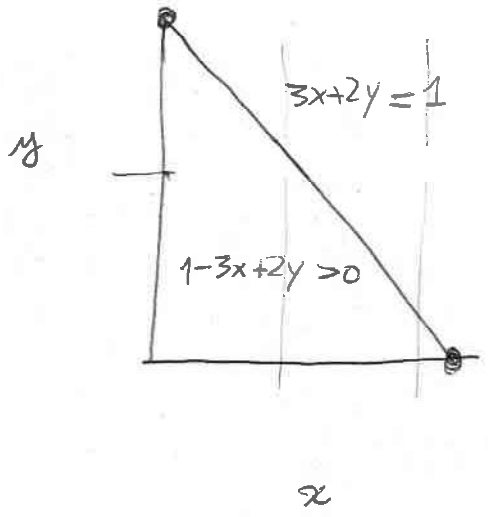
Problema 4 - Determineu quin punt del conjunt $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, 3x+2y\leq 1\}$ assoleix la funció $u(x,y) = xy^2(1-3x-2y)$ el seu valor màxim.

$\underline{S}$. $u\equiv 0$ sobre ∂K i $u>0$ en $\mathring{K}$. Llavors el seu màxim es trobarà a un punt crític de l'interior (ja que u és un polinomi i, per tant una funció de classe C^∞)

$$u_x = y^2-6xy-2y^3 = y^2(1-6x-2y) = 0$$
$$u_y = 2xy-6x^2y-6xy^2 = xy(2-6x-6y) = 0$$

Els punts crítics amb $x>0, y>0$ són doncs solució del sistema: $\left\{\begin{array}{l} 6x+2y=1 \\ 6x+6y=2 \end{array}\right\}$. És a dir:

$x = \frac{1}{12}$, $y=\frac{1}{4}$ i el punt $\left(\frac{1}{12},\frac{1}{4}\right)\in\mathring{K}$ $\left(3\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1\right)$



Per tant f té un màxim absolut sobre el compacte K al punt $\left(\frac{1}{12},\frac{1}{4}\right)$, on val $f\left(\frac{1}{12},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{768}$

Remarca. Òbviament també és un màxim relatiu. La Hessiana en el punt val:

$$\text{Hess}\, u\left(\tfrac{1}{12},\tfrac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

i aquesta matriu és definida negativa: $\det \text{Hess}\, u(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{32}>0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,2) = -\tfrac{3}{8}<0$.