

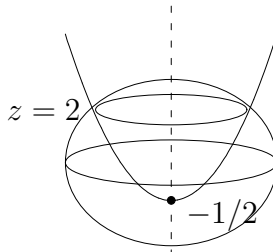
Continguts

27-01-00	3
19-06-00	5
03-11-00	7
29-01-01	8
05-04-01	10
14-06-01	12
29-01-02	14
10-04-02	16
10-06-02	17
29-10-02	19
13-01-03	21
11-04-03	23
30-06-03	25
29-10-03	27
09-01-04	30
01-04-04	33
28-06-04	35

Examen 27-01-00

1. Calculeu el volum del cos definit per les desigualtats $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{9} \leq 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 2z + 1$, $0 \leq z$.

Resolució: Fem la intersecció de l'el·lipsoide i del paraboloid



$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = \frac{2z + 1}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 + 2z + 1 = 9 \rightarrow z = 2 \ (z \geq 0) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z + 1 \end{cases}$$

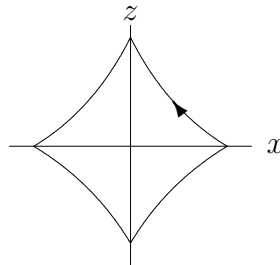
La corba intersecció és $\begin{cases} z=2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 5 \end{cases}$. La zona demanada estarà formada per la unió de

$$W_1 = \left\{ 0 \leq z \leq 2, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 2z + 1 \right\}, \quad W_2 = \left\{ 2 \leq z \leq 3, \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} \leq 1 - \frac{z^2}{9} \right\}$$

$$\text{vol}(W_1) \stackrel{\square}{=} \int_0^2 dz \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{2z+1}} 6r dr = 36\pi, \quad \text{vol}(W_2) \stackrel{\square}{=} \int_2^3 dz \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}} 54r dr = 16\pi$$

vol = 52π

2. (a) Calculeu la circulació del camp vectorial $F = (yze^{xy} + y, xze^{xy} + x, e^{xy})$, al llarg de la trajectòria $\sigma(t) = (\cos(2\pi t) - 1, \sin^2(2\pi t), t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (b) Utilitzeu el teorema de Stokes per a provar que la circulació del camp vectorial $G = \left(-\frac{z}{x^2 + z^2}, 0, \frac{x}{x^2 + z^2}\right)$, al llarg de la trajectòria tancada definida per $y = 0$ i $x^{2/3} + z^{2/3} = 1$, recorreguda segons mostra la figura, és igual a la circulació al llarg d'una circumferència en el mateix pla que envolti l'origen i calculeu aquesta circulació



Resolució:

- (a) Comprovem que és un camp gradient ja que $\text{rot}F = 0$ i no té singularitats. Calculem la seva funció tencial

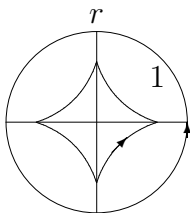
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy} \rightarrow f = ze^{xy} + g(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xy} + x \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = x \rightarrow g(x, y) = xy + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xy} + y \rightarrow h'(x) = 0 \rightarrow f(x, y, z) = ze^{xy} + xy + k$$

prenem $k = 0$: $\int_{\sigma} \langle F, dl \rangle = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = 1$.

- (b) Comprovem que $\text{rot } G = 0$ però no és un camp conservatiu perquè el seu domini té singularitats, concretament no és definit a $\{x = z = 0\}$.



Aplicant Stokes a la superfície D tancada per la corba demanada i la circumferència de radi $r > 1$ tindrem: $\int_{\sigma} \langle G, dl \rangle - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_D \underbrace{\langle \text{rot } G, dS \rangle}_{=0} = 0$;

per tant $\boxed{\int_{\sigma} \langle G, dl \rangle = 2\pi}$.

3. Sigui W el cos donat per les desigualtats $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ i sigui F el camp vectorial $F(xy + yz, xz + xy, yz + xz)$.

a) Calculeu la integral $\int_W \text{div } F \, dx dy dz$.

b) Sigui S el tros de la superfície que envolta W definit per $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, orientada pel vector normal exterior. Calculeu el flux de F per S .

Resolució:

(a) $\text{div } F = 2(x + y)$; $W = \left\{ -1 \leq x \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq 1 - \frac{x^2}{4} \right\}$

$$\int_W \text{div } F dV = \int_W (2x + 2y) dx dy dz \underset{\text{per simetria}}{=} \boxed{0}.$$

(b) S és la superfície lateral, com el camp és C^∞ arreu, podem aplicar el Teorema de la divergència $0 = \int_W \text{div } F dV = \int_S \langle F, dS \rangle + \int_T \langle F, \vec{i} \rangle dS + \int_{T_0} \langle F, -\vec{i} \rangle dS$,

sent $T = \left\{ x = 1; \quad y^2 + z^2 + \frac{x^2}{4} \leq 1 \right\} = \left\{ x = 1; \quad y^2 + z^2 \leq \frac{3}{4} \right\}$ i

$T_0 = \left\{ x = -1; \quad y^2 + z^2 + \frac{x^2}{4} \leq 1 \right\} = \left\{ x = -1; \quad y^2 + z^2 \leq \frac{3}{4} \right\}$. Llavors

$$\int_S \langle F, dS \rangle = \int_T -(y+yz) dy dz + \int_{T_0} (-y+yz) dy dz = \int_{y^2+z^2 \leq (3/4)} -2y dy dz \underset{\text{per simetria}}{=} \boxed{0}.$$

Examen 19-06-00

1. Sigui V el sòlid donat per $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; $x^2 + y^2 \geq R_0^2$, on $0 < R_0 < R$, i sigui $S = \partial V$ la superfície que l'envolta.

- (a) Calculeu l'àrea de S .
 (b) Calculeu el volum de V .
 (c) Calculeu el moment d'inèrcia de V respecte l'eix OZ .

Resolució:

- (a) Àrea de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = R_0^2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} z = \pm \sqrt{R^2 - R_0^2} \\ x^2 + y^2 = R_0^2 \end{array} \right.$$

El cilindre interior S_1 té àrea $A(S_1) = 4\pi R_0 \sqrt{R^2 - R_0^2}$. El que treiem de la superfície de l'esfera és (multiplicat per 2):

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leq R_0^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z_x = -\frac{x}{z} \quad z_y = -\frac{y}{z} \\ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{array}$$

La seva àrea:

$$\int_{x^2+y^2 \leq R_0^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2\pi R \int_0^{R_0} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 2\pi R(R - \sqrt{R^2 - R_0^2})$$

El tros d'esfera exterior S_2 té àrea:

$$A(S_2) = 4\pi R^2 - [4\pi R(R - \sqrt{R^2 - R_0^2})] = 4\pi R\sqrt{R^2 - R_0^2};$$

per tant, $A(s) = 4\pi(R + R_0)\sqrt{R^2 - R_0^2}$.

fig_2-23d.pdf

- (b) Calculem el volum del que traiem:

$$2 \int_{x^2+y^2 \leq R_0^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4\pi \int_0^{R_0} r \sqrt{R^2 - r^2} dr = \frac{4\pi}{3} [R^3 - (R^2 - R_0^2)^{3/2}].$$

El volum demanat és $\frac{4\pi}{3}(R^2 - R_0^2)^{3/2}$.

- (c)

$$\begin{aligned} & 2 \int_{R_0^2 \leq (x^2+y^2) \leq R^2} (x^2 + y^2) \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4\pi \int_{R_0}^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr \stackrel{u=\sqrt{R^2-r^2}}{=} \\ & = \int_{\sqrt{R^2-R_0^2}}^R 4\pi(R^2 - u^2)u^2 du = 4\pi \left[\frac{R^2(R^2 - R_0^2)^{3/2}}{3} - \frac{(R^2 - R_0^2)^{5/2}}{5} \right] = \\ & = \frac{4\pi}{15} (R^2 - R_0^2)^{3/2} (2R^2 + 3R_0^2). \end{aligned}$$

2. Sigui V el volum donat per $x^2 + 4y^2 - z^2 \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$, i F el camp vectorial $F = (xyz, yx^2, z)$.

(a) Calculeu $A = \int_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$.

- (b) Useu l'apartat anterior per a calcular el flux de F a través de la superfície $S : \{x^2 + 4y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ orientada per $N \simeq (-x, -4y, z)$.

- (c) Calculeu la circulació de F sobre la corba

$$C' \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x^2 + 4y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

orientada segons l'orientació induïda pel pla $x - 2z = 0$ amb vector normal $(1, 0, -2)$.

Resolució:

(a) $\operatorname{div} F = yz + x^2 + 1$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 dz \int_{x^2+4y^2 \leq 1+z^2} (yz + x^2 + 1) \, dx \, dy = \int_0^1 dz \int_{x^2+4y^2 \leq 1+z^2} dx \, dy \stackrel{u=\sqrt{R^2-r}}{=} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \frac{r}{2} dr \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + 1) d\theta = \frac{9\pi}{10}. \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} A &\stackrel{(*)}{=} - \int_S \langle F, dS \rangle + \int_{\left\{ \begin{smallmatrix} z=1 \\ x^2+4y^2 \leq 2 \end{smallmatrix} \right\}} dS = - \int_S \langle F, dS \rangle + \pi \\ &\int_S \langle F, dS \rangle = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

(*) Observació: sobre $z = 0$, $x^2 + 4y^2 \leq 1$, la tercera component de F és 0.

(c) $\operatorname{rot} F = (0, xy, 2xy - xz)$

$$\begin{aligned} \int_C \langle F, dl \rangle &= \int_{\left\{ \begin{smallmatrix} 4y^2+3z^2 \leq 1 \\ x=2z \end{smallmatrix} \right\}} \langle \operatorname{rot} F, dS \rangle = \int_{4y^2+3z^2 \leq 1} \langle \operatorname{rot} F, (1, 0, -2) \rangle \, dy \, dz = \\ &= \int_{4y^2+3z^2 \leq 1} 4z^2 \, dy \, dz = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

3. Calculeu el centre de massa de la regió definida per $y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$; $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 1$.

Resolució: En coordenades cilíndriques $\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ x = x \end{cases}$ el recinte queda $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$,

$$1 \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}$$

$$V = \text{Volum} = 2\pi \int_0^{1/2} r \, dr \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} dx = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$X_G V = 2\pi \int_0^{1/2} r \, dr \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} x \, dx = \pi \int_0^{1/2} (r - r^3 - 2r\sqrt{1-r^2}) \, dr = \pi \int_0^{1/2} (r - r^3) \, dr + V = \frac{7\pi}{64} + V$$

$$X_G = 1 + \frac{7/64}{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)}.$$

Per simetria $\boxed{Y_G = Z_G = 0}$.

Examen 03-11-00

- Canviant l'ordre d'integració $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$ es converteix en
 - $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$. *
 - $\int_0^1 \int_{y^2}^1 f(x, y) dx dy$.
 - $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx dy$.
 - $\int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$.
 - Cap de les anteriors.
- Una superfície que envolta l'origen ve donada en coordenades esfèriques per la funció $r = f(\theta, \varphi)$. El volum tancat per aquesta superfície és:
 - $\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta, \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi d\theta$. *
 - $\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta, \varphi)^3 \cos^3 \varphi d\varphi d\theta$.
 - $\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta, \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi d\theta$.
 - $\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta, \varphi)^2 \cos^2 \varphi d\varphi d\theta$.
 - Cap de les anteriors.
- La integral de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el recinte $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ és:
 - $2\pi b^4 - a^4$.
 - $\pi(b^4 - a^4)$. *
 - $2\pi b^4 - \pi a^4$.
 - $\frac{b^4 - a^4}{2} \pi$.
 - Cap de les anteriors
- Calculeu l'àrea encerclada per la corba $r = 2 + \sin \theta$.
 - $\pi/2$.
 - $5\pi/2$.
 - $7\pi/2$.
 - $9\pi/2$. *
 - Cap de les anteriors.
- El volum tancat per $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = 1 - x^2 - y^2$ i $z = 2$, a la regió $z \geq 0$, és:
 - 4π .
 - $25\pi/6$. *
 - $23\pi/6$.
 - $2\pi/3$.
 - Cap de les anteriors.
- L'àrea de la regió $|\sin 2\theta| \geq r \geq \frac{1}{2} \sin 2\theta$ és:
 - $7\pi/16$. *
 - 3.
 - $9\pi/16$.
 - 4.
 - Cap de les anteriors.
- Calculeu el volum del sòlid limitat per $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ i $z \geq 0$.
 - 0.
 - $R^4/4$.
 - $R^4/2$. *
 - $R^3/32$.
 - Cap de les anteriors.
- El moment d'inèrcia del con $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq a$, amb densitat constant 1, respecte l'eix z és:
 - a^2 .
 - $(2/7)a^5$.
 - $a^3/5$.
 - $\frac{\pi a^5}{10}$. *
 - Cap de les anteriors.

Examen 29-01-01

1. Trobeu el volum del sòlid de \mathbb{R}^3 definit per les equacions

$$y^2 - x \leq 4, \quad x + y^2 \leq 4, \quad z^2 - y \leq 4, \quad z \leq 1.$$

Resolució:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 - x \leq 4 \\ x + y^2 \leq 4 \\ z^2 - y \leq 4 \\ z \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 2 \\ y^2 - 4 \leq x \leq 4 - y^2 \\ -\sqrt{y+4} \leq z \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_{-2}^2 dy \int_{y^2-4}^{4-y^2} (1 + \sqrt{y+4}) dx = \int_{-2}^2 2(1 + \sqrt{y+4})(4 - y^2) dy \stackrel{t=\sqrt{y+4}}{=} \\ &= 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} (1+t)(-t^4 + 8t^2 - 32) 2t dt = \dots \end{aligned}$$

2. Calculeu el flux del camp vectorial $F(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2))$ a través de la vora (orientada per la normal exterior) dels sòlids:

(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 4, (x-1)^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Resolució:

(a) $\text{div } F = x^2 + y^2$

$$\int_{\partial V} \langle F, dS \rangle = \int_V \text{div } F dV = \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

(b)

$$\int_{\partial W} \langle F, dS \rangle = \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz - \int_U (x^2 + y^2) dx dy dz$$

sent $U = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$$\int_U (x^2 + y^2) dx dy dz \stackrel{\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}}{=} 2\pi \int_0^1 (r + r^3) dr = \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_{\partial W} \langle F, dS \rangle = 8\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}.$$

3. Sigui S la superfície amb vora definida per

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad -2 \leq z \leq \frac{x}{3}.$$

orientant pel camp vectorial normal

$$N = \frac{1}{3}(x, y, z).$$

(a) Calculeu l'àrea de S .

(Indicació: observeu que el pla $z = \frac{x}{3}$ talla l'esfera en dues semiesferes.)

(b) Calculeu el flux per S del camp vectorial

$$F = (x^2, -2xy, 1),$$

(c) Raoneu que hi ha un camp vectorial G tal que

$$F = \text{rot } G$$

i calculeu la circulació de G al llarg de la vora de S , amb l'orientació induïda.

Resolució:

(a) El pla diametral $z = \frac{x}{3}$ talla el pla $z = -2$ for de l'esfera. En conseqüència l'àrea de la zona demanada s'obté restant l'àrea de $S_1 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z \leq -2 \end{cases}$ de l'àrea de la semiesfera $36\pi/2$.

$$A(S_1) = \int_{x^2+y^2 \leq 5} \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx dy = 6\pi, \quad A(S) = 18\pi - 6\pi = 12\pi.$$

(b) Si $T_0 = \begin{cases} z = -2 \\ x^2 + y^2 \leq 5 \end{cases}$ $T_1 = \begin{cases} z = \frac{x}{3} \\ \frac{10x^2}{9} + y^2 \leq 9 \end{cases}$, com que $\text{div } F = 0$, resulta que

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, dS \rangle &= - \int_{T_0} \langle F, dS \rangle - \int_{T_1} \langle F, dS \rangle \\ \int_{T_0} \langle F, dS \rangle &= \int_{x^2+y^2 \leq 5} \langle (x^2, -2xy, 1), (0, 0, -1) \rangle dx dy = -5\pi \\ \int_{T_1} \langle F, dS \rangle &= \int_{\frac{10x^2}{9} + y^2 \leq 9} \langle (x^2, -2xy, 1), (-\frac{1}{3}, 0, 1) \rangle dx dy = \frac{351\pi}{40\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Per tant, $\boxed{\int_S \langle F, dS \rangle = 5\pi - \frac{351\pi}{40\sqrt{10}}}$

(c) Com que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ i $\text{div } F = 0$ existeix un camp G (potencial vector) tal que $\text{rot } G = F$

$$\int_{\partial S} \langle G, dl \rangle = \int_S \langle \text{rot } G, dS \rangle = 5\pi - \frac{351\pi}{40\sqrt{10}}.$$

Examen 05-04-01

1. L'àrea de la regió del pla tancada per la corba $r = \pi\theta - \theta^2$ és:

- (a) $\frac{\pi^5}{60}$.* (b) $\frac{\pi^3}{6}$. (c) $\frac{2\pi^3}{3}$. (d) $\frac{8\pi^5}{15}$. (e) Cap de les anteriors.

2. El volum tancat per les superfícies $x^2 + y^2 = 1 - z$ i $z = x^2 + (y - 1)^2$ és:

- (a) $\frac{\pi}{16}$.* (b) $\frac{\pi}{8}$. (c) $\frac{4}{9}$. (d) $\frac{8}{9}$. (e) Cap de les anteriors.

3. Sigui W la piràmide que té el cim en el punt $(0, 0, 1)$ i vèrtexs de la base en els punts $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(1, 1, 0)$. Llavors, la integral $\int_W (1 - z)^2$

- (a) Es pot calcular com $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z} (1 - z^2) dy dx dz$ i val $3/10$.*
- (b) Es pot calcular com $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} (1 - z^2) dy dx dz$ i val $3/10$.
- (c) Es pot calcular com $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} (1 - z^2) dy dx dz$ i val 0.
- (d) Es pot calcular com $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z} (1 - z^2) dy dx dz$ i val 0.
- (e) Cap de les anteriors.

4. La integral $\int_R x^m y^n$, on $R = [0, 1] \times [0, 1]$, val:

- (a) $\frac{1}{m+1}$. (b) $\frac{1}{n+1}$. (c) 1. (d) $\frac{1}{(m+1)(n+1)}$.* (e) Cap de les anteriors.

5. Sigui R la regió del pla donada per les condicions

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 0, \quad x^2 \geq 2 \end{cases}$$

L'àrea de R , és:

- (a) $\pi + 2$. (b) 2. (c) $\pi - 2$.* (d) $2\pi - 2$. (e) Cap de les anteriors.

6. Considerem la corba d'equació $y(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$ per a $x \in [-1, 1]$. El volum del sòlid de revolució generat al girar aquesta corba respecte l'eix x , és:

- (a) 2π .
 (b) 4π .
 (c) $2\pi(2 + e - e^{-1})$.
 (d) $\pi(4 + e - e^{-1})$.
 (e) Cap de les anteriors.

7. Ens donen la següent integral iterada

$$\int_0^a \left(\int_{-(x-a)^2}^{\sqrt{ax-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Si canviem l'ordre d'integració, obtenim:

- (a) $\int_0^{a/2} \left(\int_{a/2-\sqrt{(a^2/4)-y^2}}^{a/2+\sqrt{(a^2/4)-y^2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{-a^2}^0 \left(\int_0^{a-\sqrt{-y}} f(x, y) dx \right) dy.$ *
- (b) $\int_0^a \left(\int_{-(y-a)^2}^{\sqrt{ay-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$
- (c) $\int_{-a/2}^{a/2} \left(\int_{a/2-\sqrt{(a^2/4)-y^2}}^{a/2+\sqrt{(a^2/4)-y^2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{-a^2}^{-a/2} \left(\int_0^{a+\sqrt{-y}} f(x, y) dx \right) dy.$
- (d) $\int_{a/2}^{a^2} \left(\int_0^{a+\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{-a/2}^{a/2} \left(\int_{-a/2-\sqrt{(a^2/4)-y^2}}^{-a/2+\sqrt{(a^2/4)-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$
- (e) Cap de les anteriors.

8. El centre de masses de la figura de densitat uniforme 1,

$$W = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0 \right\},$$

amb $a, b, c > 0$, és:

- (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}abc\right).$ (b) $\left(0, 0, \frac{3}{8}\right).$ * (c) $\left(0, 0, \frac{3}{4}c\right).$ (d) $\left(0, 0, \frac{3}{8}c^2\right).$
- (e) Cap de les anteriors.

Examen 14-06-01

1. (a) Calculeu l'àrea que queda determinada entre 4 circumferències de radi $\sqrt{2}$, amb centres sobre els eixos i allunyats dues unitats de l'origen.

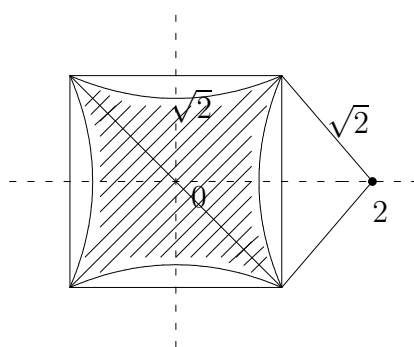
- (b) Calculeu la massa del sòlid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

que té funció de densitat

$$d(x, y, z) = |x y z|.$$

Resolució:



- (a) Àrea = Àrea d'un quadrat de costat 2 - 4 · Àrea d'un casquet d'una circumferència de radi $\sqrt{2}$ interceptat per un sector d'angle $90^\circ = 4 - \left(\frac{2\pi}{4} - 1\right) \cdot 4 = 8 - 2\pi$.

(b) $8 \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ x, y, z \geq 0}} xyz dx dy dz =$

$$= 8a^2 b^2 c^2 \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{6} a^2 b^2 c^2.$$

Canvi: $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = b\rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = c\rho \sin \varphi \end{cases}$

2. Sigui D un disc de radi R en el pla $y = y_0$ amb centre a $(0, y_0, 0)$.

- (a) Calculeu el moment d'inèrcia de D respecte de l'eix OZ .
 (b) Calculeu el flux del camp $\mathbf{F} = (y, -x, 0)$ a través del semidisc

$$\{(x, y, z) \in X \mid x \geq 0\}.$$

Resolució:

(a) $D \begin{cases} y = y_0 \\ x^2 + z^2 \leq R^2 \end{cases}$

$$I = \int_D (x^2 + y_0^2) dx dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (r^3 \sin^2 \theta + y_0^2 r) dr = \pi R^2 \left(\frac{R^2}{4} + y_0^2 \right)$$

$$(b) \int_{D, x \geq 0} \langle F, dS \rangle = - \int_0^R dr \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = -\frac{2R^3}{3}.$$

3. Sigui \mathbf{G} el camp vectorial $(0, x, f(z))$, on $f(z)$ és una funció C^1 arbitrària.

- (a) Calculeu la circulació de \mathbf{G} al llarg de la corba intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 1$ i la superfície $z = y^2$, orientada pel vector tangent $v = (0, 1, 0)$ en el punt $p = (1, 0, 0)$.
- (b) Calculeu el flux de rot \mathbf{G} a través de la superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \\ \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq y^2\},$$

orientada pel vector normal $w = (0, 0, 1)$ en el punt $q = (0, 0, 0)$.

- (c) Sigui W el volum de \mathbb{R}^3 determinat per

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, a \leq z \leq b\},$$

sent $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una regió elemental. Proveu que el flux de \mathbf{G} per ∂W és

$$\int_{\partial W} \langle \mathbf{G}, dS \rangle = [f(b) - f(a)] \text{Àrea}(D).$$

Resolució:

- (a) $\text{rot } G = \vec{k}$

$$\int_C \langle G, d\ell \rangle = \int_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ z=y^2}} \langle \vec{k}, dS \rangle = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi.$$

- (b) $0 = \int_S \langle \text{rot } G, dS \rangle + \int_{\substack{z=-1 \\ x^2+y^2 \leq 1}} \langle \text{rot } G, -\vec{k} \rangle dS$

$$\int_S \langle \text{rot } G, dS \rangle = \int_{\substack{z=-1 \\ x^2+y^2 \leq 1}} dx dy = \pi$$

- (c) $\int_{\partial W} \langle G, dS \rangle = \int_W \text{div } G = \int_a^b dz \int_D f'(z) dx dy = [f(b) - f(a)] A(D).$

Examen 29-01-02

1. Sigui W la regió de \mathbb{R}^3 donada per

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1, \\x + y + z &\geq 1, \\x, y, z &\geq 0.\end{aligned}$$

- (a) Dibuixeu-la i doneu la variació de paràmetres en coordenades cilíndriques i en coordenades esfèriques.
(b) Calculeu la integral

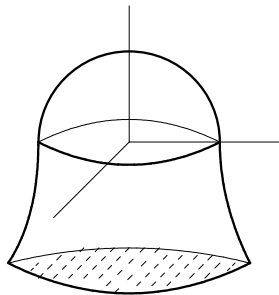
$$\int_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Resolució:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \int_0^1 dz \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{1-z}}^{\sqrt{1-z^2}} r dr &= \\&= \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_{\frac{\cos\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta}{1}}^1 r^2 \cos\beta dr\end{aligned}$$

$$\text{(b)} \int_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{\pi/2} d\beta \int_{\frac{\cos\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta}{1}}^1 \frac{\cos\beta}{r^2} dr$$

2. Sigui W el volum de la figura, tancat per les superfícies



$$\begin{aligned}S_1 : \quad &x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0, \\S_2 : \quad &x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad -2 \leq z \leq 0, \\S_3 : \quad &z = -2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq 1.\end{aligned}$$

- (a) Calculeu el volum de W .
(b) Si la densitat de massa superficial és

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$$

calculeu la massa de S_2 .

- (c) Calculeu el flux sortint per S del camp vectorial

$$F = (x + yz, y + z, z).$$

(d) Calculeu el flux sortint per S del camp vectorial

$$G = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Resolució:

$$(a) \text{ vol}(W) = \text{vol}(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0) + \text{vol}(x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 0) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \int_{-2}^0 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr = \frac{16\pi}{3}$$

$$(b) m(S_2) = \int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 5} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy = \frac{26\pi}{3} \quad (\text{usant coordenades polars})$$

$$(c) \int_S \langle F, N \rangle dS = \int_W \text{div } F dx dy dz = 3 \text{vol}(W) = 16\pi$$

(d) G no està definit a l'origen. Prenem el volum W delimitat entre una bola B de centre l'origen i radi ϵ (continguda tota dintre de S) i S . Llavors $\text{div } G = 0$ i aplicant el teorema de la divergència, es té:

$$\int_{\partial W = \cup \partial B} \langle G, N \rangle dS = \int_S \langle G, N \rangle dS + \int_{\partial B} \langle G, N \rangle dS = \int_W \text{div } G dx dy dz = 0$$

$$\text{D'aquí} \quad \int_S \langle G, N \rangle dS = - \int_{\partial B} \langle G, N \rangle dS = 4\pi$$

3. Considereu el camp vectorial

$$F = (ay + bz^2, ax + cz, bx + cy).$$

(a) Trobeu els valors de a, b, c per als quals F és un camp conservatiu. En aquest cas, trobeu una funció potencial, $f(x, y, z)$, tal que $f(0, 0, 0) = 0$.

Per a la resta del problema, fixarem els valors de $a, c \neq 0$ i b deduïts a l'apartat (a).

(b) Calculeu el flux de F a través de la superfície

$$S \quad \begin{cases} z = 4x^2 + 9y^2, \\ z \leq 1, \quad y \geq 0, \end{cases}$$

orientada pel vector normal exterior.

(a) Proveu que F és solenoidal i calculeu un potencial vector G .

(b) Calculeu la circulació de G per la corba $C = \partial S$, orientada compatiblement respecte S .

Resolució:

(a) $\text{rot } F = (0, 2bz - b, 0) = 0$, per tant $b = 0$ i llavors $f(x, y, z) = xy + yz$

(b) $S_1 : y(x, z) = 0, \quad \forall (x, z) \in \{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 4x^2 \leq z \leq 1\}, \quad n = (0, -1, 0)$

$S_2 : z(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \{y \geq 0, 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}, \quad n = (0, 0, 1).$

Com que $\text{div } F = 0$, es té pel teorema de la divergència: $\text{flux}_{S \cup S_1 \cup S_2} = 0$. D'aquí, $\text{flux}_S = -\text{flux}_{S_1} - \text{flux}_{S_2}$

$$(c) \int_{\partial S} \langle G, dl \rangle = \int_S \langle \text{rot } G, dS \rangle = \int_S \langle F, dS \rangle.$$

Examen 10-04-02

- Quin és el volum tancat per les superfícies $z = 2x^2 + 2y^2$ i $z = 1 + x^2 + y^2$?
 (a) $\pi/2$.* (b) $2\pi/3$. (c) π . (d) 3π . (e) Cap de les anteriors.
- L'àrea de la regió plana expressada en polars $A = \{\sin 2\theta \leq r \leq 3 \sin \theta\}$, és:
 (a) $17\pi/8$.* (b) 7. (c) 2π . (d) 4. (e) Cap de les anteriors.
- Canviant l'ordre d'integració, $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy dx$ esdevé:
 (a) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx dy$ i val $2a^3/3$.*
 (b) $\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_0^a \sqrt{a^2-y^2} dx dy$ i val $a^2 \left(\frac{\cos \sqrt{a^2-y^2} \sin \sqrt{a^2-y^2}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2-y^2} \right)$.
 (c) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx dy$ i val $a^2 \sqrt{\pi}$.
 (d) $\int_0^a \int_0^{-\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx dy$ i val $-2a^3/3$.
 (e) Cap de les anteriors.
- Quin és el centre de gravetat de $\{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\} \setminus \{x^2 + y^2 - y \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$?
 (a) $\left(0, -\frac{1}{14}, \frac{15}{14}\right)$.* (b) $\left(0, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$. (c) $\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$. (d) $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
 (e) Cap de les anteriors.
- El volum limitat pel pla $x = a$ i la superfície $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$, amb $p, q > 0$, és:
 (a) $\pi a^2 \sqrt{pq}$.* (b) $\frac{2\pi a^2}{\sqrt{pq}}$. (c) $\pi^2 a^2 pq$. (d) $\frac{2\pi a^2}{pq}$. (e) Cap de les anteriors.
- L'àrea de la figura limitada per la corba $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 xy(x^2 - y^2)$, és:
 (a) πa^2 . (b) a^2 .* (c) $2\pi a^2$. (d) $\frac{3}{4}\pi a^2$. (e) Cap de les anteriors.
- El moment d'inèrcia de l'esfera $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, respecte de l'eix de les z , és:
 (a) $\frac{88\pi}{15}$.* (b) $\frac{16\pi}{3}$. (c) $\frac{72\pi}{15}$. (d) $\frac{14\pi}{3}$. (e) Cap de les anteriors.
- El volum del cos definit per les desigualtats $x^2 + y^2 \leq (z-1)^2$; $z+1 \geq x^2 + y^2$, amb $z \leq 1$, és:
 (a) $3\pi/7$. (b) $5\pi/6$. (c) $13\pi/6$. (d) $5\pi/7$.* (e) Cap de les anteriors.

Examen 10-06-02

1. Sigui W la regió de R^3 definida per les inequacions

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2R^2, \quad \frac{R^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z^2 \geq x^2 + y^2$$

(a) Calculeu el volum de W .

(b) Calculeu $\int_W z dx dy dz$.

Resolució:

(a) $vol(W) = 2\pi \int_{R/2}^R r dr \int_r^{\sqrt{2R^2-r^2}} = 2\pi \int_{R/2}^R (r\sqrt{2R^2-r^2} - r^2) dr$

(b) $\int_W z dx dy dz = \pi \int_{R/2}^R (2R^2 r - 2r^3) dr$

2. Considereu la superfície homogènia S definida per

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

(a) Calculeu el centre de gravetat (x_G, y_G, z_G) de S .

(b) Calculeu el moment d'inèrcia de S respecte de l'eix Oy .

(c) Calculeu el moment d'inèrcia de S respecte de l'eix $x = 0, z = z_G$, expressat en funció de (b).

(d) Sigui W el cos de R^3 definit per

$$z^2 \geq x^2 + y^2, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Calculeu el moment d'inèrcia de W respecte de l'eix Oy .

Resolució: $S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, $A(S) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\sqrt{2} dr$

(a) $z_G = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{2} dr$, $x_G = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{2} \cos \theta dr$, $y_G = 0$

(b) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\sqrt{2}(r^2 \cos^2 \theta + z^2) dr$

(c) $I_2 = \int_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0} [x^2 + (z - z_G)^2] \sqrt{2} dx dy = I - z_G^2 A(\text{semicon})$

(d) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 (r^2 \cos^2 \theta + z^2) dz$

3. Considereu el cilindre $(x-1)^2 + y^2 = 1$, orientat per la normal exterior, i el camp vectorial $F = (1, 1, 1)$.

(a) Si aquest cilindre està fitat inferiorment pel pla $z = 0$ i superiorment per la superfície $z = x^4$, calculeu el flux de F a través d'aquesta part del cilindre.

(b) Si ara està limitat inferiorment pel pla $z = 0$ i superiorment per la superfície

$$z = 4 + 2(x^2 + y^2 - 2x)^4 + x^2 + y^2,$$

trobeu el flux de F a través d'aquesta part del cilindre.

Resolució:

$$(a) \int_S \langle F, dS \rangle = \int_W \operatorname{div} F - \int_M \langle F, dS \rangle - \int_T \langle F, dS \rangle \text{ essent}$$

$$S = \{(x-1)^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq x^4\}$$

$$M = \{z = x^4, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$T = \{z = 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$W = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^4\}$$

Es té $\operatorname{div} F = 0$,

$$\int_M \langle F, dS \rangle = \int_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} (-4x^3 + 1) dx dy = \int_0^{2\pi} r [1 - 4(1 + 3r \cos^2 \theta)] dr$$

$$\int_T \langle F, dS \rangle = -A(T) = -\pi$$

(b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 4 + 2(x^2 + y^2 - 2x)^4 + x^2 + y^2$ equival a $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $z = 4 + 2x$.

Com que $\operatorname{div} F = 0$, si

$$S_1 = \{z = 4 + 2(x^2 + y^2 - 2x)^4 + x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$S_2 = \{z = 4 + 2x, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

amb $\partial S_1 = \partial S_2$, resulta que

$$\int_{S_1} \langle F, dS \rangle = \int_{S_2} \langle F, dS \rangle = \int_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} (-2 + 1) dx dy = -\pi$$

$$\text{llavors, } \int_S \langle F, dS \rangle = - \int_{S_2} \langle F, dS \rangle - \int_T \langle F, dS \rangle = 2\pi$$

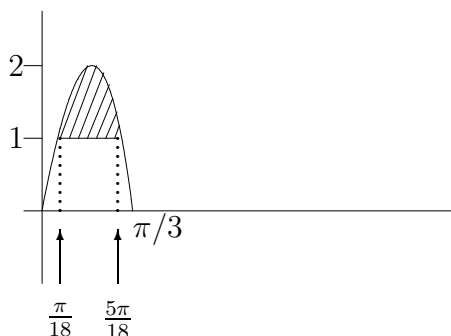
Examen 29-10-02

1. L'àrea de la regió que, expressada en polars és $A : 1 \leq r \leq 2 \sin 3\theta$, val:

- (a) $\pi/3$. (b) $\sqrt{3}/2$. (c) $\pi/3 + \sqrt{3}/2$. (d) $\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

Resposta: (c)

Resolució: $1 \leq 2 \sin 3\theta \implies \frac{1}{2} \leq \sin 3\theta \implies \frac{\pi}{18} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{18}$ i dues regions més.



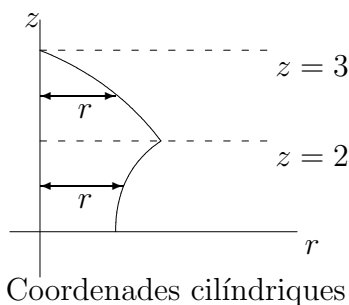
$$A = 3 \int_{\pi/18}^{5\pi/18} d\theta \int_1^{2 \sin 3\theta} r dr = \dots = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. El volum del cos determinat per $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $x \geq y$ en el 1r octant val:

- (a) $11\pi/4$. (b) $11\pi/12$. (c) $11/4$. (d) $11\pi/3$.

Resposta: (b)

Resolució: $\int_0^{\pi/4} d\theta \left(\int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr + \int_2^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} r dr \right) = \dots = \frac{11\pi}{12}.$



3. El moment d'inèrcia respecte l'eix OZ del cilindre $x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, (cos homogeni) val:

- (a) $\frac{3}{4}ha^4\pi$. (b) $\frac{2}{3}ha^4\pi$. (c) $\frac{3}{2}ha^4\pi$. (d) $\frac{4}{3}ha^4\pi$.

Resposta: (c)

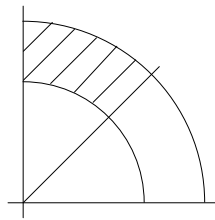
Resolució: $I_z = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2a \sin \theta} r dr \int_0^h r^2 dz = h \int_0^\pi \frac{(2a \sin \theta)^4}{4} d\theta = \dots = \frac{3}{2}a^4h\pi$.

4. Sigui W el volum determinat per $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z^2 \geq x^2 + y^2$, amb $z \geq 0$. El valor de la integral $\int_W \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ és:

- (a) $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\pi$. (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. (c) π . (d) $(\sqrt{2} - 1)\pi$.

Resposta: (a)

Resolució: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/2}^1 dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos \varphi}{r^2} d\varphi = \dots = \pi \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.



Coordenades esfèriques

5. El centre de gravetat del cos homogeni ($\rho \equiv 1$) definit per $x^2 + y^2 \leq 4a^2$, $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, és el punt:

- (a) $\left(-\frac{a}{3}, 0, \frac{h}{2}\right)$. (b) $\left(0, 0, \frac{h}{2}\right)$. (c) $\left(-\frac{a}{4}, 0, \frac{h}{2}\right)$. (d) $\left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2}\right)$.

Resposta: (a)

Resolució: Per simetria $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = h/2$.

1a coordenada: $x_C = 0 = x_c m_c + \bar{x} m = a^3 \pi h + \bar{x} (4a^2 \pi h - \pi a^2 h) \implies 0 = a + 3\bar{x} \implies \bar{x} = -\frac{a}{3}$.

Examen 13-01-03

1. (a) Calculeu el volum de la regió W de l'espai limitada per les superfícies

$$z = 1, z = 2, z = x^2 + y^2, y = 0, y = x$$

- (b) Calculeu el moment d'inèrcia de la superfície

$$\{(x, y, z) : x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

respecte de l'eix $x = y = 0$.

Resolució:

(a) Volum = $2 \int_1^2 dz \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} r dr$

(b) $S: z = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \forall (x, y) \in D = \{x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2/2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1\}$

Moment d'inèrcia: $\int_S (x^2 + y^2) \rho dS = a \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - 2x^2}} (x^2 + y^2) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy dx =$
 $a \int_0^{a/\sqrt{2}} \left[(a^2 + x^2) \sqrt{\frac{a^2 - 2x^2}{a^2 - x^2}} \right] dx$ (es deixa la integral indicada, si $\rho = 1$).

En un enunciat alternatiu (que es va donar) on $\rho = |z|$ llavors la integral surt més senzilla.

2. Considereu el camp $F = (x^2 - 2y, z, z^2)$ i les superfícies

$$S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, 2x^2 + 2y^2 \leq 3z + 3\}, \quad S_2 = \{2x^2 + 2y^2 = 3z + 3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

- (a) Comproveu que $\partial S_1 = \partial S_2$.
- (b) Calculeu la circulació del camp F sobre la corba ∂S_2 amb l'orientació induïda per la de S_2 orientada pel camp normal $(4x, 4y, -3)$.
- (c) Calculeu el flux del camp F sobre la superfície $\{z = 1\} \cap W$ orientada per $(0, 0, 1)$.
- (d) Calculeu el flux sortint del camp F per la vora del cos W tancat per $S = S_1 \cup S_2$.
- (e) Considereu el camp vectorial $G = (x^2 + x - 2y - 4yz^3, x^3 - y + z, z^2)$. Deduiu de l'apartat anterior el flux sortint de G a través de S .

Resolució:

- (a) Intersequem les superfícies:

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{3(z+1)}{2}$$

i tenim $\delta S_1 = \delta S_2 = \{z = 1, x^2 + y^2 = 3\}$

- (b) $\sigma(t) = (\sqrt{3} \cos t, -\sqrt{3} \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$; llavors
 circulació = $\int_0^{2\pi} \langle (3 \cos^2 t + 2\sqrt{3} \sin t, 1, 1), (-\sqrt{3} \sin t, -\sqrt{3} \cos t, 0) \rangle dt = -6\pi$

(c) $z = z(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 3\}$
 $\text{flux} = \int_D \langle (x^2 - 2y, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle dx dy = A(D) = 3\pi$

(d) Pel t. divergència:

$$\text{flux} = \int_W \text{div } F dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{2r^2-3}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} (r \cos \theta + z) dz = 13\pi/2$$

on hem usat que $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} f(r) dr = 0$

(e) $\text{flux} = \int_W \text{div } G dx dy dz = \int_W \text{div } F dx dy dz$

3. Considerem el camp vectorial $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$.

(a) Deriva F d'un potencial escalar? De potencial vector? Justifiqueu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu el camp corresponent.

(b) Calculeu el flux sortint de F a través de la superfície

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

(c) Calculeu la circulació de F al llarg de la corba C intersecció en el primer octant de la superfície anterior i el con $(x-1)^2 + y^2 = z^2$ des del punt $(1, 0, 0)$ fins al $(0, 0, 1)$.

Resolució:

(a) F és C^1 en R^3 i $\text{rot } F = 0$, per tant F deriva d'un potencial escalar $f(x, y, z)$ tal que

$$f_x = x^3, \quad f_y = y^3, \quad f_z = z^3$$

llavors, $f(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + C$.

(b) Pel t. de la divergència:

$$\text{flux} = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \text{div } F dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \int_0^1 r^4 \cos \beta dr$$

(c) Circulació = $f(0, 0, 1) - f(1, 0, 0) = 0$

Examen 11-04-03

1. Sigui $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = x + y$, on $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Dividim l'interval $[0, 1]$ en n trossos iguals. Llavors, la suma superior de Riemann val:

(a) $S_n(f, A) = 1 + \frac{1}{n}$.* (b) $S_n(f, A) = 1 - \frac{1}{n}$. (c) $S_n(f, A) = 1 + \frac{2}{n}$.
 (d) $S_n(f, A) = 1 + \frac{1}{n^2}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució:

$$S_n(f, A) = \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n} + \dots + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} \right) \right] = \frac{1}{n^2} \left[n \frac{1+n}{2} + n \frac{1+n}{2} \right] = \frac{n}{n^2} (1+n) = 1 + \frac{1}{n}.$$

2. El valor de $\int_A xy^2z^3 dx dy dz$, on $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \leq 1, y \geq 0, z \leq 2x, y \leq x^2z\}$, és:

(a) 0. (b) $128/315$.* (c) $1/14$. (d) No està definit. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x^2z} xy^2z^3 dy dz dx = \frac{128}{315}$.

3. El valor de $\int_A f(x, y) dx dy$, on $A = [0, 1] \times [0, 1]$ i $f(x, y) = \max\{x, y\}$, és:

(a) 1. (b) $1/3$. (c) $1/2$. (d) $2/3$.* (e) Cap de les anteriors.

Resolució:

$$\int_A f dx dy = \int_{\{(x,y)/x \geq y\}} f dx dy + \int_{\{(x,y)/x < y\}} f dx dy = \int_0^1 \int_y^1 x dx dy + \int_0^1 \int_0^y y dx dy = \frac{2}{3}.$$

4. L'àrea tancada per la corba $(x^2 + y^2)^2 = |y|x$ és (podeu passar a polars):

(a) $1/2$.* (b) 0. (c) $\pi/2$. (d) $\pi/4$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: En coordenades polars $r^2 = |\sin \theta| \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{r(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \theta| \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

5. Calculeu el volum tancat per $z = x^2 - 4x + 1$ i $1 - z = x^2 + y^2$.

(a) 0. (b) $\frac{\pi}{2}$. (c) $\frac{4\pi}{3}$. (d) $\pi\sqrt{2}$.* (e) Cap de les anteriors.

Resolució: La intersecció de les dues superfícies dóna $\begin{cases} z = x^2 - 4x + 1 \\ (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{volum} &= \int_{(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1} \int_{x^2-4x+1}^{1-x^2-y^2} dz dx dy = \int_{(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1} (4x - 2x^2 - y^2) dx dy \stackrel{\text{Canvi}}{=} \\ &= \left| \begin{array}{l} x-1 = r \cos \theta \\ y = \sqrt{2} r \sin \theta \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - rr^2) \sqrt{2} r dr d\theta = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$6. \int_{-5}^{-3} dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} dy + \int_{-3}^1 dx \int_0^{1-x} dy =$$

- (a) $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{25-y^2}}^{1-y} dx.$ (b) $\int_0^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{1-\sqrt{25-y^2}} dx.$ (c) $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{1-y} dx.*$
 (d) $\int_0^5 dy \int_{2-\sqrt{25-y^2}}^{2+\sqrt{25-y^2}} dx.$ (e) Cap dels anteriors.

7. Calculeu el moment d'inèrcia del sòlid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ respecte l'eix z , on $\rho(x, y, z) = 1$

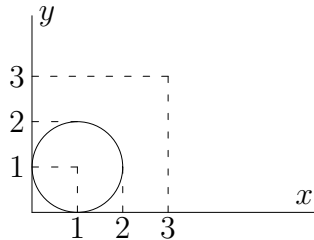
- (a) $\frac{28\pi R^5}{15}.$ (b) $\frac{4\pi R^5}{15}.*$ (c) $\frac{4\pi R^3}{9}.$ (d) $\frac{8\pi R^3}{9}.$ (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos^2 \beta r^2 \cos \beta dr d\beta d\alpha = \frac{4\pi R^5}{15}.$

8. Calculeu el centre de gravetat del conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$, on $\rho(x, y) = 1$.

- (a) $\frac{1}{9-\pi} \left(\frac{27}{2} - \pi, \frac{27}{2} - \pi \right).*$ (b) $\frac{1}{9-\pi} \left(\frac{3}{2} - \pi, \frac{3}{2} - \pi \right).$ (c) $\left(\frac{3}{2} - \pi, \frac{3}{2} - \pi \right).$
 (d) $\left(\frac{27}{2} - \pi, \frac{1}{9-\pi} \right).$ (e) Cap de les anteriors

Resolució:



$$\frac{\pi(1, 1) + (9 - \pi)(\bar{x}, \bar{y})}{9} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \implies (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{9 - \pi} \left(\frac{27}{2} - \pi, \frac{27}{2} - \pi \right).$$

Examen 30-06-03

1. Calculeu el volum de la regió delimitada per $z^2 \geq x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $z \geq 0$.

Resolució: $\text{Volum} = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{\sqrt{z^2-1}} r dr + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{3-z^2}} r dr = \frac{2\pi}{3} [-4\sqrt{2} + 1 + 3\sqrt{3}]$.

2. Trobeu el centre de masses del sòlid homogeni

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq y \leq x \leq 3, \quad 2y \leq z \leq 2y + 4\}.$$

Resolució: $\text{Volum} = \int_0^3 dy \int_{2y}^{2y+4} dz \int_y^3 dx = 18$.

$$\bar{x} = \frac{\int_W x dx dy dz}{\text{volum}} = 2, \quad \bar{y} = \frac{\int_W y dx dy dz}{\text{volum}} = 1, \quad \bar{z} = \frac{\int_W z dx dy dz}{\text{volum}} = 4.$$

3. Calculeu l'àrea del tros d'esfera de centre l'origen i radi 1 delimitada per

$$x^2 + y^2 - x \leq 0, \quad z \geq 0.$$

Resolució: $S : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - x \leq 0\}$

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \int_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{coordenades} \\ \text{polars}}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r(1 - r^2)^{-1/2} dr = \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|\sin \theta| - 1) d\theta = -2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta + \pi = \pi - 2. \end{aligned}$$

4. Calculeu la massa de la superfície $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $z \leq 3$ si la densitat és $\rho = |xy|$.

Resolució: $M = \int_{x^2+y^2 \leq 6} |xy| \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = 4 \int_{\substack{x^2+y^2 \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0}} xy \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \stackrel{\uparrow}{\text{polars}} =$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^{\sqrt{6}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \left| \begin{array}{l} \text{per parts} \\ \text{o bé} \\ \text{fent el canvi } t = \sqrt{1 + r^2}; t dt = r dr \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{7}} (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{15} [112\sqrt{7} + 2].$$

5. Calculeu el flux del camp $F(x, y, z) = (yz + f(x), xz + f(y), xy + f(z))$, on $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció de classe C^1 i $f(2) = 4$, $f(0) = 1$, a través de la vora del cub $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ orientada per la normal exterior.

Resolució: Pel teorema de la divergència i flux $= \int_W (f'(x) + f'(y) + f'(z)) dx dy dz =$

$$= 3 \int_W f'(x) dx dy dz = 3 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 f'(x) dx dy dz = 12[f(2) - f(0)] = 36.$$

6. (a) Donat el camp $\vec{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$ i C la corba intersecció entre $x^2 + y^2 = 2$ i $x + y + z = 1$, amb l'orientació horària en la projecció en el pla x, y , calculeu la circulació del camp \vec{F} al llarg de C .
- (b) Donat el camp vectorial $F = \frac{\vec{r}}{r^3}$ on $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \|\vec{r}\|$, calculeu la circulació al llarg del camí $x^3 - xy + y^2 = 1$, $z = 0$ que va del punt $(1,0,0)$ al $(0,1,0)$.

Resolució:

- (a) Pel teorema de Stokes, prenent S el tros de pla tal que $\partial S = C$, es té $\int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_S \langle \text{rot}\vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{x^2+y^2 \leq 2} \langle (0, 0, 3(x^2 + y^2)), (-1, -1, -1) \rangle dxdy = -3 \int_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) dxdy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordenades} \\ \text{polars}}}{=} -3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta = -6\pi$.
- (b) Com que $\text{rot}\vec{F} = 0$, podem calcular la circulació al llarg de l'arc de circumferència; com que $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ és ortogonal en tot punt de la circumferència, es té $\int_P \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = 0$.

7. Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (x, -2y, x + z)$ a través de la superfície

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1, y \geq 0\}$$

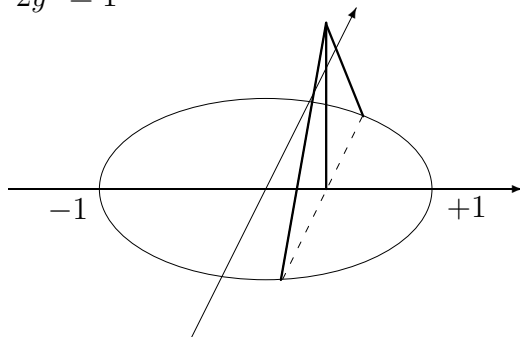
orientada per la normal (x, y, z) .

Resolució: Com que $\text{div}\vec{F} = 0$, considerem les superfícies

$$M = \{z = 1, x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}, \quad T = \{y = 0, x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$$

Llavors $\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_M \langle \vec{F}, \vec{k} \rangle dS + \int_T \langle \vec{F}, \vec{j} \rangle dS = \int_M (x + 1) dS + \int_T -2y dS = A(M) = \frac{3\pi}{2}$.

8. Calculeu el volum del sòlid engendrat per un triangle equilàter variable, contingut en plans perpendiculars a l'eix x , i la base del qual és la corda variable que s'obté a l'intersecar el pla amb l'el·lipse $x^2 + 2y^2 = 1$



Resolució: $\text{Volum} = 4 \int_0^1 \frac{1}{2} y \sqrt{3} y dx \underset{y = \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}{=} \sqrt{3} \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Examen 29-10-03

1. Sigui $T(x, y, z)$ la temperatura en un punt (x, y, z) de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i suposem que T és proporcional a la distància a l'origen. En quins punts de la bola la temperatura és igual a la temperatura mitjana?

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}R$. (b) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{16}R^2$.* (c) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3\pi}{8}R$.
 (d) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi^2}{64}R^2$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució:
$$v_m(T) = \frac{\int_B T dx dy dz}{v(B)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R k r r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}kR.$$

Imposem $T = v_m(T) \Leftrightarrow k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3}{4}kR \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{16}R^2$.

2. Calculeu el volum limitat per les superfícies $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$ i $y^2 = x$.

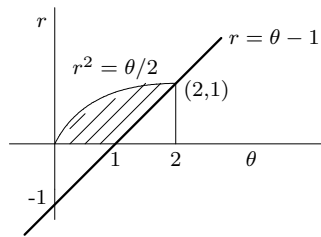
- (a) $\frac{1}{25}$. (b) $\frac{3}{35}$.* (c) $\frac{2}{23}$. (d) $\frac{5}{13}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució:
$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \frac{3}{35}.$$

3. Calculeu l'àrea de la regió plana que, expressada en coordenades polars, vé donada per $\{(r, \theta) \mid r^2 \leq \frac{\theta}{2}, r \geq \theta - 1\}$

- (a) $1/3$.* (b) $2/5$. (c) $1/4$. (d) $3/5$. (e) $1/7$.

Resolució: $r = 2r^2 - 1 \Rightarrow r = 1, \theta = 2$

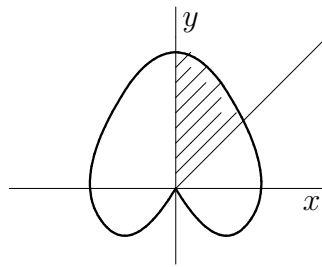


$$A = \int_0^1 d\theta \int_0^{\sqrt{\theta/2}} r dr + \int_1^2 d\theta \int_{\theta-1}^{\sqrt{\theta/2}} r dr = \frac{1}{3}.$$

4. L'àrea tancada per la corba $r = 1 + \sin \theta$ en la regió $0 \leq x \leq y$, és:

- (a) $\frac{5\pi}{16}$. (b) $\frac{5\pi}{16} + \frac{8 - 4\sqrt{\pi}}{8}$. (c) $\frac{1}{8} \left(\frac{3\pi}{2} + 4\sqrt{2} + 1 \right)$.* (d) $\frac{5\pi}{16} + 4\sqrt{2}$.
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució:

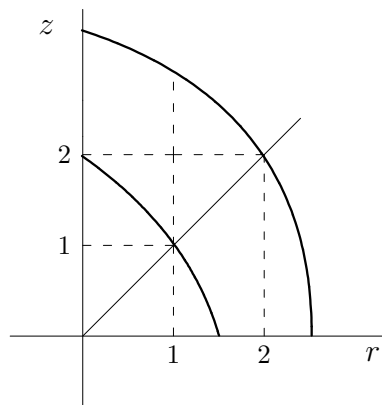


$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1+\sin\theta} r dr = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta = \frac{1}{8} \left(\frac{3\pi}{2} + 4\sqrt{2} + 1 \right).$$

5. Calculeu el volum de la regió de \mathbb{R}^3 corresponent a les desigualtats $z^2 \geq x^2 + y^2$, $2 - (x^2 + y^2) \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.

- (a) $\frac{59\pi}{6}$.* (b) $\frac{9\pi}{5}$. (c) $\frac{43\pi}{6}$. (d) $\frac{\pi}{2}$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $\left. \begin{array}{l} 2 - r^2 = z \\ z = r \end{array} \right\} \Rightarrow r = 1, z = 1$ $\left. \begin{array}{l} 6 - r^2 = z \\ z = r \end{array} \right\} \Rightarrow r = 2, z = 2$



Usant coordenades cilíndriques:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{2-r^2}^{6-r^2} r dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_r^{6-r^2} r dz = \frac{59\pi}{6}.$$

6. Sigui W el con d'eix z , alçada $H > 0$ i base circular de radi R en el pla xy ; llavors

$$\int_W f(x, y, z) dx dy dz \text{ és}$$

(a) $\int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$. (b) $\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{H-\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$.*

(c) $\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$. (d) $\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{H+\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$.

- (e) Cap dels anteriors.

Resolució: L'equació del con és $z = H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, per tant, és (b).

7. Dues boles (homogènies de densitat 1) de radis R_1 i R_2 giren al voltant d'un eix s perpendicular a l'eix que uneix els centres de les dues boles. Siguin d_1 i d_2 les distàncies entre el centre de la bola de radi R_1 i R_2 , respectivament, a l'eix s . Si els moments d'inèrcia, de cada bola respecte l'eix s , són iguals, llavors es té:

- (a) $\frac{1}{15}(R_1^2 d_1 + R_2^2 d_2) = d_1^3 + d_2^3$. (b) $R_1^2 d_1 + R_2^2 d_2 = \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)$.
 (c) $\frac{2}{3}(R_1^3 d_2^2 - R_2^3 d_1^2) = \frac{1}{5}(R_2^5 - R_1^5)$. (d) $R_1^3 d_1^2 - R_2^3 d_2^2 = \frac{2}{5}(R_2^5 - R_1^5)$.*
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució: Moment d'inèrcia de la bola de radi R_1 : $8\pi \frac{R_1^5}{15} + 4\pi \frac{R_1^3}{3} d_1^2$. Moment d'inèrcia de la bola de radi R_2 : $8\pi \frac{R_2^5}{15} + 4\pi \frac{R_2^3}{3} d_2^2$. Imposant $I_1 = I_2$, es té la resposta (d).

8. Donat el rectangle $R = [1, 2] \times [0, 1]$ i la funció $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow y - x$, quin és el valor de la suma inferior de Riemann?

- (a) $-\frac{N-1}{N}$. (b) $-\frac{N+1}{N}$.* (c) -1 . (d) $-\frac{2N+1}{2N}$.
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució:
$$S_N(f) = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=0}^{N-1} \left[\frac{j}{N} - \left(1 + \frac{k+1}{N} \right) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N} \right) - (N+k+1) \right] =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{N-1}{2} - (N+k+1) \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[-\frac{N+3}{2} - k \right] = \frac{1}{N^2} \left[-N \left(\frac{N+3}{2} \right) - \frac{(N-1)N}{2} \right] =$$

$$-\frac{N+1}{N}.$$

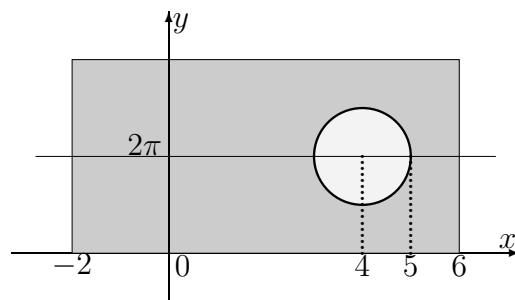
Examen 09-01-04

1. Trobeu el centre de gravetat del conjunt

$$\{(x, y) : -2 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 4\pi, \quad (x-4)^2 + (y-2\pi)^2 \geq 1\}$$

amb densitat igual a la distància a l'eix $x = 0$.

Resolució: Per simetria: $y_G = 2\pi$



Calculem el $x_G(D)$ del disc:

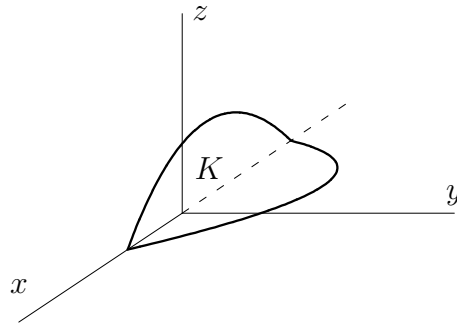
$$\begin{aligned} \text{Massa disc} = M(D) &= \int_D x dy dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (4r + r^2 \cos \theta) dr = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + r \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = 2\pi + r \sin \theta \quad 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right. \\ x_G(D) &= \frac{1}{4\pi} \int_D x^2 dx dy = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(4+r \cos \theta)^2 dr = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (16r + r^3 \cos^2 \theta) dr = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [8 + \frac{1}{4} \cos^2 \theta] d\theta = 4 + \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \left(8 + \frac{1}{8} \right) = \frac{65}{16}. \end{aligned}$$

Calculem $x_G(R)$ del rectangle:

$$\begin{aligned} M(R) &= \int_R |x| dx dy = - \int_{-2}^0 x dx \cdot 4\pi + \int_0^6 x dx \cdot 4\pi = 4\pi(2 + 18) = 80\pi \\ x_G(R) &= \frac{1}{80\pi} \int_R x \cdot |x| dx dy = \frac{4\pi}{80\pi} \left(- \int_{-2}^0 x^2 dx + \int_0^6 x^2 dx \right) = \frac{1}{20} \left(-\frac{8}{3} + \frac{216}{3} \right) = \frac{52}{15}. \\ \text{Finalment: } x_G &= \frac{\frac{52}{15} \times 80\pi - \frac{65}{16} \times 4\pi}{76\pi} = \frac{3133}{912} \simeq 3,44. \end{aligned}$$

2. (a) Calculeu el volum de la regió limitada per $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - x \leq 0$, $0 \leq z \leq 2$.
 (b) Calculeu l'àrea de la superfície $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - x \leq 0$, $2x + 3y + 2z = 12$.
 (c) Calculeu la circulació del camp $F(x, y) = (2y, 3x)$ al llarg de la corba de \mathbb{R}^2 donada per $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$ orientada antihorària.

Resolució: En coordenades polars: $r^2 - 2r - r \cos \theta \leq 0$ és a dir: $r \leq 2 + \cos \theta$



(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2+\cos\theta} \int_0^2 r dz dr d\theta = 9\pi$

(b) $z = 6 - x - \frac{3}{2}y, \quad \forall (x, y) \in K \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{Àrea} = \int_K \left\| \left(-1, -\frac{3}{2}, -1 \right) \right\| dx dy = \frac{\sqrt{17}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\cos\theta} r dr d\theta = \pi \frac{9\sqrt{17}}{4}$$

(c) Pel teorema de Green-Riemann,

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_K (Q_x - P_y) dx dy = \int_K dx dy = A(K) = \frac{9}{2}\pi.$$

3. Considerem el camp $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, on

$$F(x, y, z) = \left(\frac{3x}{(x^2 + y^2 - 1)^{3/2}}, \frac{3y}{(x^2 + y^2 - 1)^{3/2}}, 4z \right)$$

i U és el domini de definició d' F .

(a) És F un camp gradient? Raoneu la resposta.

(b) Calculeu la circulació d' F al llarg de la corba parametritzada per

$$\delta(t) = \left(2 \cos t, 3 \sin t, \sin^3 \frac{t}{2} \right), \quad t \in (0, \pi).$$

(c) Trobeu una parametrització $\sigma : I \rightarrow U$, d'una corba tancada, que sigui perpendicular a les línies de flux del camp F .

Resolució:

(a) F és un camp gradient ja que $F = \text{grad } f$, on

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x}{(x^2 + y^2 - 1)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{3y}{(x^2 + y^2 - 1)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 4z \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{-3}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)}} + 2z^2 + \text{constant}$$

$$(b) \int_{\delta} \langle F, d\ell \rangle = f(\delta(\pi)) - f(\delta(0)) = f(-2, 0, 1) - f(2, 0, 0) = 2.$$

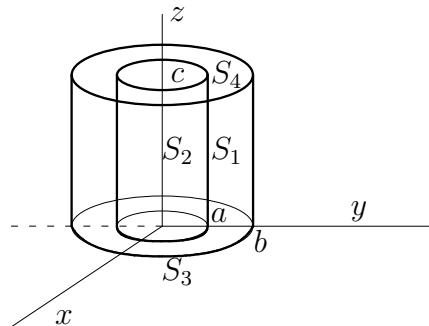
(c) Com que $F = \text{grad } f$ i els camps gradient són perpendiculars a les superfícies de nivell, les línies de flux d' F són perpendiculars a les superfícies de nivell de f , que són $\frac{-3}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2z^2 = C$. Per tant una possible parametrització és: $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sigui W el volum definit per

$$\begin{aligned} a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, & \text{ amb } 0 < a < b \\ 0 \leq z \leq c, & c \geq 0 \end{aligned}$$

i sigui S la superfície total que l'envolta. Comproveu que se satisfà el teorema de la divergència per al camp $F = (x, yz, x + z^2)$.

Resolució:



$$\begin{aligned} \varphi_1 : [0, 2\pi] \times [0, c] &\longrightarrow S_1, & \vec{n} = \varphi_{1\theta} \wedge \varphi_{1z} &= (b \cos \theta, b \sin \theta, 0) \\ (\theta, z) &\longmapsto (b \cos \theta, b \sin \theta, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : [0, 2\pi] \times [0, c] &\longrightarrow S_2, & \vec{n} = -\varphi_{2\theta} \wedge \varphi_{2z} &= (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0) \\ (\theta, z) &\longmapsto (a \cos \theta, a \sin \theta, z) \end{aligned}$$

$$S_3 : z = 0 \quad \forall (x, y) \in K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \quad \vec{n} = (0, 0, -1).$$

$$S_4 : z = c \quad \forall (x, y) \in K, \quad \vec{n} = (0, 0, 1).$$

Calculem $fl_s = fl_{s_1} + fl_{s_2} + fl_{s_3} + fl_{s_4}$:

$$fl_{s_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^c \langle (b \cos \theta, b \sin \theta \cdot z, b \cos \theta), (b \cos \theta, b \sin \theta, 0) \rangle dz d\theta = \pi b^2 c + \frac{\pi b^2 c^2}{2}$$

$$fl_{s_2} = -\pi a^2 c - \frac{\pi a^2 c^2}{2}$$

$$fl_{s_3} = \int_K \langle (x, 0, x), (0, 0, -1) \rangle dxdy = 0$$

$$fl_{s_4} = \int_K \langle (x, cy, x + c^2), (0, 0, 1) \rangle dxdy = \int_K (x + c^2) dxdy = \pi c^2 (b^2 - a^2)$$

Llavors: $fl_s = \pi(b^2 - a^2) \left(c + \frac{3}{2} c^2 \right)$. D'altra banda, si Ω és tal que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$,

$$\int_{\Omega} \text{div } F dxdydz = \int_{\Omega} (1 + 3z) dxdydz \underset{\text{coord. cilind.}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r dr \int_0^c (1 + 3z) dz = \pi(b^2 - a^2) \left(c + \frac{3}{2} c^2 \right).$$

$$\text{Així es té } \int_S \langle \vec{F}, \vec{dS} \rangle = \int_{\Omega} \text{div } F dxdydz.$$

Examen 01-04-04

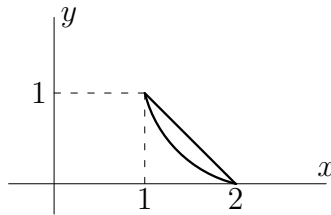
1. El canvi de variables $(x, y) = T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectangle $D^* = [1, 2] \times [1, 3]$ en la regió $D = T(D^*)$. L'àrea de D és
- (a) $64/7$. (b) π . (c) $160/3$. (d) $39/5$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $JT = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$

$$\text{Àrea } D = \int_1^2 \left(\int_1^3 4(u^2 + v^2) dv \right) du = \frac{160}{3}.$$

2. Al canviar l'ordre d'integració $\int_0^1 dy \int_{2-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2-y} f(x, y) dx$ es transforma en
- (a) $\int_1^2 dx \int_{1+\sqrt{4x-x^2-3}}^{2-x} f(x, y) dy$. (b) $\int_1^2 dx \int_{1-\sqrt{4x-x^2-3}}^{2-x} f(x, y) dy$.
- (c) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2-x} f(x, y) dy$. (d) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy$.
- (e) Cap de les anteriors.

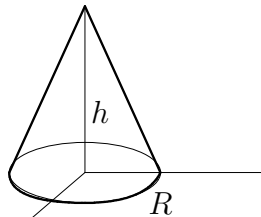
Resolució: Recta: $y = 2 - x$. Circumferència: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.



3. El volum del sòlid $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) \right\}$, on R i h són constants estrictament positives, és:

- (a) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. (b) $V = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{h}$. (c) $V = \frac{1}{3}\pi \frac{h}{R^2}$. (d) $V = \frac{1}{3} \frac{\pi}{R^2 h}$.
- (e) V no està acotat.

Resolució: Volum $= \int_V 1 dx dy dz = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h(1-r/R)} dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.



4. El centre de masses del sòlid $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) \right\}$, on R i h són constants estrictament positives, suposant que la densitat és constant ρ , és:

- (a) $\left(0, 0, \frac{h}{4}\right)$. (b) $\left(0, 0, \frac{h}{3}\right)$. (c) $\left(\frac{h}{3}, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}\right)$. (d) $\left(\frac{h}{3}, \frac{h}{3}, \frac{h}{3}\right)$.
 (e) No està definit perquè el sòlid V no és acotat.

Resolució: Per simetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$; com $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}(z-h)^2$; $\rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h(1-\frac{r}{R})} z dz = \rho \frac{\pi R^2 h^2}{12}$. Dividint per la massa que és $\frac{1}{3}\rho\pi R^2 h$, obtenim que $\bar{z} = h/4$; aleshores $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, h/4)$.

5. Calculeu el volum de la regió $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2x + z \leq 0, z \geq 0\}$

- (a) $\frac{4\pi}{3}$. (b) $\frac{\pi}{2}$. (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{2}{3}$. (e) $\frac{\pi}{4}$.

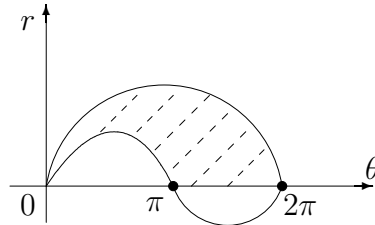
Resolució: $x^2 + y^2 - 2x + z = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 \leq 1-z$; canvi: $\begin{cases} x-1 = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$\text{Vol} = 2\pi \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z}} r dr = \pi \int_0^1 (1-z) dz = \frac{\pi}{2}.$$

6. Calculeu l'àrea de la regió que, expressada en polars, és $\left\{(r, \theta) : a \sin \theta \leq r \leq 2a \sin \frac{\theta}{2}\right\}$

- (a) $\frac{7\pi a^2}{4}$. (b) $\frac{3\pi a^2}{2}$. (c) $6a$. (d) $8a^2\pi$. (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2a \sin \frac{\theta}{2}} r dr - \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a \sin \theta} r dr = \frac{7\pi a^2}{4}$.



7. Calculeu el centre de masses de $A = \{(x, y, z) : z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, si la densitat en cada punt és la distància al pla $z = 0$.

- (a) $\left(0, 0, \frac{248}{225}\right)$. (b) $\left(0, 0, \frac{355}{290}\right)$. (c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. (d) $\left(0, 0, \frac{9}{4}\right)$.
 (e) Cap de les anteriors.

Resolució: $z_G = \frac{\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^4 \sin^2 \phi \cos \phi dr}{\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^3 \sin \phi \cos \phi dr} = \frac{248}{225}$.

8. Sigui $I = \int_{[1,2] \times [3,5]} e^{x^2+y^2} dx dy$. Aleshores, es compleix:

- (a) $2e^{17} \leq I \leq 4e^{18}$. (b) $4e^2 \leq I \leq 4e^5$. (c) $2e^{10} \leq I \leq 2e^{29}$.
 (d) $2e^{25} \leq I \leq 2e^{28}$. (e) Cap de les anteriors.

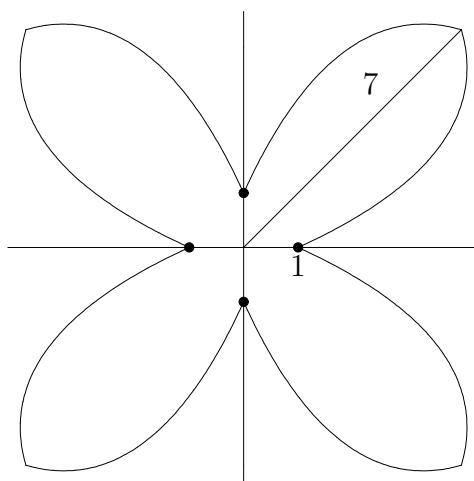
Resolució: $2 \min_A e^{x^2+y^2} \leq I \leq 2 \max_A e^{x^2+y^2}$, on $A = [1, 2] \times [3, 5]$.

Examen 28-06-04

1. (a) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $r = 4 - 3\cos(4\alpha)$.
 (b) Sigui C la corba d'origen $(-1, 0, 0)$, final $(1/3, 0, 0)$ i d'equacions $3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4 + 8x^3 - 24xy^2 + 6x^2 + 6y^2 - 1 = 0, y \geq 0, z = 0$.
 Calculeu la circulació del camp $F(x, y, z) = (3x^2y + 1, x^3, x)$ al llarg de C .
 (Observació: Descomponeu $F = F_1 + F_2$, on $F_1 = (3x^2y + 1, x^3, 0)$ i $F_2 = (0, 0, x)$.)

Resolució:

(a) Àrea = $4 \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{4-3\cos(4\alpha)} r dr = \frac{41\pi}{2}$.



(b) $F = F_1 + F_2$, on $F_1 = \nabla f$ i $f = x^3y + x$ i $F_2 = (0, 0, x)$. Per tant,

$$\int_c \langle F, dl \rangle = \int_c \langle \nabla f, dl \rangle + \int_c \langle F_2, dl \rangle \stackrel{\text{T.N.L.}}{=} \left(f\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right) - f(-1, 0, 0) \right) + \int_c \underbrace{\langle F_2(\sigma(t)), \sigma'(t) dt \rangle}_0 = \frac{4}{3}$$

2. Considereu la superfície $S = S_1 \cup S_2$

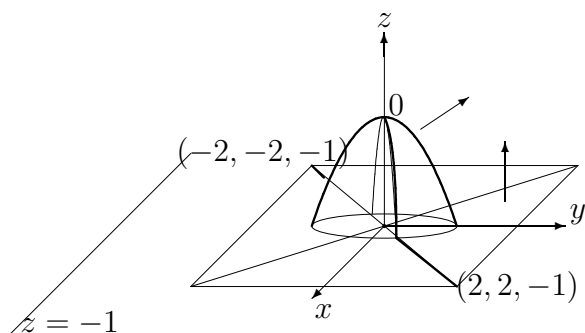
$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z = 0, \quad z \geq -1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : z = -1, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq 2, \quad x^2 + y^2 \geq 1\}$$

orientada pel vector normal $(2x, 2y, 1)$ a S_1 i per $(0, 0, 1)$ a S_2 . Calculeu:

- (a) Flux del camp $F = (xy^2, x^2y, z + 2)$ a través de S .
 (b) Circulació de F sobre ∂S amb l'orientació induïda.

Resolució:



$$(a) \int_M \langle F, dS \rangle = \int_{-2}^2 dx \int_{-2}^2 dy = 16; M = \{z = -1, (x, y) \in [-2, 2]^2\};$$

$$\int_D \langle F, dS \rangle = A(D) = \pi;$$

$$D = \{z = -1, x^2 + y^2 \leq 1\}; W = \{z \geq -1, z \leq -x^2 - y^2\}$$

$$\int_W \operatorname{div} F = \int_{S_1} \langle F, dS \rangle - \underbrace{\int_D \langle F, dS \rangle}_{=\pi}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (x^2+y^2+1) \int_{-1}^{-(x^2+y^2)} dz = \frac{2\pi}{3}; \quad \int_S \langle F, dS \rangle = \underbrace{16 - \pi}_{S_2} + \underbrace{(3\pi/2) + \pi}_{S_1} = \\ & 16 + \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Com que } \operatorname{rot} F = 0 \text{ i } \partial S \text{ és una corba tancada, es té: } \int_{\partial S} \langle F, dl \rangle = 0.$$

3. Sigui W un sòlid de \mathbb{R}^3 , simètric respecte del pla xy . Notem

$$W^+ = \{(x, y, z) \in W \mid z \geq 0\} \text{ i } W^- = \{(x, y, z) \in W \mid z \leq 0\}.$$

Suposem que per a tot $(x, y, z) \in W$ la densitat ρ verifica $\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$.

$$(a) \text{ Justifiqueu la igualtat } \int_{W^-} z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz = - \int_{W^+} w \cdot \rho(u, v, w) du dv dw.$$

(b) Dedueïu de (a) que el centre de gravetat de W està en el pla $z = 0$.

(c) Sigui $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1\}$, amb densitat $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$. Trobeu el centre de gravetat de W .

(d) Mateixa densitat i pregunta que a (c), però ara essent

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

(Nota: Per fer els apartats (c) i (d) no és imprescindible haver fet (a) i (b).)

Resolució:

$$(a) \text{ Fem el canvi de variable: } (x, y, z) = T(u, v, w) = (u, v, -w). \text{ Llavors, } W^- = T(W^+), \\ JT = -1 \text{ i per tant, } \int_{W^-} z \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^+} -w \rho(u, v, w) | -1 | du dv dw = \\ - \int_{W^+} w \rho(u, v, w) du dv dw = -I.$$

$$(b) \quad \bar{z} = \frac{\int_W z\rho(x, y, z)dxdydz}{\int_W \rho(x, y, z)dxdydz} = \frac{\int_{W^+} z\rho(x, y, z)dxdydz + \int_{W^-} z\rho(x, y, z)dxdydz}{\text{Massa}(W)} =$$

$$= \frac{I - I}{\text{Massa}(W)} = 0.$$

(c) Per simetria, $\bar{z} = 0$, segons (b). Però també $\bar{x} = \bar{y} = 0$, ja que W també és simètric respecte dels plans $x = 0$ i $y = 0$ i

$$\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z), \quad \rho(x, -y, z) = \rho(x, y, z).$$

(d) Per simetria, $\bar{z} = 0$. També per simetria, $\bar{x} = \bar{y}$. Només cal, doncs, calcular \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\int_W x\rho(x, y, z)dxdydz}{\int_W \rho(x, y, z)dxdydz}$$

$$\int_W (x^2 + y^2)z^2dxdydz \stackrel{\substack{\text{canvi a} \\ \text{cilindriques}}}{=} \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot z^2 \cdot r dr d\theta dz = \frac{\pi}{12};$$

$$\int_W x(x^2 + y^2)z^2dxdydz = \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \cos \theta \cdot r^2 \cdot z^2 \cdot r dr d\theta dz = \frac{2}{15}.$$

És a dir, $\bar{x} = \bar{y} = \frac{(2/15)}{(\pi/12)} = \frac{8}{5\pi}$.

4. Sigui f la funció $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculeu les integrals

- (a) $\int_W f dx dy dz$, sent $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- (b) $\int_S f dS$, sent $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$.
- (c) $\int_\sigma f dl$, sent $\sigma(\theta) = (\theta \cdot \cos \theta, \theta \cdot \sin \theta, \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Resolució:

- (a) $\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot r^2 \cdot \cos \phi d\phi d\theta dr = \pi$.
- (b) $\int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} \cdot z \cdot \sqrt{2} \cdot z dz d\theta = \frac{4\pi}{3}$, on hem usat $\varphi(\theta, z) = (z \cdot \cos \theta, z \cdot \sin \theta, z)$, $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$, $\|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = z\sqrt{2}$.
- (c) $\int_\sigma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dl = \int_0^{2\pi} \theta \sqrt{2} \sqrt{2 + \theta^2} d\theta = \frac{4}{3} [(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1]$.