

POLITEXT

Pere Pascual Gainza, ed.

# Càlcul integral per a enginyers

EDICIONS UPC

# **Càlcul integral per a enginyers**

POLITEXT

Pere Pascual, ed. - Carles Bonet  
Albert Compta - Neus Cónsul  
Mercè Ollé - Agustí Roig

# **Càlcul integral per a enginyers**

EDICIONS UPC

Primera edició: setembre de 2002

Aquest llibre s'ha publicat amb la col·laboració  
de la Generalitat de Catalunya

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

© Els autors, 2002

© Edicions UPC, 2002  
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL  
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885  
Edicions Virtuals: [www.edicionsupc.es](http://www.edicionsupc.es)  
A/e: [edicions-upc@upc.es](mailto:edicions-upc@upc.es)

Producció: CPDA  
Av. Diagonal 647, ETSEIB, 08028 Barcelona

Dipòsit legal: B-13160-2002  
ISBN: 84-8301-627-3

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del copyright, sota les sancions establertes a la llei, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment, inclosos la reprografia i el tractament informàtic, i la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec públics.

# Índex

<b>Introducció</b>	<b>5</b>
<b>1 La noció d'integral de Riemann</b>	<b>7</b>
1.1 La integral definida d'una variable	7
1.2 Definició d'integral en un rectangle	8
1.3 Criteris d'integrabilitat	14
1.4 Integració en dominis més generals	18
1.5 Propietats de la integral	19
1.6 Integrals sobre regions de tres o més variables	21
<b>2 Càlcul d'integrals</b>	<b>23</b>
2.1 El Principi de Cavalieri	23
2.2 El teorema de Fubini	26
2.3 Exemples	30
2.4 Integrals en tres o més variables	36
2.5 Canvi de variables per a integrals dobles	38
2.6 Canvi de variables per a integrals de tres o més variables	44
2.7 Integrals múltiples impròpies	50
2.8 Integració aproximada	58
<b>3 Algunes aplicacions de les integrals múltiples</b>	<b>65</b>
3.1 Càlcul d'àrees i volums	65
3.2 Mitjana d'una funció	68
3.3 Massa d'un cos	70
3.4 Centre de masses	72
3.5 Moment d'inèrcia i energia cinètica	76
3.6 Potencial gravitacional	82
<b>4 Integració de funcions sobre corbes i superfícies</b>	<b>87</b>
4.1 Longitud d'una trajectòria	87
4.2 Integral de trajectòria	96
4.3 El concepte de superfície	98



# Introducció

Els plans d'estudis de les enginyeries i les llicenciatures científiques acostumen a contenir un capítol dedicat al Càlcul Integral en el qual s'aprofundeix, amb més o menys intensitat, en els conceptes i resultats d'aquesta branca de les matemàtiques. El llibre que teniu a les mans està basat en un curs de Càlcul Integral, corresponent a una assignatura de tercer quadrimestre, que els autors hem estat desenvolupant durant els darrers 12 anys a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona i és fruit de l'experiència adquirida en aquest llarg període.

El curs parteix de què l'estudiant coneix el Càlcul Diferencial d'una i diverses variables, així com la teoria d'integració en una variable, i que té coneixements elementals d'Àlgebra Lineal i Geometria. El contingut que proposem es pot dividir en dues parts: el càlcul integral de diverses variables i el càlcul vectorial.

Els tres primers capítols estan dedicats al càlcul integral de diverses variables i a les seves aplicacions. L'objectiu principal d'aquests capítols és fonamentar, des d'un punt de vista alhora intuïtiu i precís, el concepte d'integral i els mètodes de càlcul més importants, la integració iterada i el canvi de variables. Actualment és relativament senzill utilitzar mètodes computacionals per calcular integrals de forma efectiva, és per això que creiem que és important incidir en la definició d'integral, què és i per a què serveix. El capítol 3 recull algunes de les aplicacions més habituals del càlcul integral: el càlcul d'àrees i volums, el càlcul de masses, de centres de masses, i els moments d'inèrcia.

En el capítol 4 s'introdueixen les integrals de funcions sobre corbes i superfícies. Aprofitem aquest capítol per recordar com es tracten matemàticament aquests objectes, cosa que servirà alhora com a introducció de la segona part del curs, el càlcul vectorial.

Els dos darrers capítols estan dedicats a l'estudi integral dels camps vectorials, la seva circulació al llarg d'una trajectòria i el flux a través d'una superfície, i s'estableixen els teoremes integrals del càlcul vectorial: el teorema de Green, el teorema del rotacional o de Stokes i el teorema de la divergència o de Gauss. És indubtable l'interès d'aquesta mena d'estudi en les aplicacions i és per això que hem volgut il·lustrar la seva utilitat incorporant alguns elements de la mecànica de fluids, com l'equació de continuïtat i l'equació del moviment d'Euler, o de l'electromagnetisme, com les equacions de Maxwell.

Aquest és un llibre col·lectiu més enllà dels autors que signem el text, ja que ens sentim hereus

de l'experiència d'altres professors i companys que, al llarg dels darrers anys, han impartit l'assignatura i, també, de la interacció docent amb els molts estudiants que han passat per les nostres aules. Volem expressar aquí, a tots ells, el nostre agraïment. En especial, volem esmentar el nostre deute als professors F. Puerta, F. Guillén, A. Jorba i V. Navarro.

Per la composició del text i dels gràfics hem comptat amb la inestimable ajuda de Rosa Maria Cuevas. El professor J. L. Ruíz ens ha permès utilitzar el format de llibre dissenyat per ell. El lector apreciarà aquestes aportacions, que milloren la presentació del text.

Hem intentat presentar un curs equilibrat entre els aspectes teòrics i l'orientació pràctica que un text destinat als futurs enginyers ha de mantenir. P. Puig Adam, en el seu famós llibre *Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la física y técnica*, publicat per primer cop l'any 1944, ja feia referència a la necessitat d'establir aquest equilibri. Acabarem amb les paraules amb què l'admirat Puig Adam clou el seu pròleg: “[...] *entrego este libro al lector, deseándole feliz excursión por él ... y recuerdo grato*”.

Barcelona, març 2002

# La noció d'integral de Riemann

Donada una funció d'una variable  $f(x)$  la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

està connectada, com s'ha vist en el curs de Càlcul Infinitesimal, amb el càlcul de l'àrea limitada per la funció i l'eix real, i admet algunes interpretacions físiques que la fan especialment útil. Per exemple, la podem interpretar com la distància recorreguda per un mòbil amb velocitat donada per  $f(x)$  des de l'instant  $a$  fins a l'instant  $b$ .

Hi ha molts altres problemes similars, tan geomètrics com físics, que fan intervenir funcions de diverses variables. L'objectiu d'aquest primer capítol és introduir la noció d'integral corresponent. Per fer-ho, prendrem com a guia la definició d'integral d'una funció d'una variable, i ens restringirem sobretot al cas d'integrals de dues variables. Aquesta elecció del nombre de variables permet un desenvolupament més gràfic i intuïtiu de les idees que presentem, encara que els resultats seran certs en general.

## 1.1 La integral definida d'una variable

En aquest apartat, de caràcter introductori, repassarem succintament la definició d'integral d'una variable. Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció definida en un interval compacte de la recta real. Si  $f(x)$  és una funció positiva, el gràfic de  $f$  determina, amb l'eix d'abscisses, una àrea que volem calcular.

La idea de partida és prou simple, consisteix a aproximar l'àrea que es vol calcular per la suma de les àrees de certs rectangles, com ilustra la figura 1.1. Per fer-ho, es subdivideix el segment  $[a, b]$  en  $n$  intervals  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , de longitud  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , s'escullen punts  $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$  i es defineix la suma

$$S(x_i, c_i) = f(c_0)\Delta x_0 + \dots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

que s'anomena *la suma de Riemann associada a la partició*, i que correspon a la suma de les àrees dels rectangles que aproximen l'àrea sota el gràfic de  $f$ .

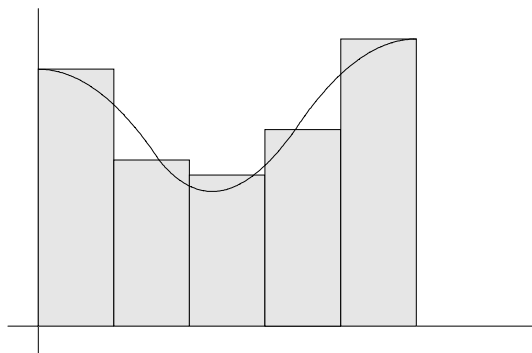


Figura 1.1: Aproximació de l'àrea per les àrees de rectangles

Les sumes de Riemann depenen de les subdivisions realitzades i dels punts intermedis  $c_i$  escollits. Per formalitzar la definició d'integral s'ha de fer un pas al límit: es diu que  $f$  és integrable en l'interval  $[a, b]$  d'integral  $I$  si, donat un nombre real qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix un  $\delta > 0$  tal que per a tota partició de  $[a, b]$  amb  $\Delta x_i < \delta$ , per a tot  $i$ , les sumes de Riemann associades satisfan que

$$|I - S(x_i, c_i)| < \varepsilon,$$

independentment dels punts  $c_i$  escollits. És a dir, fixat un marge d'error  $\varepsilon$  hi ha un  $\delta$  tal que les sumes de Riemann definides amb particions de longitud menor que  $\delta$  difereixen de  $I$  menys que  $\varepsilon$ .

Usualment s'escriu

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_n)\Delta x_n].$$

No totes les funcions són integrables. Si la funció  $f$  no està acotada podem fer les sumes de Riemann tan grans com vulguem: en efecte, podem escollir els punts  $c_i$  de manera que  $f(c_i)$  sigui tan gran com es vulgui i, per tant, la funció no és integrable. És per això que es restringeix l'atenció a les funcions acotades. L'acotació d'una funció, però, no assegura la integrabilitat, com mostra la coneguda funció de Dirichlet definida en l'interval  $[0, 1]$  i que pren valors 0 o 1 segons si el punt és racional o no.

## 1.2 Definició d'integral en un rectangle

Signi  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle de  $\mathbb{R}^2$  i  $f(x, y)$  una funció *acotada* definida en el rectangle  $R$ ,

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per definir la integral de  $f(x, y)$  en  $R$  seguirem el model indicat en l'apartat anterior en el cas d'una variable, amb alguna simplificació deguda a l'acotació de  $f$ .

Quan  $f(x, y)$  sigui una funció positiva determinarà un volum com el de la figura 1.2, que volem determinar. En general, si  $f$  no és necessàriament positiva, no podem parlar del volum

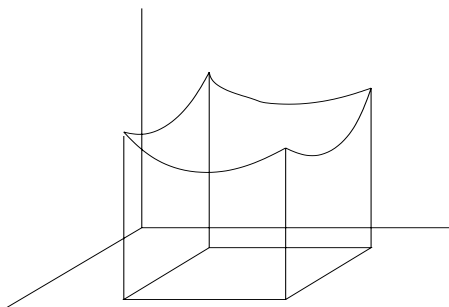


Figura 1.2: Volum sota un gràfic

determinat per  $f$ , en aquest cas volem determinar la integral de  $f$  en el rectangle  $R$ .

Com que  $f$  és una funció acotada, podem considerar els seus valors extrems

$$\begin{aligned} M &= \sup f(x, y), & (x, y) \in R, \\ m &= \inf f(x, y), & (x, y) \in R. \end{aligned}$$

És clar que la integral que volem determinar estarà entre els valors  $mA(R)$  i  $MA(R)$  (on  $A(R)$  és l'àrea del rectangle  $R$ ), és a dir, si  $I$  és el valor de la integral (pensem en el volum quan la funció és positiva, vegeu la figura 1.3), és clar que

$$m(b-a)(d-c) \leq I \leq M(b-a)(d-c).$$

Donat un nombre natural  $n \in \mathbb{N}$  definim la *partició regular d'ordre  $n$*  del rectangle  $R$  com la

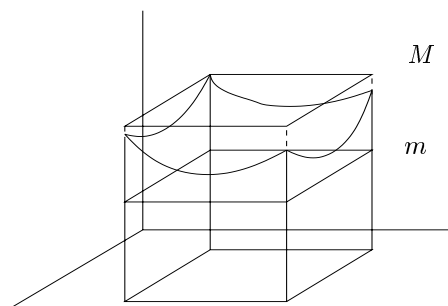


Figura 1.3: Acotació del volum sota un gràfic

partició de  $R$  en subrectangles  $R_{ij}$  donats per

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

on

$$\begin{aligned}x_i &= a + i \frac{b-a}{n}, & i = 0, 1, \dots, n \\y_i &= c + i \frac{d-c}{n}, & i = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}$$

En la figura 1.4 es mostra la partició regular d'ordre 3 d'un rectangle  $R$ . La funció  $f$  està

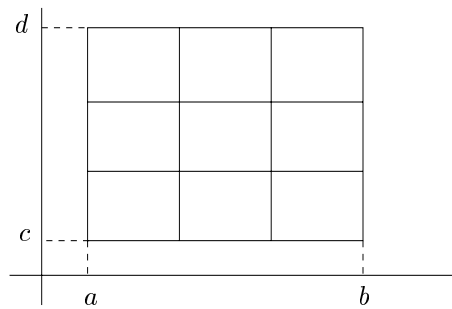


Figura 1.4: Partició regular d'ordre 3 d'un rectangle

acotada sobre cadascun dels rectangles  $R_{ij}$ . Siguin

$$\begin{aligned}M_{ij} &= \sup f(x, y), & (x, y) \in R_{ij}, \\m_{ij} &= \inf f(x, y), & (x, y) \in R_{ij}.\end{aligned}$$

**1.2.1 Definició** *Es defineix la suma superior  $n$ -èsima de  $f$  en el rectangle  $R$  segons*

$$S_n(f, R) = \sum_{i,j} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

*Anàlogament, es defineix la suma inferior  $n$ -èsima per*

$$s_n(f, R) = \sum_{i,j} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

En el cas d'una funció positiva, aquestes sumes representen les sumes dels volums de base  $R_{ij}$  i alçades  $M_{ij}$  i  $m_{ij}$ , respectivament.

Observem que, a causa de la regularitat de la partició, les àrees dels rectangles  $R_{ij}$  donades pels productes  $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$  són totes iguals a  $(b-a)(d-c)/n^2$  i, per tant, les sumes superiors i inferiors es poden escriure de la forma

$$\begin{aligned}S_n(f, R) &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} M_{ij}, \\s_n(f, R) &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} m_{ij}.\end{aligned}$$

És clar que, per a tot  $n$ , se satisfà que

$$s_n(f, R) \leq S_n(f, R),$$

i, més generalment, es pot comprovar que donats dos nombres qualssevol  $n$  i  $m$ , se satisfà que

$$s_n(f, R) \leq S_m(f, R).$$

**1.2.2 Definició** *Es diu que la funció  $f$  és integrable en el rectangle  $R$  si existeixen i són iguals els límits de les successions  $s_n(f, R)$  i  $S_n(f, R)$ . Al valor comú l'anomenarem la integral de  $f$  en  $R$ .*

És a dir, la integral de  $f$ , en cas d'existir, és igual a

$$\int_R f(x, y) dx dy = \lim S_n(f, R) = \lim s_n(f, R).$$

En termes geomètrics, diem que una figura de l'espai ordinari determina un volum si és possible aproximar-la amb un marge d'error prefixat, tant des de dintre com des de fora, per una suma de volums de paral·lelepípedes.

**1.2.3 Observació** Es pot demostrar que, com en el cas de funcions d'una variable, el valor d'una integral és el límit de les sumes de Riemann: partim el rectangle  $R$  en subrectangles  $R_{ij}$ , no necessàriament de forma regular, escollim punts  $c_{ij} \in R_{ij}$ , i definim la suma de Riemann associada per

$$S(R_{ij}, c_{ij}) = \sum f(c_{ij})A(R_{ij}).$$

Aleshores se satisfà que

$$\int_R f(x, y) dx dy = \lim_{A(R_{ij}) \rightarrow 0} S(R_{ij}, c_{ij}).$$

Sovint es parla que  $A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$  és l'element d'àrea i que la integral és la suma dels volums damunt dels elements d'àrea infinitesimals. Quan parlem en aquests termes voldrà dir exactament que es dona la igualtat expressada anteriorment.

**1.2.4 Exemples** Per il·lustrar la definició d'integral, anem a presentar dos exemples sobre el quadrat  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , un d'una funció que no és integrable i l'altre del càlcul d'una integral.

1. Considerem la funció definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Com que els nombres racionals són densos en  $\mathbb{R}$ , els extrems de la funció sobre la partició  $n$ -èsima estan donats per

$$M_{ij} = 1, \quad m_{ij} = 0,$$

i, per tant, les successions de sumes superiors i inferiors són constants:

$$\begin{aligned} S_n(f, R) &= 1, \\ s_n(f, R) &= 0; \end{aligned}$$

i, en definitiva, en resulta que

$$\lim S_n(f, R) \neq \lim s_n(f, R),$$

és a dir, la funció no és integrable.

2. Considerem ara la funció

$$g(x, y) = 1 - x.$$

En aquest cas els valors extrems de  $g$  sobre el rectangle  $R_{ij}$  corresponen a

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 1 - x_i = 1 - \frac{i}{n}, \\ m_{ij} &= 1 - x_{i+1} = 1 - \frac{i+1}{n}, \end{aligned}$$

com ho mostra una simple inspecció del seu gràfic (figura 1.5). Així les sumes superiors asso-

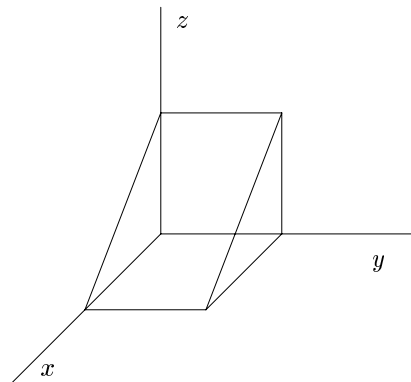


Figura 1.5: Gràfic de la funció  $f(x, y) = 1 - x$

ciades són:

$$\begin{aligned}
 S_n(f, R) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} M_{ij} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_i n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n + (n-1) + \cdots + 1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2n} \\
 &= \frac{n+1}{2n},
 \end{aligned}$$

i, per tant, trobem que

$$\lim S_n(g, R) = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2},$$

que és el valor esperat, ja que es tracta de la meitat del volum d'un cub de costat unitat. Si realitzem el càlcul amb les sumes inferiors trobarem el mateix valor i, per tant, podem dir que  $g$  és integrable en  $R$  i que la seva integral és

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (1-x) dx dy = \frac{1}{2}.$$

*Advertència.* Com hem assenyalat anteriorment, aquest càlcul pretén il·lustrar la definició d'integral, però aquest no és el mètode natural de calcular integrals ja que, en general, comporta moltes dificultats. Resseguint l'exemple anterior podem assenyalar que hi ha hagut, com a mínim, tres bones coincidències que no trobarem en general:

1. Els valors extrems  $M_{ij}$  i  $m_{ij}$  s'han pogut calcular fàcilment perquè la funció era prou simple.
2. Hem pogut donar una fórmula tancada per a les sumes superiors, cosa que difícilment succeirà.
3. Hem pogut realitzar el càlcul del límit de la successió de les sumes superiors.

D'aquests comentaris se segueix la necessitat de desenvolupar tècniques que permetin reconèixer fàcilment les funcions integrables i realitzar el càlcul d'integrals. Els criteris d'integració els abordarem en els propers apartats, mentre que el càlcul efectiu d'integrals serà l'objecte del proper capítol. Això no vol dir que la definició d'integral només tingui interès teòric. Ben al contrari, amb la possibilitat d'utilitzar potents eines de càlcul, els mètodes numèrics basats en la definició d'integral com a límit han esdevingut corrents.

### 1.3 Criteris d'integrabilitat

El primer criteri general d'integrabilitat el dóna el resultat següent.

**1.3.1 Teorema** *Si  $f$  és una funció contínua sobre un rectangle  $R$ , aleshores  $f$  és integrable a  $R$ .*

*Demostració.* No reproduïrem de forma completa la demostració d'aquest teorema; assenyalem, però, la línia general del raonament. Partint de què existeixen els límits de les sumes inferiors i superiors associades a  $f$ , el que s'ha de provar és que

$$\lim_n (S_n - s_n) = 0,$$

o, equivalentment, que donat un marge d'error  $\varepsilon$  podem aconseguir la desigualtat

$$S_n - s_n < \varepsilon,$$

per a  $n$  prou gran. Si escrivim de forma completa aquesta diferència en resulta que

$$S_n - s_n = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}).$$

Com que la funció és contínua, la diferència  $M_{ij} - m_{ij}$  es pot fer tan petita com es vulgui augmentant l'ordre  $n$  de la partició, en particular podem aconseguir que se satisfaci que

$$M_{ij} - m_{ij} < \delta = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}.$$

Aquí hem de fer esment d'una subtileta matemàtica (coneguda com a *continuitat uniforme*) que assegura que aquesta acotació es pot realitzar simultàniament en tots els subrectangles de la partició  $R_{ij}$ . Acceptarem aquest fet sense donar-ne més detalls. Finalment, podem acotar la diferència entre les sumes superiors i inferiors segons

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{i,j}) \\ &< \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j} \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \varepsilon = \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aquest resultat dóna un criteri còmode d'integrabilitat de forma que, per exemple, podem assegurar l'existència de les integrals

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} (1-x) dx dy, \quad \int_{[1,2] \times [0,5]} \frac{xy}{x^2+1} dx dy.$$

És, però, clarament insuficient, ja que hi ha funcions discontinües que són integrables com, per exemple, la funció esglaonada definida en el rectangle  $[0, 2] \times [0, 1]$  segons

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

que té el gràfic representat en la figura 1.6.

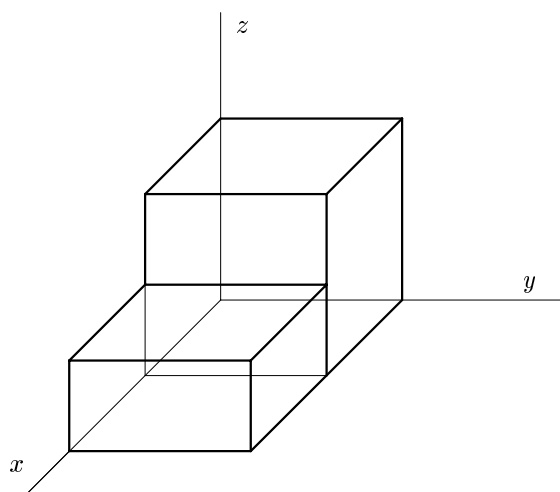


Figura 1.6: Gràfic d'una funció esglaonada

En efecte, en aquest cas el volum sota el gràfic de  $f$  és  $2 + 1 = 3$ .

D'altra banda, en l'apartat anterior hem vist un exemple de funció (fortament discontinüa) que no és integrable. La pregunta que això suggereix és: quina mena de discontinuïtat pot admetre una funció integrable? Intuïtivament, la resposta és que les discontinuïtats de  $f$  formen un subconjunt del rectangle  $R$  que no tingui àrea. Anem a descriure això de forma més precisa. En la definició següent entendrem per *regió poligonal* del pla tota regió de  $\mathbb{R}^2$  formada per superposició d'un nombre finit de rectangles o trapezoides.

**1.3.2 Definició** *Direm que un subconjunt  $B$  de  $\mathbb{R}^2$  és un conjunt d'àrea zero si es pot incloure en una figura poligonal d'àrea arbitràriament petita, és a dir, si, donat qualsevol  $\varepsilon > 0$ , existeix una figura poligonal del pla,  $P$ , amb  $B \subseteq P$  i*

$$\text{àrea}(P) < \varepsilon.$$

### 1.3.3 Exemples

1. Tot conjunt  $B$  format per un nombre finit de punts,  $B = \{p_1, \dots, p_r\}$ , és un conjunt d'àrea zero. En efecte, és suficient prendre quadrats  $P_i$  de costat  $\sqrt{\varepsilon}/r$  i centrats en cadascun dels

punts  $p_i$ , amb la qual cosa tindrem una figura poligonal d'àrea

$$\text{àrea}(P) \leq \sum_{i=1}^r \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\right)^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^r \frac{1}{r^2} = \frac{\varepsilon}{r} \leq \varepsilon.$$

2. El conjunt imatge  $C$  d'una corba parametritzada  $C^1$  del pla,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C = \gamma[a, b]$ , és d'àrea zero. En efecte, si  $\ell$  és la longitud de la corba, considerem un nombre finit de punts  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sobre  $C$  tals que la longitud entre  $p_i$  i  $p_{i+1}$  sigui  $< \ell/n$ , i considerem un quadrat de costat  $2\ell/n$  centrat en cadascun d'aquests punts (vegeu la figura 1.7).

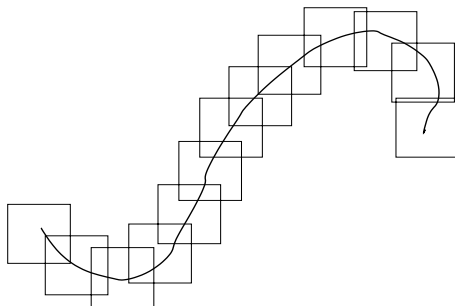


Figura 1.7: Una corba rectificable té àrea zero

D'aquesta forma s'obté una regió poligonal d'àrea acotada per

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2\ell}{n} \frac{2\ell}{n} = \frac{4\ell^2}{n^2} (n+1)$$

que, per a  $n$  prou gran, és tan petita com es vulgui.

En particular, els gràfics de les funcions  $C^1$  d'una variable,  $y = \varphi(x)$  o  $x = \psi(y)$ , definides en un interval finit donen lloc a conjunts d'àrea zero.

**1.3.4 Observació** La hipòtesi de què les corbes parametritzades estan definides per funcions  $\gamma$  derivables amb continuïtat s'ha usat, en l'exemple anterior, per assegurar que  $C$  té una longitud finita

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

ja que la continuïtat de  $\gamma'(t)$  assegura l'existència d'aquesta integral (vegeu un estudi més complet d'aquest punt al capítol 4). Aquesta hipòtesi es pot rebaixar en algunes circumstàncies. Per exemple, els gràfics de funcions contínues en un interval compacte, és a dir, corbes del tipus  $(x, \varphi(x))$  o  $(\psi(y), y)$  on  $\varphi, \psi$  són funcions contínues, són d'àrea zero. No és cert però que, en general, la imatge d'una aplicació contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sigui d'àrea zero, vegeu els exemples 4.1.6.

Una manera de generar conjunts d'àrea zero la proporciona el resultat següent, de demostració immediata.

**1.3.5 Proposició** *La unió finita de conjunts d'àrea zero és un conjunt d'àrea zero.* ■

Així podem generalitzar l'exemple 2 de la forma següent:

**1.3.6 Corollari** Si  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  és una unió finita de conjunts imatge de corbes  $C^1$ , aleshores  $B$  és un conjunt d'àrea zero. ■

Amb aquests preliminars podem establir una generalització del teorema anterior.

**1.3.7 Teorema** *Si  $f$  una funció acotada definida sobre un rectangle  $R$ . Notem*

$$B = \{(x, y) \in R / f \text{ no és contínua en } (x, y)\}.$$

*Si  $B$  és un conjunt d'àrea zero, aleshores  $f$  és integrable a  $R$ .*

*Demostració.* Amb les notacions de 1.2, veurem que la diferència entre les sumes superiors i les sumes inferiors associades a una partició pot fer-se tan petita com es vulgui.

Si  $R_{ij}$  una partició de  $R$ . Aleshores podem escriure:

$$S_n(f) - s_n(f) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Descomponem aquesta suma en dos termes segons si el rectangle  $R_{ij}$  talla  $B$  o no:

$$S_n(f) - s_n(f) = \sum_{R_{ij} \cap B = \emptyset} (M_{ij} - m_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) + \sum_{R_{ij} \cap B \neq \emptyset} (M_{ij} - m_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Prenent  $n$  prou gran i com que la funció és contínua fora de  $B$ , podem suposar que se satisfà que

$$M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{2A(R)},$$

per als  $i, j$  del primer sumand. Així, aquest terme està acotat superiorment per

$$\sum (M_{ij} - m_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leq \frac{\varepsilon}{2A(R)} \sum (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Respecte al segon sumand, com que  $B$  és un conjunt d'àrea zero, existeix un  $n$  a partir del qual la suma de les àrees dels rectangles  $R_{ij}$  que tallen  $B$  és menor que  $\varepsilon/2(M - m)$  i, per tant,

$$\begin{aligned} \sum_{R_{ij} \cap B \neq \emptyset} (M_{ij} - m_{ij})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) &\leq \sum (M - m)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \\ &< (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

En definitiva, trobem que  $S_n(f) - s_n(f) < \varepsilon$ . ■

Així, per exemple, una aplicació directa d'aquest resultat permet assegurar l'existència de la integral sobre  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  de la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ 2(x^2 + y^2) & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$$

ja que les discontinuïtats dibuixen una circumferència, que és un conjunt d'àrea zero.

## 1.4 Integració en dominis més generals

El concepte de conjunt d'àrea zero no solament dona un criteri d'integrabilitat com l'enunciat anteriorment, sinó que, a més, permet estendre la noció d'integral sobre un rectangle a regions més generals.

Direm que  $D$  és un *domini elemental* si és un subconjunt compacte (és a dir, tancat i acotat) del pla que té frontera d'àrea zero. Segons els exemples esmentats en l'apartat anterior, un domini acotat limitat per un nombre finit de corbes diferenciables serà un domini elemental. Així, per exemple, un cercle o un rectangle són dominis elementals.

Observem que donat que un domini elemental  $D$  és acotat, podem considerar un rectangle  $R$  que l'inclogui,  $D \subseteq R$ . Si  $f$  és una funció *acotada* definida sobre un domini elemental  $D$ , considerem l'extensió de  $f$  al rectangle  $R$  definida en la forma

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

**1.4.1 Definició** *Es diu que  $f$  és integrable a  $D$  si  $\tilde{f}$  és integrable a  $R$ , i en aquest cas es defineix la integral de  $f$  a  $D$  per*

$$\int_D f(x, y) \, dx dy := \int_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy.$$

Cal observar que el fet que els conjunts d'àrea zero no distorsionin la integrabilitat d'una funció fa que la definició tingui sentit. D'altra banda no és difícil comprovar que la definició és consistent, en el sentit que no depèn del rectangle  $R$  escollit.

**1.4.2 Definició** *Sigui  $D$  una regió elemental del pla. Es defineix l'àrea de  $D$  segons*

$$A(D) = \int_D dx dy.$$

Els resultats de l'apartat anterior s'estenen sense dificultat i donen:

**1.4.3 Teorema** *Sigui  $f$  una funció acotada definida sobre un domini elemental  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Si  $f$  és contínua llevat d'un conjunt d'àrea zero, aleshores  $f$  és integrable a  $D$ . ■*

En particular, les funcions contínues són integrables sobre dominis elementals. Així, per exemple, podem assegurar l'existència de les integrals

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2 - xy}{x^2 + y^2 + 1} dx dy, \quad \int_{x^2 \leq y \leq 1} \frac{3 \cos x}{y^2 + 1} dx dy.$$

**1.4.4 Observació** En algunes situacions és convenient integrar sobre conjunts oberts de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  és un obert tal que  $D = \overline{U}$  és un domini elemental (en particular,  $U$  està acotat), i  $f$  és una funció *acotada* sobre  $U$ , es defineix la integral de  $f$  en  $U$  segons

$$\int_U f(x, y) dx dy = \int_D \overline{f}(x, y) dx dy,$$

on  $\overline{f}(x, y)$  és una extensió qualsevol de  $f$  a  $D$ . El fet que la vora de  $D$  sigui d'àrea zero assegura que la integral així definida no depèn de l'extensió  $\overline{f}$  escollida.

## 1.5 Propietats de la integral

Un cop establert el concepte d'integral doble, podem enunciar-ne les propietats bàsiques, que són completament anàlogues a les propietats corresponents per a les integrals de funcions d'una variable.

En tot aquest apartat  $D$  serà un domini elemental del pla i  $f, g$  funcions integrables sobre  $D$ . Les següents propietats de la integral es deriven fàcilment de les definicions:

1. *Linealitat*:  $f + g$  és una funció integrable, i se satisfà que

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g.$$

2. *Homogeneïtat*: si  $c$  és una constant,  $cf$  és una funció integrable, i se satisfà que

$$\int_D cf = c \int_D f.$$

3. *Monotonia*: si en tot punt de  $D$  es té que  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , aleshores

$$\int_D f \geq \int_D g.$$

Aplicant aquesta desigualtat a

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

en resulta la desigualtat

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|.$$

4. *Additivitat*: descomponem  $D$  en la forma  $D = D_1 \cup D_2$ , on  $D_1$  i  $D_2$  són dominis elementals que només tenen contacte a la frontera. Si  $f$  és una funció integrable sobre cadascun dels  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , aleshores  $f$  és integrable a  $D$  i se satisfà que

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Una conseqüència important de la monotonia és:

**1.5.1 Teorema del valor mig** *Sigui  $f$  una funció integrable en un domini elemental  $D$ , i notem*

$$\begin{aligned} m &= \min_{(x,y) \in D} f(x,y), \\ M &= \max_{(x,y) \in D} f(x,y), \end{aligned}$$

*els valors mínim i màxim de  $f$  a  $D$ . Aleshores, se satisfà que*

$$mA(D) \leq \int_D f(x,y) \, dx dy \leq MA(D).$$

*En efecte, el resultat se segueix immediatament d'aplicar la propietat de monotonia a les desigualtats*

$$m \leq f(x,y) \leq M. \quad \blacksquare$$

En el cas en el qual  $f(x,y)$  és una funció contínua i  $D$  és connex, el teorema de Bolzano assegura que tot nombre entre  $m$  i  $M$  és el valor de la funció  $f$  en algun punt  $(x_0, y_0)$  de  $D$ , i, per tant, el resultat anterior pot enunciar-se de la forma següent.

**1.5.2 Corollari** *Sigui  $f$  una funció contínua en un domini elemental connex  $D$ . Existeix un punt  $(x_0, y_0) \in D$  tal que*

$$\int_D f(x,y) \, dx dy = f(x_0, y_0)A(D). \quad \blacksquare$$

El teorema del valor mig pot servir per acotar el valor d'una integral. Així per exemple, és fàcil comprovar que se satisfà que

$$4\pi \leq \int_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} \, dx dy \leq 4e^4\pi.$$

**1.5.3 Observacions** De les propietats de la integral, i més particularment del teorema del valor mig i de la propietat d'additivitat, se segueixen dos fets remarcables: la continuïtat de la integral respecte de la funció i respecte del domini.

1. *La integral varia contínuament amb la funció.* De fet, si  $f(x,y)$  i  $g(x,y)$  són funcions integrables en un domini  $D$  i se satisfà que

$$|f(x,y) - g(x,y)| < \varepsilon,$$

per a tot  $(x, y) \in D$ , aleshores es té que

$$\left| \int_D f(x, y) \, dx dy - \int_D g(x, y) \, dx dy \right| \leq \int_D |f(x, y) - g(x, y)| \, dx dy \\ \leq \varepsilon A(D).$$

Així, si  $\varepsilon$  és molt petit, els valors de les integrals de  $f$  i de  $g$  són molt propers.

2. *La integral depèn contínuament del domini d'integració.* Suposem que  $D^* = D \cup D'$ , on  $D^*$ ,  $D$  i  $D'$  són dominis elementals del pla, que la intersecció  $D \cap D'$  és d'àrea zero i que l'àrea de  $D'$  és molt petita,  $A(D') < \varepsilon$ . Per l'additivitat de la integral, per a tota funció integrable  $f(x, y)$  se satisfà que

$$\int_{D^*} f(x, y) \, dx dy = \int_D f(x, y) \, dx dy + \int_{D'} f(x, y) \, dx dy.$$

Així, si  $M$  és una cota de la funció  $f$  en  $D'$ , és a dir, si se satisfà que  $|f(x, y)| < M$  per a tot  $(x, y) \in D'$ , aleshores es té que

$$\left| \int_{D'} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \int_{D'} |f(x, y)| \, dx dy \leq M A(D') < M\varepsilon,$$

i, per tant, la diferència entre les integrals de la funció  $f$  en  $D$  o en  $D^*$  és menor que  $M\varepsilon$ .

## 1.6 Integrals sobre regions de tres o més variables

Cadascuna de les definicions i resultats que hem establert per a integrals dobles admet una extensió natural per a tres o més variables. Per exemple, en el cas de tres variables començaríem integrant una funció acotada  $f$  sobre un interval de la forma

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f],$$

prenent les sumes superiors i inferiors associades a una partició de  $B$ . En aquest cas una partició regular de  $B$  correspondrà a una subdivisió en blocs

$$B_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

on

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad y_j = c + j \frac{d-c}{n}, \quad z_k = e + k \frac{f-e}{n}.$$

Així, si  $M_{ijk}$  indica el valor màxim de la funció  $f$  en el bloc  $B_{ijk}$ , les sumes superiors es defineixen segons

$$S(f, B) = \sum_{i,j,k} M_{ijk} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k) \\ = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)}{n^3} \sum_{i,j,k} M_{ijk}.$$

Anàlogament, es defineixen les sumes inferiors. La integral de  $f$  a  $B$  és aleshores

$$\int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \lim S_n(f, B) = \lim s_n(f, B),$$

entenent que una funció és integrable quan existeixen els límits indicats i són iguals.

A banda dels canvis de notació imposats pel canvi de dimensió, tots els resultats enunciats en els apartats 3, 4 i 5 es traslladen sense dificultat a la nova situació. Potser val la pena, però, fer una referència als dominis elementals de  $\mathbb{R}^3$ : són aquells subconjunts compactes  $B$  que tenen frontera de volum zero. S'entén que un conjunt  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  té volum zero si, fixat un nombre real  $\varepsilon > 0$  existeix un conjunt finit de cubs  $B_1, \dots, B_m$  de forma que  $C \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_m$  i  $\text{vol}(B_1) + \dots + \text{vol}(B_m) < \varepsilon$ . Per exemple, un rectangle  $R$  del pla té volum zero, ja que, donat  $\varepsilon$ , està inclòs en el cub  $R \times [-\delta, \delta]$  si prenem  $\delta < \varepsilon/A(R)$ . Reprenent els exemples de §1.3, remarcarem que els cossos limitats per un nombre finit de superfícies diferenciables són regions elementals.

Així, per exemple, una bola de radi  $R$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  és un domini elemental, o el cos limitat per dues funcions diferenciables sobre un rectangle,  $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$  (figura 1.8), és un domini elemental.

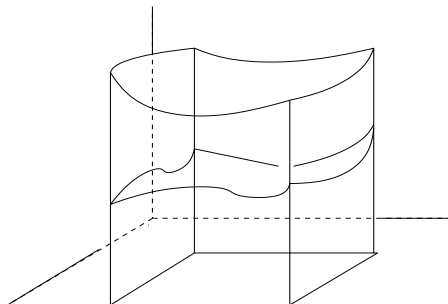


Figura 1.8: Un domini elemental de  $\mathbb{R}^3$

# Càlcul d'integrals

En el capítol anterior hem establert la noció de funció integrable, però no hem donat mètodes efectius per al càlcul d'integrals. En aquest capítol establirem dos resultats fonamentals per al càlcul d'integrals: el teorema de Fubini i el teorema de canvi de variables, que il·l amb diversos exemples.

El capítol inclou, a més, un apartat dedicat a les integrals impròpies de diverses variables, i acaba introduint algunes nocions elementals d'integració aproximada.

## 2.1 El Principi de Cavalieri

Dediquem aquest apartat a l'anomenat Principi de Cavalieri, ja que és un principi que motiva geomètricament els resultats que provarem en propers apartats, alhora que ha jugat un important paper històric en el desenvolupament del càlcul integral.

Donat un cos  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ , que suposarem compacte, és intuïtivament clar què entenem pel volum de  $V$ . De fet, en el cas de cossos prou regulars (com ara un paralelepípede, un cilindre, una esfera, ...) disposem de fórmules per calcular-ne els volums. Ara bé, com es pot calcular el volum d'un cos  $V$  en general? Anem a fer unes consideracions heurístiques que ens conduiran al Principi de Cavalieri.

El Principi de Cavalieri diu que podem calcular el volum del cos  $V$  com la “suma” de les àrees de les seccions obtingudes en llescar  $V$  per un feix de plans paral·lels. En particular, afirma que dos cossos amb les mateixes seccions tenen el mateix volum. Més concretament, suposem que considerem el pla secant a  $V$  definit per  $x = x_0$ ,  $a < x_0 < b$  (on  $a$  i  $b$  són els valors mínim i màxim, respectivament, de  $x$  a  $V$ ) i notem per  $A(x_0)$  l'àrea de la secció  $V \cap \{x = x_0\}$  (vegeu la figura 2.1).

S'obté així una funció d'una variable  $A(x)$ . Si interpretem ara que la “suma” de les àrees  $A(x)$  és la integral de  $A(x)$  entre  $a$  i  $b$ , el Principi de Cavalieri es concreta de la forma següent:

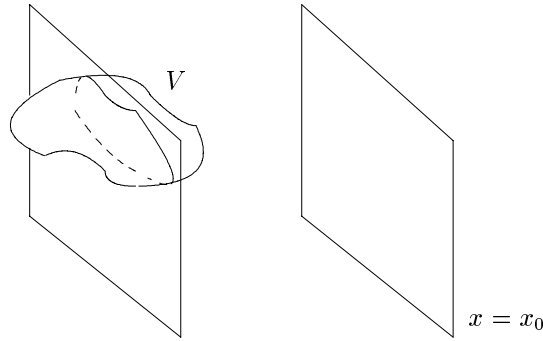


Figura 2.1: Secció d'un cos per un pla  $x = x_0$

*Principi de Cavalieri:*  $\text{vol}(V) = \int_a^b A(x) dx$ .

Caldrà, però, saber calcular les àrees  $A(x)$  per tal que aquest criteri sigui efectiu. Restringim-nos a una situació especial, on això sigui possible. Suposem que  $V$  correspon a un cos limitat per una funció positiva de dues variables  $f(x, y)$  definida en un rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ , és a dir,

$$V = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

En aquest cas, les àrees  $A(x)$  corresponen a les integrals d'una variable

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

i, pel Principi de Cavalieri, s'ha de satisfer la igualtat

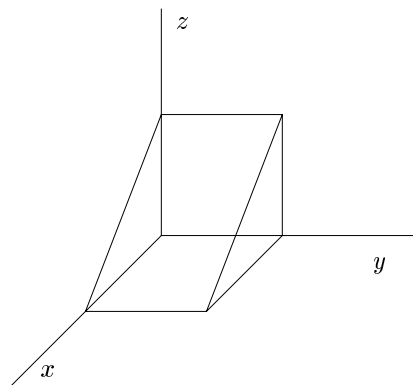
$$\text{vol}(V) = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

És a dir, el Principi de Cavalieri estableix que el volum sota la funció  $f(x, y)$  es calcula mitjançant una integral iterada.

La justificació que hem esbossat de la fórmula anterior no és una demostració, no obstant anem a comprovar que aquesta fórmula se satisfà en el cas particular d'un cos regular del qual coneixem el volum a priori. Considerem el volum limitat pel gràfic de la funció (vegeu la figura 2.2)

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 1 - x. \end{aligned}$$

Donat que el cos correspon a la meitat d'un cub de costat 1, el seu volum és  $1/2$ . Comprovem

Figura 2.2: Gràfic de la funció  $f(x, y) = 1 - x$ 

ara que el Principi de Cavalieri dóna el mateix valor:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 (1-x) dx \right) dy = \int_0^1 \left. x - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

El Principi de Cavalieri és independent del feix de plans paral·lels que haguem utilitzat per llescar el cos  $V$ . Així, per exemple, si es prenen plans paral·lels al pla  $y = 0$  i es denoten per  $A(y)$  les àrees de les seccions corresponents, hauria de satisfer-se que

$$\text{vol}(V) = \int_c^d A(y) dy,$$

és a dir,

$$\int_a^b A(x) dx = \int_c^d A(y) dy.$$

En el cas del volum corresponent al gràfic d'una funció positiva, s'obté la igualtat

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.1)$$

Pot comprovar-se fàcilment que les dues integrals coincideixen en l'exemple anterior.

En definitiva, si acceptem aquest principi podríem inferir que les integrals de dues variables es calculen integrant iteradament aquestes variables, independentment de l'ordre emprat en la iteració. El teorema de Fubini, que establirem en el proper apartat, delimita la validesa d'aquesta inferència.

## 2.2 El teorema de Fubini

Les integrals que apareixen a (2.1) s'anomenen *integrals iterades*. El Principi de Cavalieri suggereix que es pot reduir el càlcul d'una integral doble a dues de simples. En efecte, es té el resultat següent:

**2.2.1 Teorema de Fubini** *Sigui  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua. Aleshores, existeixen les integrals iterades i se satisfan les igualtats:*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_R f dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

*Demostració.* Provarem la igualtat

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_R f dx dy,$$

ja que l'altra es fa de forma anàloga.

Sigui  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  i  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ , una partició regular de  $[c, d]$ . Aleshores, es té que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy.$$

Com que  $f$  és una funció contínua, podem utilitzar el teorema del valor mig integral per a cadascuna de les integrals que apareixen en el sumatori anterior per deduir l'existència de punts  $d_k \in [y_k, y_{k+1}]$ , per a  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , de forma que es té la igualtat

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, d_k)(y_{k+1} - y_k).$$

(Els punts  $d_k$  depenen, alhora, del punt  $x$  fixat a priori, encara que no ho recollirem en la notació.)

De la definició d'integral d'una variable com el límit d'una suma de Riemann s'obté que

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} F(c_\ell)(x_{\ell+1} - x_\ell),$$

on  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , és una partició regular de  $[a, b]$  i  $c_\ell \in [x_\ell, x_{\ell+1}]$ . D'aquí en resulten les igualtats

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} F(c_\ell)(x_{\ell+1} - x_\ell) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_\ell, d_k)(y_{k+1} - y_k)(x_{\ell+1} - x_\ell) \\ &= \int_R f dx dy. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2.2 Exemples

1. Integrem la funció  $f(x, y) = x \cos xy$  en el rectangle  $[0, \pi/2] \times [0, 1]$ . Segons el teorema de Fubini, el càlcul és igual a la integral iterada:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 x \cos xy dy dx = \int_0^{\pi/2} \sin xy \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

2. És immediat comprovar que si  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , amb  $g$  i  $h$  funcions contínues, aleshores es té que

$$\int_R f dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

En particular, per exemple,

$$\int_{[1,2] \times [1,3]} xy^2 dx dy = \int_1^2 x dx \cdot \int_1^3 y^2 dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{26}{3} = 13.$$

Com hem assenyalat en el capítol anterior, sovint és necessari integrar funcions sobre regions que no són rectangulars. En aquests casos hem definit la integral considerant l'extensió per zero de la funció sobre un rectangle. És per això que és convenient disposar del teorema de Fubini per a funcions no necessàriament contínues. En aquest cas, però, el resultat és una mica més delicat, per la qual cosa l'enunciarem sense demostració.

**2.2.3 Teorema de Fubini** *Signi  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció acotada tal que el conjunt de les seves discontinuïtats és d'àrea zero. Si existeix la integral  $\int_c^d f(x, y) dy$  per a cada  $x \in [a, b]$ , aleshores existeix la integral iterada  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$  i se satisfà que*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_R f dx dy.$$

Andògament, si  $\int_a^b f(x, y) dx$  existeix per a cada  $y \in [c, d]$ , aleshores existeix la integral iterada  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$  i se satisfà que

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_R f dx dy. \quad \blacksquare$$

Per tant, si se satisfan totes les condicions del teorema alhora, existeixen i coincideixen les dues integrals iterades i són iguals a la integral de  $f$  en el rectangle  $R$ :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_R f dx dy.$$

Pel que fa a notació, usarem indistintament

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

o bé

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

per indicar les integrals iterades corresponents.

**2.2.4 Observació** Abans d'aplicar el teorema de Fubini per integrar funcions contínues sobre regions elementals en alguns exemples concrets, analitzem les hipòtesis del teorema en la versió més general.

1. En l'enunciat de 2.2.1 no hem imposat l'existència de les integrals iterades ja que aquesta està assegurada pel fet que la funció  $f$  és contínua. En efecte, si  $f$  és contínua, aleshores fixada una  $x \in [a, b]$  qualsevol, la funció  $y \mapsto f(x, y)$  és contínua i, per tant, integrable a  $[c, d]$ . A més, la funció

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

és també contínua a  $[a, b]$  i, en conseqüència, integrable a  $[a, b]$ , d'on se segueix l'existència de la integral iterada  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ .

2. Es pot donar el cas que la integral

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

no existeixi per a un nombre finit de valors de  $x$ . Com que la integral

$$\int_a^b F(x) dx$$

no s'altera si modifiquem els valors de  $F(x)$  en aquests punts donant-los el valor zero, per exemple, podem aplicar encara el teorema de Fubini.

Considerem un cas concret: sigui  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 1/2, \\ 1, & \text{si } y \in \mathbb{Q}, \quad \text{si } x = 1/2, \\ 0, & \text{si } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \text{si } x = 1/2. \end{cases}$$

$f$  és una funció acotada i el conjunt de les seves discontinuïtats està contingut en l'interval  $x = 1/2$ , per la qual cosa és un conjunt d'àrea zero. Així,  $f$  és una funció integrable a  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Per a  $x = 1/2$  la funció  $y \mapsto f(1/2, y)$  no és integrable, no obstant, l'observació que acabem de fer ens permet aplicar la integració iterada i deduir que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dy dx = \int_0^1 dx = 1.$$

3. En general, si  $f$  és una funció integrable, no tenen per què existir les integrals iterades. El teorema 2.2.3 diu que, en cas d'existir alguna de les integrals iterades, el seu valor coincideix amb el de la integral de  $f$ .

Considerem, per exemple, la funció  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \quad y \notin \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \quad y \notin \mathbb{Q}, \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ irreductible}, \quad y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funció  $f$  és integrable, d'integral igual a 1. Tenim, però, que la integral iterada respecte de  $y$  és:

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y) \, dy = \begin{cases} 1, & \text{si } y \notin \mathbb{Q}, \\ \text{no existeix}, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Així, tot i que redefinim la funció  $F(x)$  assignant el valor zero als punts racionals, la funció resultant no és integrable i, per tant, no existeix la integral iterada

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dy dx.$$

4. Allò que no diu el teorema de Fubini és que l'existència de les dues integrals iterades impliqui que  $f$  sigui integrable. D'altra banda, si existeixen les integrals iterades i no són iguals, la funció no és integrable. En el llibre d'Apóstol trobareu un exemple on es dona aquesta situació, és a dir, una funció acotada en un rectangle, que té les dues integrals iterades diferents i que, per tant, no és integrable.

Si admetem, momentàniament, integrals de funcions no acotades (vegeu l'apartat 2.7), aleshores és més senzill donar un exemple.

Considerem la funció

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3},$$

en el quadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Calculem una integral iterada:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{(x + y)^2} - \frac{2y}{(x + y)^3} \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left. -\frac{1}{x + y} + \frac{y}{(x + y)^2} \right|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{1 + y} + \frac{y}{(1 + y)^2} \right) dy \\ &= -\int_0^1 \frac{dy}{(1 + y)^2} = \frac{1}{1 + y} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si calculem l'altra integral iterada trobarem

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy dx = \frac{1}{2}.$$

Com que els valors resultants són diferents, la funció no és integrable.

## 2.3 Exemples

Dediquem aquest apartat a presentar alguns exemples d'aplicació del teorema de Fubini per integrar funcions contínues sobre dominis elementals del pla. Considerem dominis elementals  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  tals que les rectes verticals o horitzontals només tallin la frontera  $\partial D$  de la regió en dos punts. El cas més general es reduirà a aquesta situació usant l'additivitat de la integral.

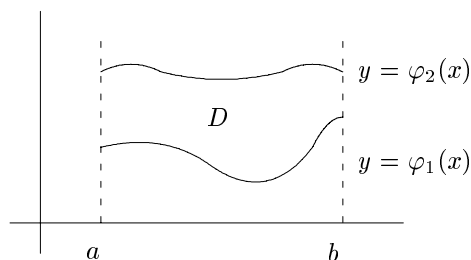


Figura 2.3: Un domini elemental

Sigui  $f(x, y)$  una funció acotada i contínua llevat d'un conjunt d'àrea zero. Sigui  $D$  un domini limitat per les rectes  $x = a$  i  $x = b$ , amb  $a < b$ , i les corbes  $y = \varphi_1(x)$  i  $y = \varphi_2(x)$ , amb  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ , i essent  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  funcions contínues a  $[a, b]$  (vegeu la figura 2.3).

Si  $c$  i  $d$  són els valors mínim i màxim, respectivament, de  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  sobre  $[a, b]$ , aleshores hem definit la integral de  $f$  en  $D$  per

$$\int_D f \, dx dy = \int_{[a,b] \times [c,d]} \tilde{f} \, dx dy, \quad (2.2)$$

on  $\tilde{f}$  és l'extensió de  $f$  per zero fora de  $D$ . Per poder aplicar el teorema de Fubini ha d'existir la integral

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y) \, dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) \, dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) \, dy,$$

que certament existeix, ja que podem fer cadascuna de les tres integrals anteriors. A més, tal com hem definit  $\tilde{f}$ , resulta que

$$\int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) \, dy = 0,$$

i, per tant, es té que

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

En definitiva, en resulta la fórmula següent:

$$\boxed{\int_D f \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.} \quad (2.3)$$

Sovint escriurem les integrals dobles sense usar els parèntesis, i entendrem que s'integra la integral de més endins respecte del diferencial que es troba en primer lloc, i integrarem després la funció que s'obté respecte de la segona variable entre els límits de la primera integral que es troba.

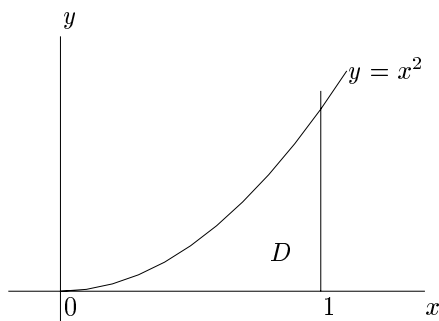


Figura 2.4: El domini  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x^2$

**2.3.1 Exemple** Calculem el valor de la integral doble de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  a  $D$ , on  $D$  és el domini limitat per les corbes  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = x^2$  i  $x = 1$  (vegeu la figura 2.4).

Segons la fórmula anterior, es té que

$$I = \int_D f \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) \, dy dx.$$

Així, calculant primer la integral respecte de la variable  $y$ , deixant la variable  $x$  constant, i integrant després respecte de la  $x$ , trobem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left. x^2 y + \frac{y^3}{3} \right|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left( x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left. \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right|_0^1 = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

Suposem ara que el domini  $D$  està limitat per les rectes  $y = c$  i  $y = d$ , amb  $c < d$ , i les corbes  $x = \psi_1(y)$ ,  $x = \psi_2(y)$ , amb  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ , essent  $\psi_1, \psi_2$  funcions contínues a  $[c, d]$  (vegeu la figura 2.5). Aleshores, aplicant el teorema de Fubini de forma anàloga a com ho hem fet en la situació anterior trobem que la integral d'una funció  $f(x, y)$  sobre el domini  $D$  s'escriu

$$\boxed{\int_D f \, dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.} \quad (2.4)$$

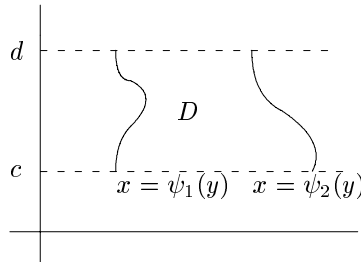


Figura 2.5: Un domini elemental

**2.3.2 Exemple** Sigui  $D$  el triangle determinat per les rectes  $y = 0$ ,  $y = x$  i  $x + y = 2$ . En aquest cas, podem descriure  $D$  de la forma:  $0 \leq y \leq 1$ ,  $y \leq x \leq 2 - y$ . Així, la integral de la funció  $f(x, y) = 1 + xy$  a  $D$  és:

$$\begin{aligned} \int_D (1 + xy) \, dx dy &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1 + xy) \, dx dy = \int_0^1 \left. x + \frac{x^2}{2} y \right|_y^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left( 2 - 2y + \frac{(2-y)^2 y - y^3}{2} \right) dy = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 2 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Si la regió  $D$  es pot descriure de les dues maneres anteriorment assenyalades, la integral doble de la funció  $f(x, y)$  sobre  $D$  es pot expressar de qualsevol de les dues formes i, per tant, es donen les igualtats següents:

$$\int_D f \, dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx dy. \quad (2.5)$$

En cada cas concret es triarà un o altre ordre d'integració en funció de la forma del domini  $D$  i/o de la funció que es pretén integrar. En els exemples següents veiem com canviar l'ordre d'integració d'una funció de dues variables.

**2.3.3 Exemples** Donada una funció  $f(x, y)$  integrable sobre un domini  $D$ , ens proposem expressar les dues integrals iterades, segons les equacions del domini.

1. Sigui  $D$  el domini del pla limitat per les corbes  $y = x$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$  i  $x = 1$  (vegeu la figura 2.6). Equivalentment,  $D$  està limitat per les corbes  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = y^2$  i  $x = y$ .

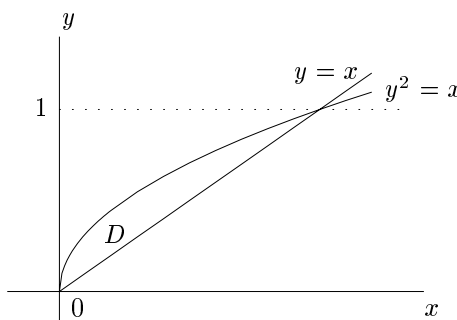


Figura 2.6: El domini  $0 \leq y \leq 1$ ,  $y^2 \leq x \leq y$

En aquest cas les integrals iterades s'escriuen:

$$\int_D f \, dx dy = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy dx = \int_0^1 \int_{y^2}^y f(x, y) \, dx dy.$$

2. Suposem ara que el domini està limitat per les corbes  $y = x^2$  i  $y^2 = x$  (vegeu la figura 2.7).

Les integrals iterades seran:

$$\int_D f \, dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx dy.$$

3. Per al domini determinat per les corbes  $y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$  i  $y = 0$ , amb  $a > 0$  i  $y > 0$  (vegeu la figura 2.8), en resulta:

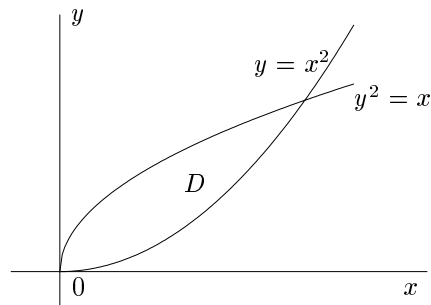


Figura 2.7: El domini limitat  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$

$$\begin{aligned} \int_D f dx dy &= \int_0^a \int_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2+y^2}} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{ax}} f(x, y) dy dx + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy dx, \end{aligned}$$

on hem utilitzat l'additivitat de la integral per escriure la segona igualtat.

De vegades escollir un o altre ordre d'integració determina la possibilitat de realitzar el càlcul de la integral doble.

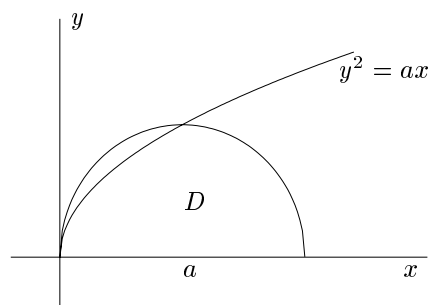


Figura 2.8: El domini limitat  $y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y \geq 0$

**2.3.4 Exemple** Calculem la integral de  $f(x, y) = e^{y/x}$  en el triangle  $D$  limitat per les rectes  $y = x$ ,  $y = 0$  i  $x = 1$  (vegeu la figura 2.9).

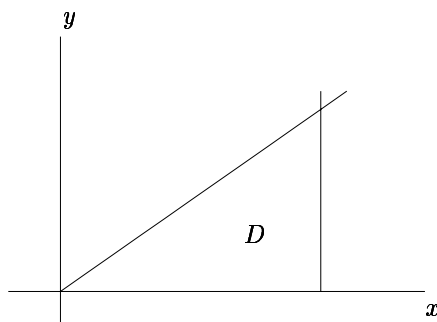


Figura 2.9: El triangle limitat  $y = x$ ,  $y = 0$ , i  $y = 1$

En aquest cas, si volguéssim aplicar la fórmula (2.4) caldria integrar en primer lloc  $e^{y/x}$  respecte de la variable  $x$ , però, aquesta integral no es pot expressar mitjançant funcions elementals. Apliquem, doncs, la fórmula (2.3). Així la integral iterada és:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x e^{y/x} dy dx &= \int_0^1 x e^{y/x} \Big|_0^x dx = \int_0^1 x(e-1) dx \\ &= (e-1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

Observem, finalment, que si el domini  $D$  és tal que hi ha rectes horitzontals o verticals que passen pels punts interiors del domini i tallen la frontera en més de dos punts, aleshores no podem calcular integrals dobles sobre  $D$  usant (2.3) o (2.4). En aquest cas, per l'additivitat de la integral respecte de la regió d'integració podem descompondre la regió  $D$  en una unió de regions com les d'abans i integrar separatament en cadascuna.

Per exemple, si  $D$  és la regió de la figura 2.10, descomponen  $D$  en la forma  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  i, aleshores, per l'additivitat de la integral es té que

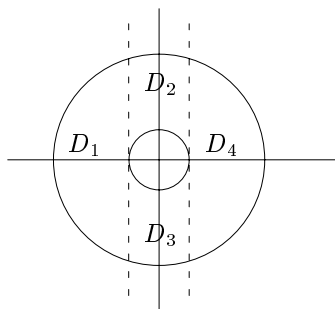


Figura 2.10: Descomposició d'una corona

$$\int_D f \, dx dy = \sum_{i=0}^4 \int_{D_i} f \, dx dy,$$

on, ara, cadascuna de les integrals pot calcular-se usant (2.3) o (2.4).

## 2.4 Integrals en tres o més variables

Els resultats anteriors s'estenen sense més dificultat per a integrals de tres o més variables. En aquesta secció indicarem l'extensió del teorema de Fubini per a tres variables a través d'un exemple. En alguns exemples de capítols posteriors tindrem l'oportunitat de calcular integrals amb més de tres variables.

Sigui  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  una regió elemental de l'espai ordinari que pot expressar-se de la forma

$$a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y),$$

per a certes funcions contínues  $\varphi_1, \varphi_2$  definides en un interval  $[a, b]$  de la recta i satisfent  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  en aquest interval, i  $\gamma_1, \gamma_2$  dues funcions contínues definides sobre la regió  $D = \{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  i tals que  $\gamma_1(x, y) \leq \gamma_2(x, y)$  en aquesta regió. Aleshores, el teorema de Fubini en aquesta situació estableix que la integral d'una funció contínua  $f(x, y, z)$  sobre  $W$  pot calcular-se mitjançant la integral iterada

$$\int_W f \, dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx. \quad (2.6)$$

Els parèntesis indiquen l'ordre d'integració a l'hora de fer els càlculs, és a dir, primer integrem la funció  $f(x, y, z)$  respecte de la variable  $z$  entre els límits  $\gamma_1(x, y)$  i  $\gamma_2(x, y)$ , i obtenim una funció contínua  $\Gamma(x, y)$ . En segon lloc integrem  $\Gamma(x, y)$  respecte de la variable  $y$  entre els límits  $\varphi_1(x)$  i  $\varphi_2(x)$ , i obtenim una funció contínua  $\Phi(x)$ , i finalment integrem respecte de la variable  $x$  entre els límits constants  $a$  i  $b$ .

**2.4.1 Exemple** Integrem la funció  $f(x, y, z) = 2z$  en el domini definit en el primer octant de  $\mathbb{R}^3$  per les desigualtats  $x^2 + y^2 \leq 1$  i  $z \leq x^2 + y^2$ .

El domini  $W$  és el domini interior al cilindre  $x^2 + y^2 = 1$  i que queda per sota del paraboloid  $z = x^2 + y^2$  (vegeu la figura 2.11). Així, la variació de les variables es descriu de la forma següent:  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2$  i  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ . Podem ara aplicar 2.6 per calcular la

integral:

$$\begin{aligned}
 \int_W 2z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{x^2+y^2} (2z) \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} z^2 \Big|_0^{x^2+y^2} \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (x^2 + y^2)^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x^4 y + 2x^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \Big|_0^{1-x^2} \, dx \\
 &= \int_0^1 \left( x^4(1-x^2) + \frac{2}{3}x^2(1-x^2)^3 + \frac{1}{5}(1-x^2)^5 \right) \, dx \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{27} - \frac{1}{55} = \frac{1714}{10395}.
 \end{aligned}$$

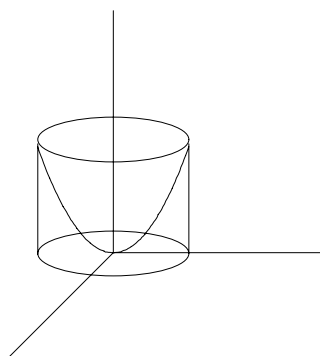


Figura 2.11: Volum interior a un cilindre i sota un paraboloid

Intercanviant els papers de les variables  $x$ ,  $y$  i  $z$  en la descripció del domini  $W$  s'obtenen les altres cinc possibles integrals iterades que corresponen als altres cinc possibles ordres d'integració a (2.6).

**2.4.2 Exemple** Per al tetràedre limitat pels plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  i  $2x + 3y + 4z = 12$ , les sis integrals iterades possibles són:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^6 \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x)} \int_0^{\frac{1}{4}(12-2x-3y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx, \\
 &\int_0^6 \int_0^{\frac{1}{4}(12-2x)} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-4z)} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx, \\
 &\int_0^4 \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} \int_0^{\frac{1}{4}(12-2x-3y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy, \\
 &\int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}(12-3y)} \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y-4z)} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy,
 \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{1}{2}(12-4z)} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-4z)} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz,$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(12-4z)} \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y-4z)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Anàlogament al cas de  $\mathbb{R}^2$ , si una regió és més general i no es pot descriure d'alguna d'aquestes sis maneres, caldrà descompondre la regió  $W$  en una unió finita i disjunta d'altres subdominis que sí que admetin aquesta descripció i usar la propietat de l'additivitat de la integral triple.

## 2.5 Canvi de variables per a integrals dobles

Fins ara hem descrit els punts del pla utilitzant les seves coordenades cartesianes,  $(x, y)$ . Hi ha recintes d'integració que s'expressen més fàcilment en altres sistemes de coordenades. Per exemple, si  $D$  és una corona circular hem vist que cal descompondre la regió en quatre subregions per tal d'aplicar el teorema de Fubini en el càlcul d'integrals, mentre que és molt més senzill descriure la corona en coordenades polars. En aquest apartat anem a establir la fórmula de canvi de variables per a integrals dobles.

### Càlcul d'àrees en coordenades curvilínies

Per tal d'estudiar la fórmula de canvi de variables en una integral doble ens preocupem, primer de tot, de veure com canvia el càlcul de l'àrea d'una regió a través d'una transformació del pla.

Siguin  $D$  i  $D^*$  dos conjunts oberts del pla  $\mathbb{R}^2$ . Recordem que un *canvi de variables* de  $D^*$  a  $D$  és una aplicació

$$T : D^* \longrightarrow D$$

$$(u, v) \longmapsto T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

que és bijectiva, és a dir, tal que existeix l'aplicació inversa  $T^{-1}$ , i tal que tant  $T$  com  $T^{-1}$  són derivables amb continuïtat.

La bijectivitat de  $T$  correspon al fet que per a cada punt  $(x, y) \in D$  existeix un únic punt  $(u, v) \in D^*$  tal que  $T(u, v) = (x, y)$ . Diem que  $(u, v)$  són les *coordenades curvilínies*, corresponents al sistema definit per  $T$ , del punt  $(x, y)$ . Si fixem la variable  $u = u_0$ , la imatge de la recta corresponent de  $D^*$  per  $T$  descriu una corba de  $D$ ,  $v \rightarrow T(u_0, v)$ . Anàlogament, podem considerar les corbes  $u \rightarrow T(u, v_0)$ . Aquestes corbes s'anomenen *corbes coordenades* (vegeu la figura 2.12).

**2.5.1 Exemple** L'exemple més important de canvi de variables en el pla és el de les coordenades polars:

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

En aquest cas podem prendre  $D^* = ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$ , on la primera coordenada és el radi  $r$  i la segona l'angle  $\theta$ , de manera que  $D$  és el pla  $\mathbb{R}^2$  llevat del semieix  $\{(x, 0)/x \geq 0\}$ . Les corbes

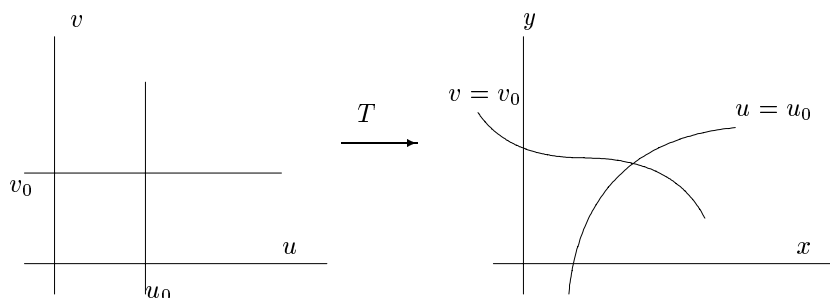


Figura 2.12: Corbes coordenades

coordenades  $r = r_0$  són circumferències de radi  $r_0$  centrades a l'origen, mentre que les corbes  $\theta = \theta_0$  són radis de pendent  $\operatorname{tg} \theta_0$  que surten de l'origen.

Si  $T$  és un canvi de variables, anomenem la *matriu jacobiana* de  $T$ , i escriurem  $DT$ , a la matriu de l'aplicació diferencial de  $T$ ,

$$DT = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Ens referirem al determinant de la matriu jacobiana com al *determinant jacobinà* i el denotarem per  $JT$ ,

$$JT = \det DT = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

**2.5.2 Observació** Si  $T$  és un canvi de variables, el jacobinà  $JT$  no s'anulla en cap punt de l'obert  $D^*$ , ja que la matriu  $DT$  és invertible, d'inversa  $D(T^{-1})$ . Recordem que, de fet, la no-anul·lació d'aquest determinant s'utilitza sovint per comprovar quan es té un vertader canvi de variables. En efecte, el teorema de la funció inversa permet assegurar que sí que se satisfan les condicions següents:

- (i)  $T$  és bijectiva,
- (ii)  $T$  és diferenciable amb continuïtat,
- (iii)  $JT \neq 0$  per a qualsevol  $(u, v) \in D^*$ ,

aleshores  $T$  és un canvi de variables.

Ja hem definit l'àrea de  $D$  com el volum del cilindre de base  $D$  i alçada 1, és a dir, com la integral

$$A(D) = \int_D dx dy.$$

Sigui  $T : D^* \rightarrow D$  un canvi de variables i suposem, per simplificar l'exposició, que  $D^*$  és un rectangle. Subdividim la regió  $D$  a partir d'una partició regular de  $D^*$ , és a dir, subdividim  $D$  en regions  $T(R_{ij})$  que són imatge per  $T$  dels rectangles  $R_{ij}$  de  $D^*$ , corresponents a una partició regular (vegeu la figura 2.13).

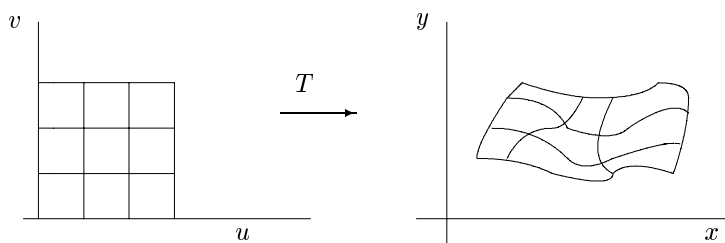


Figura 2.13: Partició de  $D$

Si  $R$  és un dels rectangles de la partició regular de  $D^*$ , de vèrtex  $(u_0, v_0)$ , podem aproximar l'àrea de  $T(R)$  per l'àrea del paral·lelogram de costats  $\frac{\partial T}{\partial u} \Delta u$  i  $\frac{\partial T}{\partial v} \Delta v$ , de vèrtex  $T(u_0, v_0)$  (vegeu la figura 2.14).

És a dir, considerem l'aproximació donada per

$$\begin{aligned} A(T(R)) &\cong A\left(\Delta u \frac{\partial T}{\partial u}, \Delta v \frac{\partial T}{\partial v}\right) = \left| \det \begin{pmatrix} \Delta u \frac{\partial x}{\partial u} & \Delta v \frac{\partial x}{\partial v} \\ \Delta u \frac{\partial y}{\partial u} & \Delta v \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right| \Delta u \Delta v = |JT(u, v)| \Delta u \Delta v = |JT(u, v)| A(R). \end{aligned}$$

Observem que, en aquesta fórmula, el determinant jacobià mesura la distorsió produïda per  $T$  al passar de  $A(R)$  a  $A(T(R))$ .

L'aproximació de l'àrea de  $T(R)$  resultant serà més acurada a mesura que el diàmetre del rectangle  $R$  sigui més petit. Com que la integral que calcula l'àrea de  $D$  es defineix com a límit de les sumes de Riemann quan el diàmetre dels rectangles de la partició tendeixen a zero, sembla raonable substituir l'aproximació anterior per igualtats, d'on se segueix que

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_D dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n A(T(R_{ij})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n |JT(u_i, v_j)| \Delta u_i \Delta v_j = \int_{D^*} |JT(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

El que acabem de veure dona una idea succinta de la demostració del resultat següent.

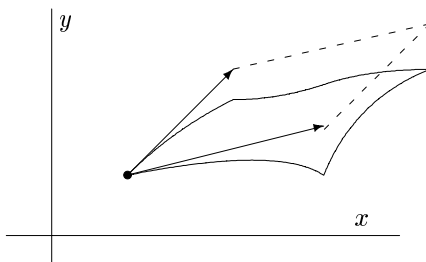


Figura 2.14: Aproximació de l'àrea per l'àrea d'un paral·lelogram.

**2.5.3 Teorema** [Àrea en coordenades curvilínies.] *Siguin  $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$  oberts acotats i  $T : D^* \rightarrow D$  un canvi de variables. Aleshores,*

$$A(D) = \int_D dx dy = \int_{D^*} |JT(u, v)| du dv.$$

El mòdul del determinant jacobí l'anomenem *coeficient d'expansió de l'àrea* en el punt  $(u, v)$ .

### Fórmula del canvi de variables en integrals dobles

Estem ara en disposició d'enunciar el teorema de canvi de variables per a les integrals de dues variables.

**2.5.4 Teorema** [Canvi de variables.] *Siguin  $D$  i  $D^*$  dos oberts acotats a  $\mathbb{R}^2$  i  $T : D^* \rightarrow D$  un canvi de variables. Sigui  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funció integrable. Aleshores, se satisfà que*

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |JT(u, v)| du dv.$$

No farem la demostració detallada d'aquest teorema, sinó que exposarem les idees principals tot ometent alguns detalls tècnics.

*Idea de la demostració.* Donat  $D^*$ , sigui  $R$  un rectangle tal que  $D^* \subseteq R$ . Fem una partició regular  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , de  $R$  i denotem per  $S_{ij} = T(R_{ij})$  les imatges dels subrectangles de la partició. Les regions  $S_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , donen una partició de  $D = T(D^*)$ . Usant les sumes de Riemann, podem calcular la integral de  $f$  a  $D$  segons

$$\int_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(\alpha_{ij}) A(S_{ij}), \quad (2.7)$$

on  $\alpha_{ij} \in S_{ij}$  són arbitraris. Al llarg de la demostració aprofitarem aquesta arbitrarietat per escollir els punts  $\alpha_{ij}$  adequadament.

Segons la fórmula de l'àrea d'una regió en coordenades curvilínies que hem establert anteriorment, les àrees  $A(S_{ij})$  es donen per les expressions

$$A(S_{ij}) = A(T(R_{ij})) = \int_{R_{ij}} |JT(u, v)| du dv.$$

Pel teorema del valor mig integral sabem que existeixen  $\beta_{ij} \in R_{ij}$  tals que

$$A(S_{ij}) = |JT(\beta_{ij})| A(R_{ij}) = |JT(\beta_{ij})| \Delta u_i \Delta v_j. \quad (2.8)$$

Triem ara  $\alpha_{ij} = T(\beta_{ij})$  i substituïm (2.8) a (2.7). S'obté que

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n f(T(\beta_{ij})) |JT(\beta_{ij})| \Delta u_i \Delta v_j \\ &= \int_{D^*} f(T(u, v)) |JT(u, v)| \, du dv, \end{aligned}$$

com volíem veure. ■

En el cas de les coordenades polars, el jacobià és igual a  $r$  i el teorema del canvi de variables dóna la fórmula següent:

$$\boxed{\int_D f(x, y) \, dx dy = \int_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.} \quad (2.9)$$

En els exemples següents apliquem aquesta fórmula en diverses situacions.

### 2.5.5 Exemples

1. Calculem l'àrea del cercle de radi  $R$ , és a dir, del conjunt de punts del pla que satisfan la desigualtat  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . En coordenades polars aquest cercle correspon a la desigualtat  $r \leq R$ . Usant, per tant, el canvi a coordenades polars l'àrea demanada es calcula integrant el jacobià sobre el domini  $D^* = [0, R] \times [0, 2\pi]$ , és a dir,

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} dx dy = \int_{D^*} r \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r \, dr = 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

2. Calculem el volum sota el gràfic de la funció

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

on  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ , amb  $0 < a < b$ .

Observant que la funció  $f(x, y)$  depèn de  $x^2 + y^2$  i com que el domini  $D$  és un quart d'una corona circular, escollirem les coordenades polars. En aquestes coordenades, les circumferències  $x^2 + y^2 = a^2$  i  $x^2 + y^2 = b^2$  s'escriuen  $r = a$  i  $r = b$ , respectivament. A més, la restricció  $x, y \geq 0$

passa a ser la condició sobre l'angle  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Per tant, el volum és igual a

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_a^b e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_a^b r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_a^b \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} (e^{-b^2} - e^{-a^2}) = \frac{\pi}{4} (e^{-a^2} - e^{-b^2}). \end{aligned}$$

3. El càlcul en coordenades polars és imprescindible quan el recinte està expressat en aquestes coordenades. Per exemple, calculem l'àrea d'un pètal de la rosa  $r = a \sin 3\theta$  (vegeu la figura 2.15). Observem que, com que el radi sempre és positiu, no tots els angles estan permesos. Concretament,  $3\theta$  ha de tenir sinus positiu i, per tant,  $\theta$  ha de satisfer que  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ , que  $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$ , o que  $4\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/3$ , d'on li ve el nom de *rosa de tres pètals* (vegeu la figura 2.15). Així, l'àrea corresponent és

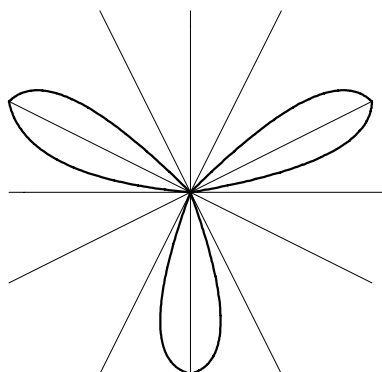


Figura 2.15: Rosa de tres pètals  $r = a \sin 3\theta$

$$\begin{aligned} A &= \int_D dx dy = \int_{D^*} r dr d\theta = \int_0^{\pi/3} \int_0^{a \sin 3\theta} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} \int_0^{a \sin 3\theta} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/6} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a \sin 3\theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} \sin^2 3\theta d\theta = \frac{a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{6} B \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{12}. \end{aligned}$$

4. Com a darrer exemple, calculem la integral de la funció  $y \cos xy$  en el domini definit per  $1 \leq y \leq 4$  i  $1 \leq xy \leq 4$ , (vegeu la figura 2.16).

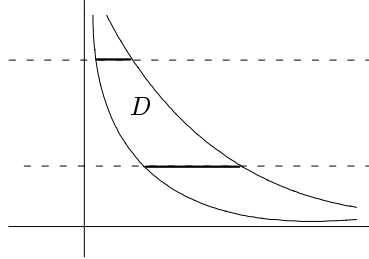


Figura 2.16: Domini  $1 \leq y \leq 4$ ,  $1 \leq xy \leq 4$

En aquest cas considerem el canvi de variables donat per

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{v}, \\ y &= v. \end{aligned}$$

El jacobià del canvi de variables és  $1/v$ , i, per tant, el valor de la integral és:

$$\int_D y \cos xy \, dx dy = \int_1^4 du \int_1^4 v \cos u \cdot \frac{1}{v} \, dv = 3(\sin 4 - \sin 1).$$

## 2.6 Canvi de variables per a integrals de tres o més variables

L'extensió dels resultats de l'apartat anterior a tres o més variables no presenta dificultats. Sigui  $T : W^* \rightarrow W$  un canvi de variables entre dos oberts acotats de  $\mathbb{R}^3$ . El jacobià

$$JT(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

és ara el coeficient de distorsió de volum.

Així, doncs, per a integrals triples, la fórmula del canvi de variables s'escriu

$$\boxed{\int_W f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |JT(u, v, w)| \, du dv dw,}$$

i, en general, per a un canvi de variables a  $\mathbb{R}^n$ , la fórmula de canvi de variables s'escriu

$$\int_W f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n = \int_{W^*} (f \circ T) |JT(u_1, \dots, u_n)| \, du_1 \dots du_n.$$

Dedicarem aquest apartat als dos exemples més significatius dels canvis de variables en tres dimensions: les coordenades cilíndriques i les coordenades esfèriques.

### **Coordenades cilíndriques**

Les coordenades cilíndriques  $(r, \theta, z)$  d'un punt  $(x, y, z)$  estan definides per les equacions

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta, \\z &= z.\end{aligned}$$

La figura 2.17 mostra la representació d'un punt  $(x, y, z)$  en termes de les seves coordenades cilíndriques  $r$ ,  $\theta$  i  $z$ .

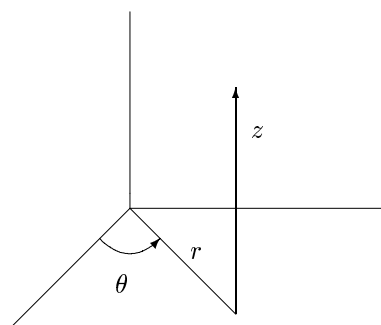


Figura 2.17: Coordenades cilíndriques d'un punt de l'espai

És a dir, que les coordenades cilíndriques representen el punt  $(x, y, z)$  a través de les coordenades polars de la seva projecció en el pla  $xy$  i la distància a aquest pla,  $z$ . El nom de coordenades cilíndriques prové del fet que les superfícies coordenades  $r = a > 0$  són cilindres, l'eix dels quals és l'eix  $z$ . Això fa que les coordenades cilíndriques siguin especialment útils quan el domini d'integració presenti simetria cilíndrica, és a dir, de rotació respecte d'una recta.

Observem que sobre l'eix  $z$ , és a dir, per als punts amb  $x = y = 0$ , l'angle  $\theta$  no està definit, encara que això no comporta cap dificultat per al càlcul integral ja que en una regió  $W$  el conjunt de no-definició de l'angle, és a dir, la intersecció de  $W$  amb l'eix  $z$ , serà de volum zero.

El jacobià de les coordenades cilíndriques és

$$JT(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

que és sempre diferent de zero i positiu,  $r \neq 0$ . Així, el teorema de canvi de variables per a coordenades cilíndriques dóna la fórmula

$$\int_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (2.10)$$

La figura 2.18 mostra com es transforma el cub  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [z_1, z_2]$  en coordenades cilíndriques.

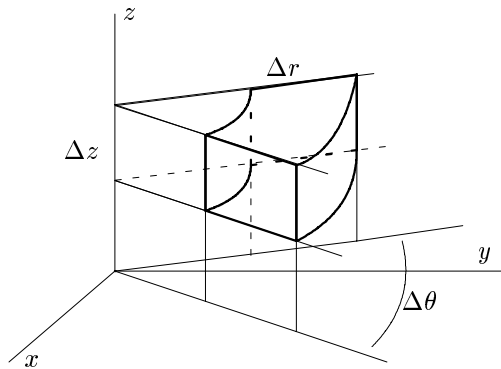


Figura 2.18: Imatge de  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [z_1, z_2]$

### 2.6.1 Exemples

1. Calculem el volum del cos comprès entre el con  $z^2 = x^2 + y^2$  i el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ , per a  $z \geq 0$ , (figura 2.19).

Observem que les dues figures que delimiten el cos tenen simetria cilíndrica respecte de l'eix de les zetes. Així doncs, proposem fer un canvi a coordenades cilíndriques. La intersecció de les dues figures es dóna a  $z = 0$  i  $z = 1$ . En coordenades cilíndriques el con s'escriu  $z = r$  i el paraboloides  $z = r^2$ . Per tant, com  $0 \leq z \leq 1$ , tenim  $z \leq r \leq \sqrt{z}$ . A més, respecte de l'eix  $z$  prenem una volta sencera, amb la qual cosa  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Per tant, el volum demanat serà

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_V 1 dx dy dz = \int_{V^*} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_z^{\sqrt{z}} r dr dz d\theta = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2. Calculem la integral de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  sobre el volum  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ . Observem que el volum  $W$  correspon a un cos comprès entre dos cilindres.

En coordenades cilíndriques,  $W^* = \{1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$ . Per tant,

$$\begin{aligned} \int_W (x^2 + y^2) dV &= \int_{W^*} r^2 r dr d\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^3 dr d\theta dz = \\ &= 4\pi \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 = 15\pi. \end{aligned}$$

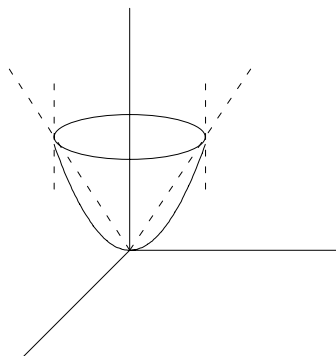


Figura 2.19: Volum entre un paraboloide i un con

### Coordenades Esfèriques

Les coordenades esfèriques  $(r, \theta, \varphi)$  d'un punt  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  estan definides per les equacions

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta, \\ y &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

La figura 2.20 mostra la representació d'un punt  $(x, y, z)$  en termes de les seves coordenades esfèriques  $(r, \theta, \varphi)$ .

La variació de les coordenades esfèriques es dona en els intervals següents:  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ , i  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . El nom de coordenades esfèriques prové del fet que si fixem  $r = a > 0$  s'obté una esfera de radi  $a$  amb centre  $(0, 0, 0)$ . En aquest cas, les coordenades  $\varphi$  i  $\theta$  són la *longitud* i *latitud* calculada sobre l'esfera. Les coordenades esfèriques són útils quan el domini d'integració presenta simetria esfèrica, és a dir, simetria respecte un punt.

El jacobià de les coordenades esfèriques és

$$JT(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi,$$

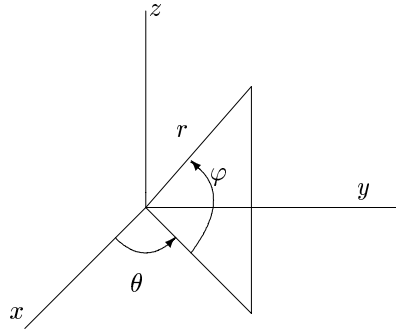


Figura 2.20: Coordenades esfèriques

que és no nul en  $W^*$ . Observem, a més, que  $\cos \varphi > 0$  ja que l'angle  $\varphi$  varia en l'interval  $]-\pi/2, \pi/2[$ , i, per tant,  $|JT(r, \theta, \varphi)| = r^2 \cos \varphi$ .

Així, la fórmula de canvi de variables per a coordenades esfèriques és

$$\int_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_{W^*} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (2.11)$$

La figura 2.21 mostra com es transforma el cub  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$  en coordenades esfèriques.

### 2.6.2 Exemples

1. Calculem el volum de l'esfera de radi  $R$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . En coordenades esfèriques l'esfera s'escriu  $r \leq R$ , amb la qual cosa el volum de l'esfera és:

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \int_B dx dy dz = \int_{B^*} r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

És a dir, retrobem la fórmula del volum d'una esfera que ja coneixíem.

Aquest exemple ens permet fer una observació que s'aplica algunes vegades a les integrals que es calculen amb coordenades esfèriques: la projecció de l'esfera de radi  $R$  en el pla  $xy$  és el disc  $x^2 + y^2 \leq R^2$  d'aquest pla,  $z = 0$ . Així fa que les coordenades cilíndriques s'adaptin també

adequadament per fer el càlcul del volum corresponent. En efecte, es té que

$$\begin{aligned} \int_B dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{R^2-r^2} dr d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (R^2-r^2)^{3/2} \Big|_0^R d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} R^3 d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

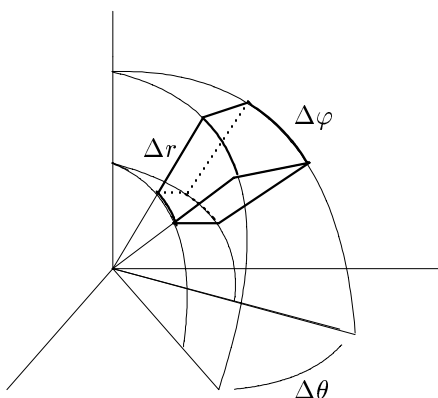


Figura 2.21: Imatge de  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$

2. Calculem la integral de  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  sobre el volum  $W$  determinat per les desigualtats  $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 3z^2$  i  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ , amb  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . El volum està limitat per dos cons i dues esferes, de radis 1 i 2. En termes de coordenades esfèriques aquesta regió correspon a la següent variació de coordenades

$$\begin{aligned} 1 &\leq r \leq 2, \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \\ \frac{\pi}{6} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Així, la integral és

$$\begin{aligned} \int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} r^3 \cos \varphi d\varphi dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 \cdot \sin \varphi \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{15\pi}{8} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Tot i que, com en l'exemple anterior, podem fer el càlcul de la integral amb coordenades cilíndriques, en aquest cas caldrà descompondre el recinte  $W$  en dues subregions en les quals aplicar el teorema de Fubini.

## 2.7 Integrals múltiples impròpies

La definició d'integral pot estendre's, en algunes situacions, a funcions no acotades i que no són necessàriament zero fora d'un conjunt acotat. Considerem un parell d'exemples.

**2.7.1 Exemple** Prenem la funció

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2},$$

definida per  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ . El recinte és certament no acotat, però podem plantejar-nos si el volum de sota de la funció  $f$  és finit o no.

Per esbrinar-ho podem aproximar  $B = \{(x, y) / x \geq 1, y \geq 1\}$  pels subrectangles acotats  $B_n = \{(x, y) / 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$  en els quals  $f$  és integrable, ja que és contínua, i prendre l'aproximació

$$\int_{B_n} f(x, y) dx dy = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

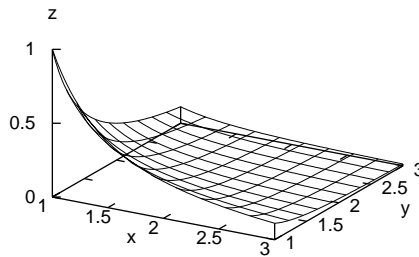


Figura 2.22: Gràfic de la funció  $1/x^2 y^2$

Quan  $n \rightarrow \infty$ , els rectangles  $B_n$  cobreixen  $B$ , i sembla natural definir

$$\int_B f(x, y) dx dy = \lim_n \int_{B_n} f(x, y) dx dy = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

**2.7.2 Exemple** Considerem ara una funció no acotada en un domini acotat. Prenem  $B = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ , el disc unitat, i  $f$  la funció definida en el disc puntejat per

$$f(x, y) = -\ln(x^2 + y^2), \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 1.$$

Com que  $f$  no està acotada prop de zero, traiem un petit disc de radi  $\varepsilon$  del recinte

$$B_\varepsilon = \{(x, y) / \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

de manera que  $f$  sigui integrable en  $B_\varepsilon$ .

Aleshores podem aproximar el volum per la integral

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} -\ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 -(\ln r^2) r dr \\ &= -2\pi \left[ r^2 \ln r - \frac{1}{2} r^2 \right]_\varepsilon^1 \\ &= \pi + 2\pi\varepsilon^2 \ln \varepsilon - \pi\varepsilon^2. \end{aligned}$$

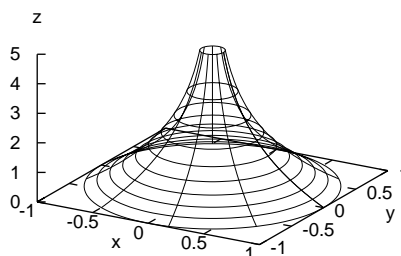


Figura 2.23: Gràfic de la funció  $-\ln(x^2 + y^2)$

Quan  $\varepsilon \rightarrow 0$  les corones  $B_\varepsilon$  cobreixen el disc unitat  $B$ , i sembla natural prendre

$$\begin{aligned} \int_B -\ln(x^2 + y^2) dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon} -\ln(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi + 2\pi\varepsilon^2 \ln \varepsilon - \pi\varepsilon^2) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Abans de formalitzar la situació que es dona en aquests dos exemples, observem que en ambdós casos hem aproximat el recinte  $B$  per unes subregions concretes. En principi no és evident que si prenem una altra aproximació  $B'_n$  de  $B$  el resultat sigui el mateix. Ens restringirem a la situació més senzilla (la de la convergència absoluta) en la qual es demana independència de la integral respecte de les aproximacions  $B_n$  en la pròpia definició.

*Situació general.* Considerem un obert  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , no necessàriament acotat. Direm que una successió de subconjunts oberts  $D_n \subseteq D$  cobreix monòtonament  $D$  si se satisfà que

- i)  $\overline{D}_n \subseteq D_{n+1}$ , per a tot  $n \geq 0$ ,
- ii)  $\bigcup_{n \geq 0} D_n = D$ .

En els exemples anteriors, les successions  $B_n$  i  $B_{1/n}$  cobreixen monòtonament els recintes en qüestió.

Considerem una funció  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrable en tot subconjunt elemental de  $D$  (per exemple, perquè és una funció contínua).

**2.7.3 Definició** Direm que  $f$  és integrable (en el sentit impropri) a  $D$  si per a qualsevol successió de subconjunts oberts acotats  $\{D_n\}$  que cobreix monòtonament  $D$  existeix el límit

$$\lim_n \int_{D_n} f(x, y) \, dx dy,$$

i és independent de la successió  $\{D_n\}$  escollida. Aquest límit l'anomenarem integral (en el sentit impropri) de  $f$  a  $D$ .

Si  $f$  admet integral impròpia a  $D$  escriurem

$$\int_D f(x, y) \, dx dy = \lim_n \int_{D_n} f(x, y) \, dx dy.$$

La situació més comuna es donarà, com en el cas dels exemples 2.7.1 i 2.7.2, a partir d'una funció contínua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en una regió oberta  $D$ , essent la particularitat que  $D$  no sigui acotat o bé que  $f$  no sigui contínua a  $\overline{D}$ .

La varietat de successions  $\{D_n\}$  que cobreixen monòtonament l'obert  $D$  fan que la definició d'integral impròpia sigui gairebé impracticable. Ens permet, però, comprovar que certes funcions no tenen integral impròpia.

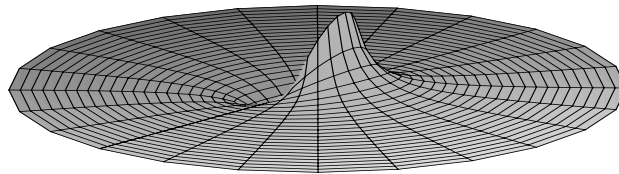


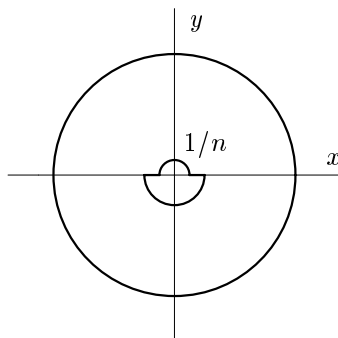
Figura 2.24: Gràfic de la funció  $y/\sqrt{x^2 + y^2}^3$

**2.7.4 Exemple** Considerem la funció

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

definida en el disc unitat puntejat,  $D' = \{(x, y) / 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Per estudiar la integral impròpia de  $f$  a  $D$  aproximem el disc unitat puntejat per regions  $D_n = \{(x, y) / y \geq 0, \frac{\varepsilon^2}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \text{ o } y < 0, \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ , amb  $\varepsilon < 1$ .

Figura 2.25: Regió  $D_n$ 

Aleshores tindrem que

$$\begin{aligned} \int_{D_n} f(x, y) dx dy &= \int_0^\pi d\theta \int_{\varepsilon/n}^{1/n} \frac{\sin \theta}{r^2} r dr + \int_\pi^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 \frac{\sin \theta}{r^2} r dr \\ &= -[\cos \theta]_0^\pi [\ln r]_{\varepsilon/n}^1 - [\cos \theta]_\pi^{2\pi} [\ln r]_{1/n}^1 \\ &= -2 \ln \frac{\varepsilon}{n} + 2 \ln \frac{1}{n} = -2 \ln \varepsilon. \end{aligned}$$

Així, si  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , en resulta que

$$\lim_n \int_{D_n} f(x, y) dx dy = 2 \ln 2,$$

mentre que si  $\varepsilon = 1$ , el límit és 0. De la dependència del límit respecte del tipus de regions utilitzades deduïm que  $f$  no admet integral impròpia a  $D$ .

Per a funcions positives, l'existència de la integral impròpia és més senzilla de comprovar ja que es té el resultat següent:

**2.7.5 Teorema** *Amb les notacions precedents, suposem que  $f(x, y) \geq 0$ , per a tot  $(x, y) \in D$ . Aleshores, si existeix el límit*

$$\lim_n \int_{D_n} f(x, y) dx dy$$

*per a una successió  $\{D_n\}$  que cobreix monòtonament  $D$ , existeix la integral impròpia de  $f$  a  $D$ .*

*Demostració.* Notem  $a_n$  el valor de la integral de la funció  $f$  sobre  $D_n$ . Per hipòtesi  $a_n \geq 0$  i, com que la successió  $\{D_n\}$  és monòtona, la successió  $\{a_n\}$  és una successió monòtona no decreixent,  $a_n \leq a_{n+1}$ . D'aquí se segueix que la successió  $a_n$  és convergent si i només si és acotada. Per hipòtesi, existeix doncs una constant  $M$  tal que  $a_n \leq M$ , per a tot  $n \in \mathbb{N}$ .

Sigui  $D'_n$  una altra successió de regions elementals que cobreix monòtonament  $D$  i notem  $a'_n$  els valors de les integrals de  $f$  corresponents. Pel raonament anterior, és suficient provar que la successió no decreixent de números positius  $a'_n$  està acotada. Fixat un  $n$ , de la monotonia de la successió  $D_n$  se segueix que hi ha un  $m$  tal que  $D'_n \subseteq D_m$  i, per tant,  $a'_n \leq a_m$ , és a dir,  $a'_n \leq M$ . Com que  $n$  és arbitrari, se segueix que  $a'_n$  és acotada. ■

Per tant, els valors calculats als exemples 2.7.1 i 2.7.2 corresponen als valors exactes de les integrals impròpies en qüestió.

### 2.7.6 Exemples

1. Considerem la integral

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}$$

on  $D = \{(x, y) / 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Prenem  $D_n$  com en l'exemple 2.7.2,

$$D_n = \{(x, y) / \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aleshores,

$$\int_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 \frac{rdr}{r^\alpha} = 2\pi \int_{1/n}^1 r^{1-\alpha} dr.$$

Ara, la integral

$$\int_{1/n}^1 r^{1-\alpha} dr = \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_{1/n}^1 = \frac{1}{2-\alpha} \left( 1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}} \right),$$

és convergent si i només si  $2 - \alpha > 0$  i, per tant, la integral doble original és convergent si i només si  $\alpha < 2$ .

2. Anàlogament, es poden considerar integrals impròpies de la forma

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}$$

on  $D$  és una regió no acotada (amb  $0 \notin \overline{D}$ ), com per exemple  $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \geq 1, x, y \geq 0\}$ . En aquest cas, existeix la integral impròpia si i només si  $\alpha > 2$ .

**2.7.7 Exemple** Un exemple famós i important d'integral impròpia és el següent:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Aquí  $D = \mathbb{R}^2$  i prenem  $D_n = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq n^2\}$ . Aleshores,

$$\int_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-n^2})$$

i, per tant,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi.$$

L'interès d'aquest exemple prové del càlcul que resulta de prendre regions del tipus

$$R_n = [-n, n] \times [-n, n],$$

doncs aleshores tenim

$$\int_{R_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2,$$

d'on podem concloure que

$$\int_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_n \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2,$$

i, en definitiva, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

o, si es prefereix,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

És immediat comprovar que se satisfà:

**2.7.8 Proposició** [Criteri de comparació.] *Si  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  són funcions no negatives amb  $f \leq g$  i  $g$  admet una integral impròpia a  $D$ , aleshores  $f$  també admet integral impròpia a  $D$ .* ■

Així, de l'exemple 2.7.6 en resulta:

**2.7.9 Corollari** Sigui  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funció (positiva) definida i contínua en el disc unitat, llevat de l'origen. Si existeixen  $M > 0$  i  $\alpha < 2$  amb

$$f(x, y) \leq \frac{M}{\sqrt{(x^2 + y^2)^\alpha}}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

aleshores existeix la integral impròpia

$$\int_D f(x, y) dx dy. \quad \blacksquare$$

Deixem l'enunciat del corollari corresponent a dominis no acotats com a exercici per al lector, així com l'extensió d'aquestes consideracions a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ .

En els resultats anteriors hem imposat que la funció  $f$  sigui positiva. Aquesta no és una restricció important, ja que es té el resultat següent que admetrem sense demostració:

**2.7.10 Teorema**  $\int_D f(x, y) dx dy$  és convergent si i només si ho és  $\int_D |f(x, y)| dx dy$ . ■

**2.7.11 Observació** Aquest resultat no és cert per a integrals impròpies d'una variable. En efecte, la integral impròpia

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

és convergent, però no ho és absolutament. La diferent situació que es dona entre una i dues variables es deu al fet que a la recta real la noció d'integral impròpia d'una variable fa ús dels intervals de la forma  $[a, r]$ , fent  $r \rightarrow \infty$ , i no permet, per exemple, prendre subregions  $D_n$  disconnexes.

Per a funcions  $f$  amb gràfic simètric respecte d'un punt  $x_0$  a voltes té interès definir la integral de  $f$  a  $D$  com a límit de les integrals sobre recintes  $D_n$  simètriques respecte de  $x_0$ . Es parla, en aquest cas, del *valor principal de Cauchy*. Per exemple, si  $f$  és una funció integrable en tota corona

$$D_\varepsilon = \{(x, y) / \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

el valor principal de Cauchy de la integral impròpia és

$$vp \int_D f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy.$$

**2.7.12 Exemple** Considerem la funció

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

de l'exemple 2.7.4. Ja hem observat que  $f$  no admet integral impròpia al disc unitat  $D$ . Observem que podem arribar a la mateixa conclusió utilitzant el teorema anterior, ja que es té que

$$\int_D |f(r, \theta)| r dr d\theta = \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{r^3},$$

i la integral d'una variable respecte de  $r$  no és convergent. Té sentit, però, calcular-ne el valor principal de Cauchy:

$$vp \int_D \frac{\sin \theta}{r^3} r dr d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} \frac{\sin \theta}{r^2} dr d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^2} = 0.$$

Per acabar aquest apartat donarem una fórmula de Dirichlet que és útil en el càlcul d'algunes integrals. La fórmula és vàlida en qualsevol dimensió, però ens restringirem a  $\mathbb{R}^3$ .

**Fórmula de Dirichlet.** *Siguin  $p, q, r > 0$  i  $\Delta$  la regió de l'espai definida per  $x, y, z \geq 0$  i  $0 \leq x + y + z \leq 1$ . Se satisfà que*

$$\int_{\Delta} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}. \quad \blacksquare$$

La demostració és senzilla i es pot fer com a exercici.

### 2.7.13 Exemples

1. Com aplicació de la fórmula de Dirichlet podem calcular el volum d'un el·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

En efecte, tindrem

$$V = 8 \int_{E^+} dx dy dz$$

on

$$E^+ = \{(x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \text{ i } x, y, z \geq 0\}.$$

A  $E^+$  considerem el canvi de variables

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} = u, \\ \frac{y^2}{b^2} = v, \\ \frac{z^2}{c^2} = w, \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = au^{1/2} \\ y = bv^{1/2} \\ z = cw^{1/2} \end{array}$$

que té jacobià  $J = \frac{abc}{8} u^{-1/2} v^{-1/2} w^{-1/2}$ . Ara tindrem

$$V = 8 \int_{\substack{u+v+w \leq 1 \\ u, v, w > 0}} \frac{abc}{8} u^{-1/2} v^{-1/2} w^{-1/2} du dv dw,$$

i, per la fórmula de Dirichlet, en resulta que

$$V = abc \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 + 1/2 + 1/2 + 1)} = abc \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3} abc\pi.$$

2. Anem a provar que si

$$p, q, r > 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

se satisfà que

$$\int_{x, y, z > 0} \frac{dx dy dz}{1 + x^p + y^q + z^r} = \frac{1}{pqr} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q}\right) \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right).$$

En efecte, fem el canvi de variable

$$z^r = t(1 + x^p + y^q).$$

En la iteració respecte de la variable  $z$ , resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dz}{1 + x^p + y^q + z^r} &= \frac{1}{1 + x^p + y^q} \int_0^\infty \frac{(1/r)t^{(1/r)-1}(1 + x^p + y^q)^{1/r} dt}{1 + t} \\ &= \frac{1}{r} (1 + x^p + y^q)^{(1/r)-1} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Si fem ara

$$y^q = (1 + x^p)u,$$

trobem que

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{dz}{1 + x^p + y^q + z^r} = \frac{1}{qr} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{r}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q}, 1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) (1 + x^p)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}.$$

Finalment, prenem  $x^p = v$  i en resulta la fórmula final.

## 2.8 Integració aproximada

Fins ara hem establert la noció de funció integrable en el sentit de Riemann i hem après a calcular les integrals amb l'ajut del teorema de Fubini i el de canvi de variables. El càlcul efectiu d'integrals es redueix sempre, d'una manera o altra, al càlcul d'integrals iterades i a l'aplicació successiva de la regla de Barrow, la qual ens permet calcular les integrals avaluant i restant les primitives en els extrems d'integració.

Ara bé, no sempre és fàcil el càlcul de primitives i, fins i tot, en moltes ocasions no és possible. Per exemple, no sabem calcular, en termes de primitives, una integral com la següent:

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} e^{xy} \sin x \sin y \, dx dy.$$

A més, en alguns casos, tot i conèixer la primitiva, pot passar que l'expressió sigui tan complicada que a l'hora d'efectuar-ne avaluacions això introdueixi errors en el resultat final.

En aquest apartat presentem algunes regles numèriques elementals per calcular integrals de diverses variables. El desenvolupament específic de regles numèriques més elaborades queda fora del nostre abast. La integració de funcions de diverses variables en regions de dimensió major que u no és senzilla. Hi ha dues raons que compliquen aquests mètodes de càlcul. La primera és que el nombre d'avaluacions de la funció que es necessiten en dimensió  $n$  creix com la potència  $n$ -èsima del nombre d'avaluacions necessàries en dimensió u. Així, per exemple, si es necessiten 30 avaluacions per fer una integral u-dimensional, es necessitaran de l'ordre de 30000 avaluacions per assolir la mateixa precisió en una integració triple. La segona raó és que en dimensió alta els recintes d'integració poden ésser molt complicats.

### **Integració aproximada en una variable**

Donada una funció  $f$  integrable en un interval  $[a, b]$ , es pretén calcular la integral

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Moltes vegades no es coneix la funció  $f$ , sinó que tan sols tenim el seu valor en un conjunt d'abscisses  $x_1, \dots, x_n$ . El que ens plantegem és trobar un valor numèric de la integral que s'aproximi al valor real.

Volem trobar una combinació lineal de les  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  que approximi el valor de la integral, és a dir, fórmules del tipus:

$$\int_a^b f(x) dx \cong w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

amb  $w_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Aquests  $w_i$  s'anomenen pesos.

Destaquem dos mètodes:

(a) *Fórmula dels trapezidis*. Aquesta fórmula resulta d'approximar la funció  $f$  per una funció poligonal que passa pels punts  $(x_i, f(x_i))$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

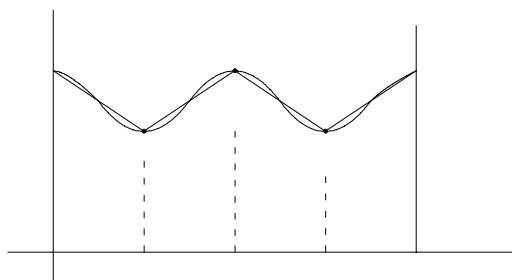


Figura 2.26: Aproximació de  $f$  per una funció poligonal

Suposem que  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  és un conjunt de  $n+1$  punts de l'interval  $[a, b]$  equiespaiats, és a dir,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 1, \dots, n$  i  $h = \frac{b-a}{n}$  és el pas. Aleshores podem approximar l'àrea sota del gràfic de  $f$  per la suma de les àrees dels trapezidis construïts entre els valors de dos punts consecutius (vegeu la figura 2.26), és a dir, considerem l'aproximació

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)) = T_n(f).$$

Si la funció  $f \in C^2([a, b])$  es pot veure que l'error comès, és a dir, la diferència entre el valor real de la integral i el valor trobat usant la fórmula dels trapezidis, és

$$E = \int_a^b f(x) dx - T_n(f) = \frac{b-a}{12} h^2 f''(c),$$

amb  $c$  un punt de l'interval  $[a, b]$ .

D'aquesta expressió de l'error se segueix que podem disminuir-lo tant com vulguem augmentant el nombre de punts o, equivalentment, fent decreixer el pas  $h$ , ja que com que  $f''$  és una funció contínua en l'interval tancat  $[a, b]$ , està acotada en aquest interval.

Cal remarcar que la fórmula dels trapezidis és una regla exacta per a les funcions lineals, és a dir, si  $f(x)$  és una funció lineal, el resultat que s'obté aplicant la fórmula dels trapezidis és exacte.

(b) *Fórmula de Simpson.* Es pot millorar la precisió de l'aproximació del mètode dels trapezis si, en lloc de substituir corbes per segments rectilinis, substituïm el gràfic entre dos punts per una paràbola que passi per aquests punts. Aquest és el fonament de la regla de Simpson.

Suposem que tenim un nombre senar  $n + 1$  de punts equiespaiats,  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ , amb  $n$  parell, i que, com abans,  $h = \frac{b-a}{n}$  denota el pas. Aproximem l'àrea entre la funció i els eixos a  $[x_i, x_{i+2}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ , per l'àrea entre la paràbola pels punts  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  i  $(x_{i+2}, f(x_{i+2}))$  i els eixos (vegeu la figura 2.27).

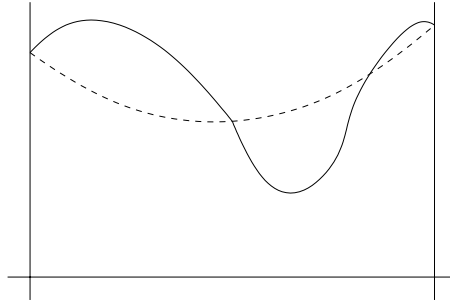


Figura 2.27: Aproximació pel mètode de Simpson

És un exercici elemental comprovar que l'aproximació resultant és

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)) = S_n(f).$$

Si denotem per  $E$  novament l'error d'integració i suposem que  $f \in C^4([a, b])$ , es té que

$$E = \int_a^b f(x) dx - S_n(f) = \frac{b-a}{180} h^4 f^{iv}(c)$$

amb  $c \in [a, b]$ .

Com abans, en ser  $f^{iv}$  contínua en l'interval tancat  $[a, b]$ , és acotada i, per tant, podem fer créixer l'error tant com vulguem augmentant el nombre de punts, és a dir, disminuint el pas  $h$ .

Cal remarcar que la fórmula de Simpson és una regla exacta per a les funcions cúbiques, és a dir, per a polinomis de grau menor o igual que 3.

### **Integració aproximada en dues variables**

La mateixa pregunta que ens fèiem en una variable sobre si podem trobar un valor aproximat per a aquelles integrals sense primitiva ens la tornem a plantejar per a les integrals a  $\mathbb{R}^2$ . En aquest paràgraf anem a donar algunes regles per obtenir aproximacions numèriques d'integrals de dues variables, que s'estenen al cas de més variables.

*Regles producte per a integrals dobles.* Suposem que es vol calcular la integral doble

$$\int_R f(x, y) dx dy,$$

on  $R = [a, b] \times [c, d]$  és un rectangle. El teorema de Fubini redueix el càlcul d'una integral doble al càlcul de dues integrals simples. Les regles producte aprofiten les regles d'integració  $u$ -dimensional i les apliquen a cada una de les integrals simples.

Sigui  $R_1$  una regla aproximada d'integració de la funció  $f$  de  $M + 1$  punts sobre l'interval  $[a, b]$ , és a dir,

$$R_1(f) = \sum_{k=0}^M w_k f(x_k) \cong \int_a^b f(x) dx,$$

i  $R_2$  una regla de  $N + 1$  punts sobre l'interval  $[c, d]$  per a la funció  $g$ , és a dir,

$$R_2(g) = \sum_{\ell=0}^N v_\ell g(y_\ell) \cong \int_c^d g(y) dy.$$

Aleshores, s'anomena *regla producte*  $R_1 \times R_2$  sobre el rectangle  $R = I \times J$  de  $\mathbb{R}^2$

$$(R_1 \times R_2)(h) = \sum_{k=0}^M \sum_{\ell=0}^N w_k v_\ell h(x_k, y_\ell).$$

El resultat següent, que se segueix fàcilment del teorema de Fubini, garanteix que  $R_1 \times R_2$  és una regla d'integració sobre el rectangle:

**2.8.1 Proposició** *Si  $R_1$  és una regla d'integració que integra exactament una funció  $f$  en un interval  $I$  i  $R_2$  integra exactament una funció  $g$  en un interval  $J$ , aleshores  $R_1 \times R_2$  integra exactament  $h(x, y) = f(x)g(y)$  sobre  $I \times J$ . ■*

Per tant, podem construir regles d'integració sobre rectangles de  $\mathbb{R}^2$ , i per extensió sobre blocs de  $\mathbb{R}^n$ , a través de les regles producte de les regles dels trapezis o de Simpson per a integrals  $u$ -dimensionals. Vegem tot seguit les regles dels trapezis i Simpson producte sobre un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$  de  $\mathbb{R}^2$ .

*Regla dels trapezis producte a  $\mathbb{R}^2$ .* Donats  $M, N \in \mathbb{N}$ , considerem la xarxa de punts equirepartits  $(x_i, y_j)$  tals que  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , i  $y_j = c + j\ell$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , on els passos són  $h = \frac{b-a}{M}$  i  $\ell = \frac{d-c}{N}$ . Aleshores la regla producte dona l'aproximació de la integral següent:

$$\int_R f(x, y) dx dy \cong \frac{h\ell}{4} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N c_{ij} f(x_i, y_j),$$

on els coeficients  $c_{ij}$  són els productes dels coeficients  $i$ -èsim i  $j$ -èsim de la regla dels trapezis

unidimensional. La taula següent recull aquests coeficients:

	1	2	2	2	2	...	1
1	1	2	2	2	2	...	1
2	2	4	4	4	4	...	2
2	2	4	4	4	4	...	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1	1	2	2	2	2	...	1

*Regla de Simpson producte a  $\mathbb{R}^2$ .* Donats  $M, N \in \mathbb{N}$  parells, considerem la xarxa de punts equirepartits  $(x_i, y_j)$  tals que  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , i  $y_j = c + j\ell$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , on els passos són  $h = \frac{b-a}{M}$  i  $\ell = \frac{d-c}{N}$ .

Aleshores la regla producte corresponent s'escriu

$$\int_R f(x, y) dx dy \cong \frac{h\ell}{9} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N d_{ij} f(x_i, y_j)$$

on els coeficients  $d_{ij}$  són els productes dels coeficients  $i$ -èsim i  $j$ -èsim de la regla de Simpson unidimensional. La taula següent recull aquests coeficients:

	1	4	2	4	2	...	2	4	1
1	1	4	2	4	2	...	2	4	1
4	4	16	8	16	8	...	8	16	4
2	2	8	4	8	4	...	4	8	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
2	2	8	4	8	4	...	4	8	2
4	4	16	8	16	8	...	8	16	4
1	1	4	2	4	2	...	2	4	1

**2.8.2 Exemple** Calculem la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(x+y) dx dy,$$

usant la regla de Simpson producte agafant 3 punts en cada variable i comparem el resultat amb el valor exacte de la integral.

Si calculem la integral iteradament i utilitzant la regla de Barrow, trobem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \sin(x+y) dx dy &= \int_0^1 -\cos(x+y)|_0^1 dy = \int_0^1 (\cos y - \cos(1+y)) dy = \\ &= \sin y - \sin(1+y) \Big|_0^1 = \sin 1 - \sin 2 + \sin 1 = 2 \sin 1 - \sin 2. \end{aligned}$$

Així, el valor de la integral amb set dígits exactes és

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(x+y) dx dy = 0'7736445.$$

Utilitzem ara la regla producte amb tres punts per variable, és a dir, prenem  $M = N = 2$  i els passos d'integració  $h = \ell = \frac{1}{2}$ . Els punts corresponen a  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1/2$ ,  $y_2 = 1$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} (S_1 \times S_2)(\sin(x+y)) &= \frac{1/2 \cdot 1/2}{9} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 d_{ij} \sin(x_i + y_j) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{i=0}^2 \left( d_{i0} \sin(x_i) + d_{i1} \sin\left(x_i + \frac{1}{2}\right) + d_{i2} \sin(x_i + 1) \right) \\ &= \frac{1}{36} \left( d_{00} \sin 0 + d_{01} \sin \frac{1}{2} + d_{02} \sin 1 + d_{10} \sin \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + d_{11} \sin 1 + d_{12} \sin \frac{3}{2} + d_{20} \sin 1 + d_{21} \sin \frac{3}{2} + d_{22} \sin 2 \right) \\ &= \frac{1}{36} \left( d_{00} \sin 0 + (d_{01} + d_{10}) \sin \frac{1}{2} + (d_{02} + d_{11} + d_{20}) \sin 1 \right. \\ &\quad \left. + (d_{12} + d_{21}) \sin \frac{3}{2} + d_{22} \sin 2 \right). \end{aligned}$$

Els coeficients  $d_{ij}$  són els de la taula següent:

	1	4	1
1	1	4	1
4	4	16	4
1	1	4	1

Per tant, el valor aproximat de la integral, usant els valors de la taula, és

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \sin(x+y) dx dy &\cong \frac{1}{36} \left( \sin 0 + 8 \sin \frac{1}{2} + 18 \sin 1 + 8 \sin \frac{3}{2} + \sin 2 \right) \\ &= 0'7741983. \end{aligned}$$

Observeu que l'error comés, és a dir, la diferència entre el valor real i l'aproximat, és  $\varepsilon = 5'5 \cdot 10^{-4}$ .

**2.8.3 Observació** En recintes arbitraris, diferents dels intervals, també es poden aplicar les regles producte sempre que es pugui aplicar el teorema de Fubini per tal de reduir la integral al càlcul de les integrals iterades corresponents.

# Algunes aplicacions de les integrals múltiples

Quan hem introduït la noció d'integral en dues variables ja hem esmentat el problema subjacent del càlcul del volum de cossos de l'espai  $\mathbb{R}^3$ . En aquest capítol anem a presentar alguns exemples del càlcul d'àrees i volums, i també algunes aplicacions físiques de la noció d'integral. Cal tenir present que amb aquestes aplicacions volem il·lustrar la utilitat del concepte d'integral de diverses variables i que, per tant, aquesta discussió no pot substituir els tractats de física més específics.

## 3.1 Càlcul d'àrees i volums

Les aplicacions més immediates de les integrals múltiples són al càlcul d'àrees de regions del pla i volums de l'espai ordinari. Vegem-ne ara alguns exemples.

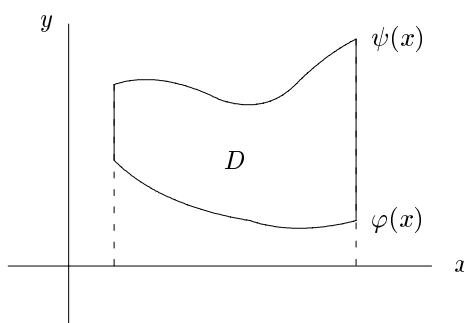


Figura 3.1: Àrea entre dues funcions

Si  $D$  és una regió elemental del pla,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , ja havíem definit àrea de  $D$  per

$$A(D) = \int_D dx dy .$$

Observem que l'àrea de  $D$  no està definida a priori i que amb aquesta integral la definim com el volum del cilindre de base  $D$  i alçada 1, cosa que fa que aquesta definició sigui coherent amb la intuïció geomètrica.

**3.1.1 Exemple** Si  $D$  és una regió donada per

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

aleshores, la definició de l'àrea de  $D$  dona

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_D dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \\ &= \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Recuperem així l'expressió de l'àrea d'aquestes regions que es té del càlcul d'una variable.

**3.1.2 Exemple** Àrea d'una regió donada en coordenades polars per

$$g(\theta) \leq r \leq f(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

En aquest cas tenim

$$A(D) = \int_D dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (f(\theta)^2 - g(\theta)^2) d\theta.$$

Per exemple, calculem l'àrea exterior a la circumferència  $r = 2$  i interior a la cardioide  $r = 2(1 + \cos \theta)$ . Donada la simetria de la figura 3.2, l'àrea demanada és el doble de l'àrea escombrada en variar  $\theta$  de 0 a  $\pi/2$ . Així, trobem que

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} \Big|_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 4 \left[ 2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi + 8. \end{aligned}$$

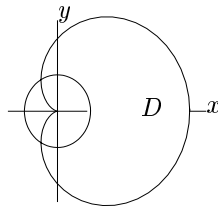


Figura 3.2: Cardioide  $r = 2(1 + \cos \theta)$

Si  $B$  és un cos elemental de  $\mathbb{R}^3$ , es defineix el volum de  $B$  per

$$\text{vol}(B) = \int_B dx dy dz.$$

**3.1.3 Exemple** Si  $B$  és un cos donat per

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

aleshores, es té que

$$\text{vol}(B) = \int_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy,$$

on  $D$  és el domini del pla donat per  $\{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ .

**3.1.4 Exemple** Calculem el volum que s'elimina quan en una esfera de radi  $2a$  hi fem un forat de radi  $a$ , de manera que l'eix de l'orifici sigui un diàmetre de l'esfera, (vegeu la figura 3.3).

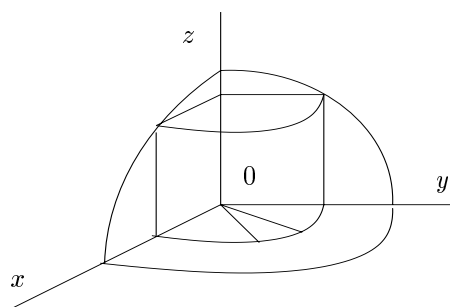


Figura 3.3: Esfera foradada per un cilindre

De la figura deduïm que el volum demanat és 8 vegades el corresponent al primer octant limitat pel cilindre  $x^2 + y^2 = a^2$ , l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  i el pla  $z = 0$ . Usant coordenades cilíndriques, l'esfera s'escriu com a  $z = \sqrt{4a^2 - r^2}$ , i es té que

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}a^3) d\theta = \frac{4}{3} (8 - 3\sqrt{3}) a^3 \pi.$$

**3.1.5 Exemple** Volum d'un cos de revolució. Sigui  $\alpha(x) = (x, f(x))$  una corba en el pla  $x, z$  definida per la funció  $f$ , amb  $a \leq x \leq b$ , i sigui  $B$  el cos de revolució donat per

$$B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

(Vegeu la figura 3.4.) Aleshores el volum de  $B$  és

$$\text{vol}(B) = \int_B dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y^2 + z^2 \leq f(x)^2} dy dz,$$

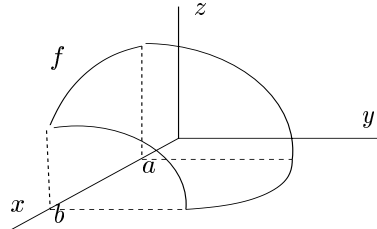


Figura 3.4: Volum de revolució

i, fent el canvi de variables  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ , resulta que

$$\text{vol}(B) = \int_a^b dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(x)} r dr = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Recuperem, així, la fórmula heurística que interpreta el volum de  $B$  com la suma de les àrees dels cercles de radi  $f(x)$ .

**3.1.6 Exemple** Per acabar els exemples de càlcul de volums, determinem el volum tancat per un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

En aquest cas, utilitzem les coordenades esfèriques modificades de la forma següent:

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi \cos \theta, \\ y &= br \cos \varphi \sin \theta, \\ z &= cr \sin \varphi. \end{aligned}$$

El jacobià d'aquest canvi de coordenades és igual a  $abcr^2 \cos \theta$ . La variació del radi  $r$  està determinada per l'equació de l'elipsoide, és a dir,  $0 \leq r \leq 1$ , mentre que les variacions dels angles estan donades, com en el cas de les coordenades esfèriques ordinàries, per  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  i  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Així, el volum demanat és igual a

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 abcr^2 \cos \theta dr = 2\pi \cdot 2 \cdot abc \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \pi abc.$$

En particular, quan  $a = b = c$  recuperem la fórmula del volum d'una esfera.

## 3.2 Mitjana d'una funció

Si  $x_1, \dots, x_n$  són  $n$  valors numèrics, la seva mitjana es defineix per  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ . Volem definir ara la mitjana d'una funció sobre un interval  $I$ .

Sigui  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funció contínua. Dividim l'interval  $I$  en  $n$  intervals,  $I_i$ , de longitud  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , i prenem  $n$  punts  $x_1, \dots, x_n$  en  $I$ , un per a cada interval. La mitjana dels valors de la funció en aquests punts és

$$v_m = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n},$$

i, tenint en compte que  $n = \frac{b-a}{\Delta x}$ , en resulta que

$$v_m = \frac{f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x}{b-a}.$$

Si fem el límit d'aquest quocient quan  $n$  tendeix a l'infinit, és a dir, quan  $\Delta x$  tendeix a zero, el numerador és igual a la integral  $\int_a^b f(x) dx$ . Això ens indueix a definir la mitjana de la funció  $f$  en l'interval  $[a, b]$  per

$$v_m(f) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a},$$

que ens dóna la mitjana d'una funció  $f$  en un interval  $I$  com el quocient entre la integral de la funció i la longitud de l'interval.

Anàlogament, definim la mitjana d'una funció contínua de dues variables,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un domini elemental  $D$ , a partir de

$$v_m(f) = \frac{\int_D f(x, y) dx dy}{A(D)},$$

i la d'una funció contínua de tres variables  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  per

$$v_m(f) = \frac{\int_W f(x, y, z) dx dy dz}{\text{vol}(W)}.$$

**3.2.1 Exemple** Calculem la mitjana del quadrat de la distància dels punts d'una bola a un punt fixat de l'espai. Prenem els eixos de manera que l'esfera té per equació  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  i el punt té coordenades  $(0, 0, c)$ . Hem de calcular la mitjana de la funció  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - c)^2$  sobre la bola, és a dir, volem calcular

$$v_m(f) = \frac{\int_B (x^2 + y^2 + (z - c)^2) dx dy dz}{\int_B dx dy dz}.$$

D'una banda, el volum de la bola  $B$  és igual a  $\int_B dx dy dz = \frac{4}{3}\pi R^3$ . De l'altra, usant coordenades esfèriques i tenint en compte que, per simetria,  $\int_B z dx dy dz = 0$ , es té que

$$\begin{aligned} \int_B (x^2 + y^2 + (z - c)^2) dx dy dz &= \int_B (x^2 + y^2 + z^2 - 2cz + c^2) dx dy dz \\ &= \int_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz + c^2 \text{vol}(B) \\ &= \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi + c^2 \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{4}{5}\pi R^5 + \frac{4}{3}\pi R^3 c^2. \end{aligned}$$

Per tant,  $v_m(f) = \frac{3}{5}R^2 + c^2$ .

### 3.3 Massa d'un cos

Considerem una massa distribuïda al llarg d'un cos  $W$  de l'espai. Un concepte íntimament associat al de massa és el de densitat; de fet, sovint és més còmode calcular la massa d'un cos a partir de la seva funció de densitat. Però, què és la densitat? Com es calcula la massa a partir de la densitat? Analitzem, breument, aquests conceptes en termes del concepte d'integral.

Si  $B$  és una part de  $W$ , la *densitat mitjana* de  $B$  es defineix per

$$\rho_m(B) = \frac{m(B)}{\text{vol}(B)},$$

on  $m(B)$  indica la massa de  $B$ . Estem suposant, per tant, que coneixem la massa  $m(B)$  per a qualsevol part  $B$  de  $W$ . Si fixem un punt  $p \in W$ , definim la densitat de  $W$  en  $p$  com el límit de la densitat mitjana de les regions  $B$  de  $W$  que contenen  $p$ , quan el volum d'aquestes regions tendeix a zero, sempre que aquest límit existeixi. Escrivim

$$\rho(p) = \lim_{B \rightarrow p} \frac{m(B)}{\text{vol}(B)}. \quad (3.1)$$

Suposem que la funció resultant,  $\rho(p)$ , és una funció contínua. Aleshores se satisfà que

$$\rho(p) = \lim_{B \rightarrow p} \frac{\int_B \rho(x, y, z) dx dy dz}{\text{vol}(B)}. \quad (3.2)$$

En efecte, pel teorema del valor mig demostrat en el capítol 1, podem escriure

$$\int_B \rho(x, y, z) dx dy dz = \rho(x_B, y_B, z_B) \text{vol}(B),$$

on  $(x_B, y_B, z_B)$  és un punt de  $B$ . Així, en resulta que

$$\frac{\int_B \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\text{vol}(B)} = \rho(x_B, y_B, z_B).$$

Quan  $B$  tendeix a  $p$ , el punt  $(x_B, y_B, z_B)$  tendeix també a  $p$  i, per la continuïtat de  $\rho$ , trobem que

$$\lim_{B \rightarrow p} \frac{\int_B \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\text{vol}(B)} = \lim_{B \rightarrow p} \rho(x_B, y_B, z_B) = \rho(p).$$

Comparant 3.1 i 3.2, veiem que la integral  $\int_B \rho(x, y, z) \, dx dy dz$  representa la massa de  $B$ . Això dóna sentit a la definició que segueix:

**3.3.1 Definició** Siguin  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  i  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  conjunts elementals del pla i de l'espai de densitat variable  $\rho(x, y)$  i  $\rho(x, y, z)$ , respectivament. La massa de  $D$  i  $W$  es defineix per

$$\begin{aligned} m(D) &= \int_D \rho(x, y) \, dx dy, \\ m(W) &= \int_W \rho(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

**3.3.2 Exemple** Calculem la massa d'una placa quadrada de costat  $a$  suposant que la densitat en cada punt és proporcional al quadrat de la seva distància a un vèrtex.

Prenem coordenades de forma que l'origen sigui un dels vèrtexs del quadrat i que dos dels costats estiguin situats sobre els eixos coordenats (vegeu la figura 3.5).

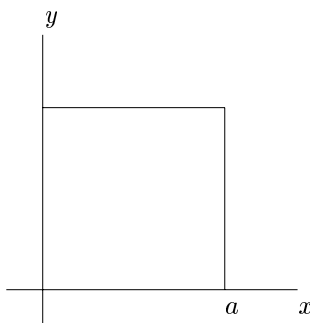


Figura 3.5: Placa quadrada de costat  $a$

Aleshores, la funció de densitat és  $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ , per a certa constant de proporcionalitat  $k$ . Així, la massa de la placa és:

$$m = \int_D \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2) \, dx dy = k \int_0^a \left( \frac{a^3}{3} + ay^2 \right) dy = \frac{2}{3}ka^4.$$

**3.3.3 Exemple** Calculem la massa d'una bola de radi  $R$  formada per capes concèntriques homogènies (és a dir, per a cada esfera -capa- concèntrica de radi  $r$ , es té que la densitat és constant a la capa).

Usant coordenades esfèriques trobem que

$$m = \int_W \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho(r) dr \int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr.$$

### 3.4 Centre de masses

Suposem que tenim  $n$  masses puntuals  $m_1, m_2, \dots, m_n$  en els punts  $x_1, x_2, \dots, x_n$  d'una barra sense massa; aleshores, el *centre de masses* es defineix per

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

L'interès físic d'aquesta definició és que  $\bar{x}$  és el punt d'equilibri de la barra considerada, ja que en aquest punt el moment total,  $\sum m_i (x_i - \bar{x})$ , és zero, (vegeu la figura 3.6).

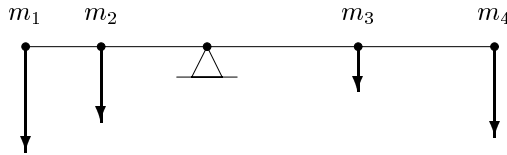


Figura 3.6: Centre de masses

Si suposem ara que la barra  $I$  té una densitat de massa contínua  $\rho(x)$ , podem aproximar el centre de masses,  $\bar{x}$ , dividint la barra en  $n$  intervals  $I_i$  de longitud  $\Delta x$ . Prenent, per exemple, el punt mig  $x_i$  de cada interval i suposant que la densitat és constant,  $\rho(x_i)$ , en cada interval, tenim que

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i) \Delta x}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i) \Delta x},$$

i prenent la partició prou fina i fent un pas al límit trobem que

$$\bar{x} = \frac{\int_I x \rho(x) dx}{m(I)} = \frac{\int_I x \rho(x) dx}{\int_I \rho(x) dx}.$$

Anàlogament, si  $D$  es una placa de  $\mathbb{R}^2$  o  $W$  un sòlid de  $\mathbb{R}^3$  amb densitat variable  $\rho$ , el centre

de masses es defineix per

$$\left( \begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \end{array} \right) = \frac{\int_D \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \rho(x, y) dx dy}{m(D)}, \quad \left( \begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{array} \right) = \frac{\int_W \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \rho(x, y, z) dx dy dz}{m(W)}.$$

Sovint, el centre de masses es pot determinar sense calcular efectivament totes les integrals que el defineixen com a conseqüència de consideracions geomètriques o de simetria:

1. *Si dividim un cos en dues o més parts, el centre de masses és el mateix que si les masses de cadascuna de les parts estiguessin concentrades en els centres de masses corresponents.* Per veure-ho només cal aplicar la propietat additiva de la integral. En efecte, si  $W = W_1 \cup W_2$  (on suposem que  $W_1$  i  $W_2$  només tenen contacte a la frontera), aleshores, pel teorema d'additivitat, la primera coordenada del centre de masses està donada per

$$\int_W x \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_{W_1} x \rho(x, y, z) dx dy dz + \int_{W_2} x \rho(x, y, z) dx dy dz = \bar{x}_1 m(W_1) + \bar{x}_2 m(W_2),$$

on  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$  són les primeres coordenades dels centres de masses de  $W_1$  i  $W_2$ , respectivament. Així, per l'additivitat de la massa ( $m(W) = m(W_1) + m(W_2)$ ), en resulta l'expressió

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 m(W_1) + \bar{x}_2 m(W_2)}{m(W_1) + m(W_2)}.$$

Anàlogament es prova la relació corresponent per a les coordenades  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ .

2. *Si un cos té un pla de simetria en la distribució de massa, llavors el centre de masses li pertany.*

En efecte, suposem que considerem els eixos tals que el pla de simetria del volum  $W$  és el pla  $xy$ , i se satisfà que

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z).$$

Llavors, si denotem per  $W^+$  i  $W^-$  les parts de  $W$  per sobre i per sota del pla  $xy$  es té que

$$\begin{aligned} \bar{z}(W) &= \int_W z \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{W^+} z \rho(x, y, z) dx dy dz + \int_{W^-} z \rho(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{W^+} z \rho(x, y, z) dx dy dz + \int_{W^+} -w \rho(u, v, -w) du dv dw = 0. \end{aligned}$$

En particular, en un cos homogeni (de densitat constant) el centre de masses només depèn de la seva geometria. Per tant, en aquest cas tot pla de simetria geomètrica és pla de simetria en la distribució de la massa.

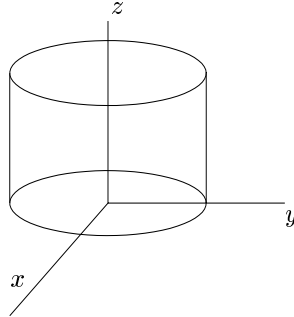


Figura 3.7: Centre de masses d'un cilindre

**3.4.1 Exemple** Calculem el centre de masses d'un cilindre recte d'alçada  $h$  i base circular de radi  $R$  suposant que la densitat en cada punt és proporcional a la seva distància a la base.

Prenem el cilindre com mostra la figura 3.7, l'equació del qual en coordenades cilíndriques s'escriu  $r = R$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, h]$  i la densitat  $\rho(r, \theta, z) = kz$ . Observem que qualsevol pla que passi per l'eix  $z$  és pla de simetria en la distribució de massa i que, per tant, el centre de masses estarà a l'eix  $z$ . D'una banda,

$$\begin{aligned} m(W) &= \int_W \rho(x, y, z) dx dy dz = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^h kz r dz dr d\theta \\ &= 2kh^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^R r dr d\theta = kh^2 R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2} k\pi h^2 R^2, \end{aligned}$$

i de l'altra,

$$\begin{aligned} \int_W z \rho(x, y, z) dx dy dz &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^h kz^2 r dz dr d\theta = \frac{4}{3} kh^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^R r dr d\theta = \\ &= \frac{2}{3} kh^3 R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3} k\pi h^3 R^2, \end{aligned}$$

i, per tant,  $\bar{z} = 2h/3$ .

### ***Els teoremes de Guldin***

En els dos exemples que segueixen, veurem dos resultats, coneguts com el primer i el segon teorema de Guldin, que ja eren coneguts per Pappus al segle III, que relacionen el volum i l'àrea de cossos de revolució amb el centre de masses. Pel context on ens trobem, començarem pel segon teorema de Guldin.

**3.4.2 Exemple** Sigui  $D$  una làmina homogènia (de densitat constant igual a 1) en el pla  $xy$  i la fem girar al voltant de l'eix  $x$  ( $D$  no talla aquest eix); llavors podem enunciar el resultat següent.

**Segon teorema de Pappus.** *El volum de revolució del cos de revolució engendrat pel recinte pla  $D$ , al girar al voltant de l'eix  $x$ , és igual al producte de l'àrea del recinte per la longitud de la circumferència descrita pel seu centre de masses (figura 3.8).*

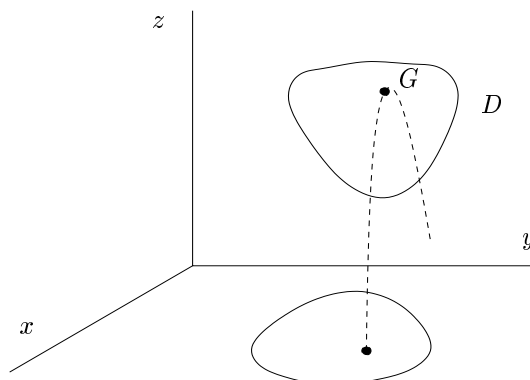


Figura 3.8: Segon teorema de Pappus

En efecte, denotem per  $W$  el cos de revolució corresponent. A  $W$ , les equacions

$$\begin{aligned} u &= x, \\ v &= y \cos \theta, \\ w &= y \sin \theta, \end{aligned}$$

defineixen un sistema de coordenades de jacobiana igual a  $y$ . Així, el volum de  $W$  és igual a

$$\int_0^{2\pi} \int_D y \, dy \, dx = 2\pi \int_D y \, dx \, dy.$$

D'altra banda, per la definició del centre de masses tenim que

$$\bar{y} = \frac{\int_D y \, dx \, dy}{A(D)},$$

i, per tant,

$$2\pi\bar{y} \text{àrea}(D) = \int_D 2\pi y \, dx \, dy = V. \quad \blacksquare$$

Calculem, per exemple, el volum d'un tor de secció circular (vegeu figura 3.9): l'àrea de la secció és  $\pi r^2$  i el centre de masses és a l'eix  $x$ , en el punt  $(R, 0)$ . Llavors,

$$V = \pi r^2 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

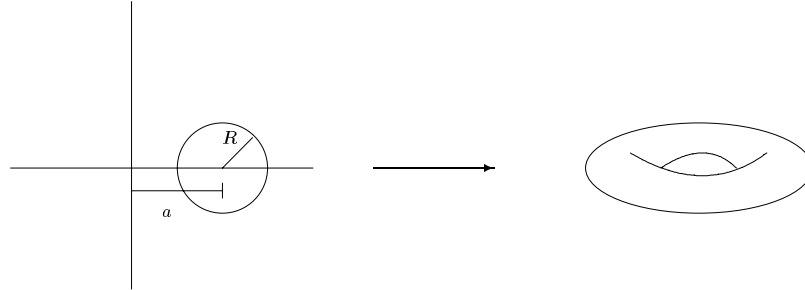


Figura 3.9: Tor generat per la revolució d'un cercle

**3.4.3 Exemple** El primer teorema de Guldin fa referència a l'àrea d'una superfície de revolució. Encara que aquest concepte es desenvoluparà més extensament en el proper capítol, enunciaré aquí l'esmentat teorema, deixant la demostració per a més endavant.

**Primer teorema de Guldin.** *L'àrea de la superfície de revolució engendrada per una corba plana,  $S$ , és igual al producte de la longitud de la corba per la longitud de la circumferència descrita pel seu centre de masses.*

Els teoremes de Guldin poden usar-se també en l'altre sentit, és a dir, a partir d'un volum o d'una àrea coneguda poden utilitzar-se per a calcular un centre de masses. Per exemple, per calcular el centre de gravetat d'una semicircumferència homogènia de radi  $R$ , usem aquest teorema tenint en compte que l'àrea de la superfície de revolució és  $4\pi R^2$ . Llavors  $4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi \bar{y}$  i, per tant,  $\bar{y} = \frac{2}{\pi}R$ .

## 3.5 Moment d'inèrcia i energia cinètica

Suposem que tenim una partícula de massa  $m$  que gira al voltant d'un eix amb velocitat angular  $w$ . Si  $r$  és la distància de la partícula a l'eix de gir, la velocitat de translació d'aquesta partícula és

$$v = rw,$$

i, per tant, l'energia cinètica corresponent és

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2w^2.$$

Així, si denotem per  $I$  el producte de la massa de la partícula pel quadrat de la seva distància a l'eix de gir, en resulta l'expressió

$$E = \frac{1}{2}Iw^2.$$

Aquesta fórmula per a l'energia cinètica de la partícula és completament anàloga a la corresponent a l'energia cinètica de translació,  $\frac{1}{2}mv^2$ , i substitueix la massa  $m$  per la quantitat  $I$  i la

velocitat de translació  $v$  per la velocitat angular  $w$ . A la quantitat  $I$  se l'anomena *el moment d'inèrcia* de la partícula de massa  $m$  respecte de l'eix de gir.

El moment d'inèrcia d'un sistema de partícules de l'espai respecte d'un eix fixat és additiu, es a dir, si tenim dues partícules de masses  $m_1$  i  $m_2$  a distàncies  $r_1$  i  $r_2$  de l'eix de gir, el moment d'inèrcia del sistema format per les dues partícules és igual a

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Això fa que la definició del moment d'inèrcia d'un cos  $W$  de l'espai de densitat variable respecte d'un eix es defineixi mitjançant una integral triple. En efecte, sigui  $\rho(x, y, z)$  la funció de densitat de massa de  $W$  i  $r$  la funció distància d'un punt de  $W$  a un eix fixat. Subdividim  $W$  en regions de volum  $\Delta x \Delta y \Delta z$  i aproximem  $W$  per un sistema de partícules, un per a cadascuna de les regions resultants; en cadascuna d'aquestes regions aproximem la massa per  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ , on  $\rho$  és el valor de la densitat en un punt de la regió, i aproximem la distància  $r$  pel valor d'aquesta distància en aquest mateix punt. El moment d'inèrcia resultant d'aquesta aproximació és

$$\sum r^2 \rho \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Si passem al límit d'aquesta expressió quan el volum  $\Delta x \Delta y \Delta z$  tendeix a zero, trobem la integral

$$I = \int_W r^2 \rho dx dy dz.$$

Per definició, aquesta integral és el moment d'inèrcia de  $W$  respecte de la recta fixada. Anàlogament, si  $D$  és una placa del pla  $\mathbb{R}^2$ , definim el moment d'inèrcia de  $D$  respecte d'un eix com

$$I = \int_D r^2 \rho dx dy.$$

Especialment interessants són els moments d'inèrcia respecte dels eixos coordenats. Sigui  $D$  una làmina de  $\mathbb{R}^2$  de densitat de massa  $\rho(x, y)$ . Definim el seu *moment d'inèrcia* respecte dels eixos  $x, y$  respectivament com

$$I_x = \int_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \int_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

que mesuren la resposta d'un cos a l'intent de girar-lo, i depenen de la forma i massa del cos.

Anàlogament, definim el moment d'inèrcia d'un sòlid  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  de densitat de massa  $\rho(x, y, z)$  respecte dels eixos  $x, y, z$ , respectivament, com

$$\begin{aligned} I_x &= \int_W (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_y &= \int_W (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_z &= \int_W (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Amb aquesta definició de moment d'inèrcia es manté el lligam establert per al cas d'una partícula entre aquest i l'energia cinètica del sòlid. En efecte, considerem un sòlid rígid  $W$  que gira amb

velocitat angular constant  $\Omega$  al voltant d'un eix fix. Un element de massa  $dm$  contribuirà  $\frac{1}{2}dm |\vec{v}|^2$  a l'energia cinètica total del cos. A més, si  $l$  és la distància de  $dm$  a l'eix de rotació, llavors  $|\vec{v}| = \Omega l$ , ja que cada element de massa està en moviment circular. Per tant,  $dE = \frac{1}{2}\Omega^2 l^2 dm$  i l'energia cinètica total serà

$$E = \int_W dE = \int_W \frac{1}{2}\Omega^2 l^2 dm = \frac{1}{2}I\Omega^2,$$

on  $I = \int_W l^2 dm$ , que és el moment d'inèrcia del cos respecte de l'eix donat. Notem que, en particular, quan un dels eixos és un eix coordenat, tenim les definicions de  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  donades abans.

Tot i l'analogia resultant entre el moment d'inèrcia i la massa de  $W$ , cal remarcar que el moment d'inèrcia de  $W$  respecte d'un eix depèn de l'eix de gir i de la forma de  $W$ .

**3.5.1 Exemple** Calculem el moment d'inèrcia, respecte a l'eix  $x$ , d'un plat que té per contorn un arc de la corba  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  i l'eix  $x$ , sabent que la densitat a cada punt és proporcional a la seva distància a l'eix.

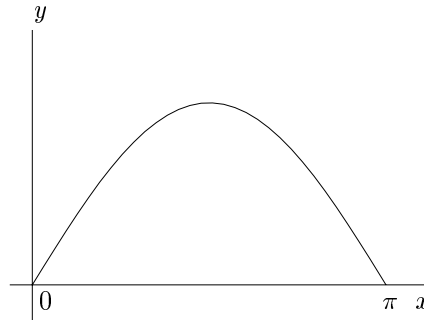


Figura 3.10: Moment d'inèrcia d'un plat

La funció de densitat és  $\rho = ky$ , per a certa constant  $k$ , i per tant el moment d'inèrcia respecte de  $x$  és:

$$I_x = \int_D y^2 \rho(x, y) dx dy = k \int_0^\pi \int_0^{\sin x} y^3 dy dx = \frac{k}{4} \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3}{32} k\pi.$$

**3.5.2 Exemple** Calculem el moment d'inèrcia de la bola unitat  $W = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  respecte d'un diàmetre, sabent que la densitat de massa en cada punt és proporcional a la distància del punt al centre de la bola.

Podem suposar, per simetria, que el diàmetre és l'eix  $z$ . Operant amb coordenades esfèriques,

$x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$ , tenim  $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \varphi$ ,  $\rho = kr$ , llavors

$$\begin{aligned} I_z &= \int_W (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 kr r^2 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi k \frac{1}{6} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi k}{3} \int_0^\pi \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{4\pi k}{9}. \end{aligned}$$

**3.5.3 Exemple** Si  $W$  és un cos de forma geomètrica simple que té un eix de simetria, aleshores és relativament senzill calcular el moment d'inèrcia de  $W$  respecte de aquest eix.

Considerem, per exemple, un cilindre anular homogeni i calculem el seu moment d'inèrcia respecte de l'eix de simetria. Escollim coordenades de manera que  $W$  sigui els cos donat per les desigualtats

$$\begin{aligned} a^2 &\leq x^2 + y^2 \leq b^2, \\ 0 &\leq z \leq l. \end{aligned}$$

L'eix de simetria és l'eix  $z$ . Com que  $W$  és un cos homogeni, podem suposar que la funció de densitat és constant igual a 1. Així, utilitzant coordenades cilíndriques, podem calcular el moment d'inèrcia segons:

$$\begin{aligned} I &= \int_W (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_0^l r^2 \cdot r dz dr d\theta \\ &= 2\pi l \int_a^b r^3 dr = \frac{\pi l}{2} (b^4 - a^4). \end{aligned}$$

La massa del cilindre és

$$m(W) = (\pi b^2 - \pi a^2)l = \pi l(b^2 - a^2),$$

i, per tant, podem expressar el moment d'inèrcia de la forma

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi l}{2} (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{2} m(W) (b^2 + a^2). \end{aligned}$$

Així, quan  $a = 0$ , cas en el qual tenim un cilindre massís, el moment d'inèrcia respecte de l'eix del cilindre és

$$I = \frac{1}{2} m(W) b^2,$$

mentre que si fem el límit quan  $a$  tendeix a  $b$ , cas en el qual tindrem només la carcassa del cilindre, trobem que

$$I = m(W) b^2.$$

Aquests resultats tenen una interpretació evident: amb una mateixa massa, la inèrcia de rotació del cilindre massís és menor, ja que té bona part de la massa més propera a l'eix de gir que la distància  $b$ .

Hi ha una relació molt útil entre el moment d'inèrcia d'un cos  $W$  respecte d'un eix i el moment d'inèrcia de  $W$  respecte d'un eix paral·lel que passa pel centre de masses. Aquesta relació es coneix com a teorema dels eixos paral·lels o teorema de Steiner:

**3.5.4 Teorema de Steiner** *El moment d'inèrcia d'un cos respecte d'un eix és la suma del moment d'inèrcia respecte d'un eix paral·lel que passa pel centre de masses i el moment que tindria si tota la seva massa estigués concentrada en l'esmentat centre.*

Podem expressar analíticament aquest resultat de la forma següent: sigui  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  una regió elemental i  $\rho$  una funció de densitat. Sigui  $r$  un eix de l'espai i  $s$  la recta paral·lela que passa pel centre de masses de  $W$ . Finalment, notem

$$\begin{aligned} d &= \text{distància del centre de masses a } r, \\ m &= \text{massa total de } W. \end{aligned}$$

Aleshores, el teorema de Steiner s'expressa per l'equació

$$\boxed{I_r = I_s + md^2.}$$

En efecte, prenem coordenades de manera que el centre de masses de  $W$  és l'origen,  $(0, 0, 0)$ , i que  $s$  és l'eix  $z$ . La recta  $r$  és una recta paral·lela a l'eix  $z$  que passa per un punt  $(x_0, y_0, 0)$ . Aleshores, el moment d'inèrcia de  $W$  respecte de  $r$  és

$$\begin{aligned} I_r &= \int_W ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \rho \, dx dy dz \\ &= \int_W (x^2 + y^2) \rho \, dx dy dz + (x_0^2 + y_0^2) \int_W \rho \, dx dy dz \\ &\quad - 2x_0 \int_W x \rho \, dx dy dz - 2y_0 \int_W y \rho \, dx dy dz. \end{aligned}$$

Però, com que l'origen és el centre de masses de  $W$ , es té que

$$\int_W x \rho \, dx dy dz = \int_W y \rho \, dx dy dz = 0,$$

d'on se segueix el resultat. ■

Observem que d'aquest resultat es dedueix que el moment d'inèrcia d'un cos respecte d'un eix és més gran a mesura que és més gran la distància de l'eix al centre de masses del cos, i és mínim quan l'eix passa pel centre de masses.

**3.5.5 Exemple** Sigui  $W$  el cilindre donat per les desigualtats

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq R^2, \\ -\frac{h}{2} &\leq z \leq \frac{h}{2},\end{aligned}$$

amb densitat constant  $k$ . El moment d'inèrcia de  $W$  respecte de l'eix  $x$ , calculat amb coordenades cilíndriques, és:

$$\begin{aligned}I &= k \int_W (y^2 + z^2) dx dy dz = k \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dz dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^R (hr^3 \sin^2 \theta + \frac{h^3}{12} r) dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} (h \frac{R^4}{4} \sin^2 \theta + \frac{h^3 R^2}{12} \frac{R^2}{2}) d\theta \\ &= k \left( \frac{hR^4}{4} \pi + \frac{\pi h^3 R^2}{12} \right).\end{aligned}$$

La massa del cilindre és

$$m(W) = \pi R^2 \cdot h \cdot k.$$

Així, podem escriure el moment d'inèrcia segons

$$I = m(W) \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right].$$

Segons el teorema de Steiner, el moment d'inèrcia de  $W$  respecte d'un eix perpendicular al cilindre i que passa per un extrem és

$$\begin{aligned}I' &= m \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right] + m \frac{h^2}{4} \\ &= m \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right].\end{aligned}$$

**3.5.6 Exemple** Un fluid de densitat constant  $\rho = 1$  està contingut entre dos cilindres de radis  $a_1$  i  $a_2$ , que giren a velocitats angulars  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Cada partícula de fluid es mou descrivint una circumferència amb velocitat  $v(r) = A/r + B r$ . Les constants  $A$  i  $B$  estan triades de manera que  $v(a_1) = \Omega_1 a_1$  i  $v(a_2) = \Omega_2 a_2$ . Si el fluid està confinat entre els plans  $z = 0$  i  $z = h$  (vegeu la figura 3.11), calculem l'energia cinètica total del fluid.

Sigui  $W$  el volum entre els dos cilindres. Si prenem coordenades cilíndriques, es té que

$$\begin{aligned}E &= \int_W \frac{1}{2} v^2 dm = \int_W \frac{1}{2} v^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \left( \frac{A^2}{r^2} + 2AB + B^2 r^2 \right) r dr d\theta dz = h \pi \int_{a_1}^{a_2} \left( \frac{A^2}{r} + 2ABr + B^2 r^3 \right) dr \\ &= h \pi \left[ A^2 \ln \frac{a_2}{a_1} + AB(a_2^2 - a_1^2) + \frac{B^2}{4}(a_2^4 - a_1^4) \right],\end{aligned}$$

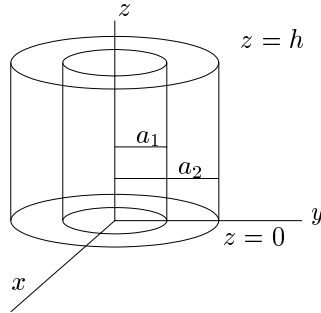


Figura 3.11: Un fluid entre dos cilindres

on  $A$  i  $B$  els trobarem resolent el sistema lineal

$$\begin{aligned}\Omega_1 a_1 &= \frac{A}{a_1} + B a_1, \\ \Omega_2 a_2 &= \frac{A}{a_2} + B a_2,\end{aligned}$$

és a dir,

$$\begin{aligned}A &= a_1 \left[ \Omega_1 - \frac{\Omega_1 a_1^3 - \Omega_2 a_1 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \right], \\ B &= \frac{\Omega_1 a_1^2 - \Omega_2 a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}.\end{aligned}$$

### 3.6 Potencial gravitacional

Segons la llei de la gravitació universal de Newton, la força entre dues partícules de masses  $m$  i  $m'$  separades per una distància  $r$  és una força atractiva en la direcció que uneix les partícules i de mòdul igual a

$$\frac{Gmm'}{r^2},$$

sent  $G$  la constant de gravitació universal. Podem expressar aquesta llei de forma vectorial: si  $(x_0, y_0, z_0)$  són les coordenades de la partícula de massa  $m$  i  $(x, y, z)$  les de la de massa  $m'$ , aleshores la força exercida per  $m$  sobre  $m'$  és igual a

$$\begin{aligned}F &= -\frac{Gmm'}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \frac{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \\ &= -\frac{Gmm'}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} (x-x_0, y-y_0, z-z_0).\end{aligned}$$

Així, si denotem per  $r = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}$ , la força exercida per  $m$  sobre una partícula de massa unitat  $m' = 1$  en el punt  $(x, y, z)$  és

$$F = -\frac{Gm}{r^3}(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Un càlcul elemental mostra que  $F$  és igual a

$$F = \nabla\left(\frac{Gm}{r}\right),$$

on  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ .

En aquest cas es diu que  $F$  admet una funció potencial,  $V = Gm/r$  (més endavant, en els capítols 5 i 6, tractarem els camps vectorials amb més detall).

La força gravitacional i, en conseqüència, el potencial gravitacional són additius. Això és, si  $m_1, \dots, m_k$  són masses puntuals de l'espai, el potencial gravitacional que generen és igual a

$$G\left(\frac{m_1}{r_1} + \dots + \frac{m_k}{r_k}\right),$$

on  $r_1, \dots, r_k$  són les distàncies de les masses corresponents fins al punt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Així, com en d'altres processos additius examinats al llarg d'aquest capítol, la noció de potencial gravitacional creat per un cos de l'espai es defineix en termes d'una integral.

Suposem ara que el nostre objecte atractor és un domini estès  $W$  amb densitat de massa  $\rho(x, y, z)$ . Es defineix el potencial gravitacional creat per  $W$  com la funció definida per la integral

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}.$$

Observem que si el punt de definició de  $V$  és de  $W$  aleshores la integral és una integral impròpia, que és convergent.

**3.6.1 Exemple** Calculem el potencial gravitacional degut a una barnilla de longitud  $L$ , homogènia (amb densitat igual a 1), en els punts de l'eix on està situada, (vegeu la figura 3.12):

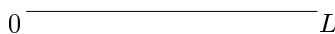


Figura 3.12: Barnilla homogènia de longitud  $L$

$$\begin{aligned} V(x_1) &= Gm \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{(x_1 - x)^2}} = Gm \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{x_1 - x} = \\ &= GM(-\ln(x_1 - x)) \Big|_{-L/2}^{L/2} = Gm \ln \frac{x_1 + (L/2)}{x_1 - (L/2)} = Gm \ln \frac{PA}{PB} \end{aligned}$$

**3.6.2 Exemple** Usant coordenades esfèriques, calculem el potencial gravitacional d'una esfera de radi  $R$  formada per capes concèntriques homogènies.

Suposem que l'origen és el centre de l'esfera i que la densitat de massa és constant en cada capa concèntrica de l'esfera (és a dir, la densitat  $\rho(r)$  és funció del radi de la capa). Usem el resultat de l'exemple 3.3.3 que ens donava la massa de l'esfera segons  $M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr$ .

Prenem un punt  $p$  qualsevol en l'eix  $z$  de coordenades  $(0, 0, D)$ , amb  $D > 0$ ; la simetria del problema ens donarà el potencial a qualsevol punt de l'espai. Es té que

$$\begin{aligned} V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (D - z)^2}} dx dy dz \\ &= Gm \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho(r)r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

Ara bé,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \varphi}} d\varphi &= \frac{1}{Dr} \sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \varphi} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{Dr} \left[ (D^2 + r^2 + 2Dr)^{1/2} - (D^2 + r^2 - 2Dr)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{Dr} [D + r - |D - r|], \quad (*) \end{aligned}$$

expressió que cal avaluar distingint dos casos:

(a) Si  $p$  és exterior a l'esfera ( $D > R$ ), llavors  $|D - r| = D - r$ , (\*) val  $\frac{2}{D}$  i es té que

$$\begin{aligned} V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho(r)r^2 \frac{2}{D} dr \\ &= \frac{4\pi}{D} Gm \int_0^R \rho(r)r^2 dr = \frac{GMm}{D}. \end{aligned}$$

Per tant, el potencial degut a una esfera de densitat  $\rho(r)$  en un punt exterior és el mateix que si tota la massa de l'esfera es concentrés en el seu centre.

(b) Si  $p$  és interior a l'esfera ( $D < R$ ), llavors

$$|D - r| = \begin{cases} D - r & \text{si } r < D, \\ r - D & \text{si } r > D, \end{cases}$$

i el valor de (\*) és

$$\begin{cases} 2/D & \text{si } r < D, \\ 2/r & \text{si } r > D, \end{cases}$$

i es té que

$$\begin{aligned}
 V(x_1, y_1, z_1) &= Gm \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^D \rho(r)r^2 \frac{2}{D} dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_D^R \rho(r)r^2 \frac{2}{r} dr \right] \\
 &= Gm \left[ \frac{4\pi}{D} \int_0^D \rho(r)r^2 dr + 4\pi \int_D^R \rho(r)r dr \right] \\
 &= Gm \left[ \frac{M_D}{D} + 4\pi \int_D^R \rho(r)r dr \right],
 \end{aligned}$$

on el primer sumand és el potencial degut al tros de massa  $M_D$  corresponent a l'esfera de radi  $D$ .

Si  $D < 0$ , cal substituir  $D$  per  $|D|$  en els càlculs anteriors. Així, per  $D < 0$  en el cas (a), trobem que

$$V(x_1, y_1, z_1) = -\frac{GMm}{D},$$

i en el cas (b), que

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \left[ -\frac{M_D}{D} + 4\pi \int_{-D}^R \rho(r)r dr \right].$$

**3.6.3 Observació** El potencial gravitacional ens dona també l'oportunitat de presentar l'interès de les integrals de més de tres variables. En efecte, siguin  $W$  i  $W'$  dos cossos de l'espai amb distribucions de masses donades per les funcions  $\rho(x, y, z)$  i  $\rho(x', y', z')$ , respectivament. Segons la llei de Newton, el potencial gravitacional entre dos elements de masses arbitràriament petites de  $W$  i  $W'$  és

$$G \frac{\rho(x, y, z)\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta x' \Delta y' \Delta z',$$

i, per tant, trobem la integral de sis variables

$$G \int_{W \times W'} \frac{\rho(x, y, z)\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx dy dz dx' dy' dz'.$$

Val a dir que, com hem observat en els exemples anteriors, sovint el comportament d'un cos és similar al d'una massa puntual concentrada en el seu centre de masses, la qual cosa estalvia calcular integrals de sis variables.

# Integració de funcions sobre corbes i superfícies

En molts processos de la física i de les aplicacions és convenient modelitzar un cos de l'espai mitjançant una corba o una superfície, de manera que el model sigui més senzill que l'objecte original. Així, sovint es tracta un filferro (o un fil conductor) com una línia o una placa com una superfície, com si no tinguessin volum. Tot i això, aquests models estan dotats d'una funció de densitat de massa. Si volem determinar la massa d'una línia material de l'espai  $\mathbb{R}^3$  a partir de la seva funció de densitat, no podem integrar la funció com si fos de tres variables, sinó que cal fer referència al fet que la línia és de dimensió 1. És així com sorgeix el concepte d'integral de trajectòria que introduïm en aquest capítol. Anàlogament, si la massa que volem calcular és la d'una placa, la integral corresponent és una integral de superfície.

Aquestes són aplicacions del càlcul integral que podríem haver inclòs en el capítol anterior. No obstant això, hem preferit dedicar un capítol específic a aquestes qüestions que aprofitarem, alhora, per repassar els conceptes geomètrics de corba i superfície de l'espai, cosa que ens serà de molta utilitat en els capítols següents.

## 4.1 Longitud d'una trajectòria

En aquest apartat analitzem el concepte de longitud d'una corba i com calcular-la. Per fer-ho, començarem recordant les definicions de trajectòria i de corba associada.

La idea intuïtiva de trajectòria respon a la del recorregut descrit per una partícula a mesura que passa el temps. Així, per conèixer la trajectòria cal conèixer la posició de la partícula en cada instant, és a dir, les seves coordenades en funció del temps. Formalitzem aquesta idea de la forma següent.

**4.1.1 Definició** *Una trajectòria, o camí, és una aplicació, derivable amb continuïtat,  $\sigma$  d'un interval tancat  $I = [a, b]$  a  $\mathbb{R}^3$ ,*

$$\begin{aligned}\sigma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)).\end{aligned}$$

La variable real  $t$  rep el nom de *paràmetre* (o també, *temps*) de la trajectòria  $\sigma$ . A la imatge de  $I$  per  $\sigma$ ,  $\sigma(I)$ , l'anomenarem *la corba associada* a la trajectòria  $\sigma$ . És a dir, la corba associada a una trajectòria correspon al conjunt de punts pels quals passa la trajectòria al llarg del temps  $t \in [a, b]$ , mentre que el terme *trajectòria* es reserva per a la forma en la qual es descriu el pas per aquests punts. És clar, per tant, que dues trajectòries diferents poden tenir la mateixa corba associada.

En la definició de trajectòria hem imposat que  $\sigma$  sigui derivable, de fet amb continuïtat. La derivada de  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} \sigma' : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \end{aligned}$$

defineix el *vector tangent*  $\sigma'(t)$  en cada punt,  $\sigma(t)$ , de la trajectòria. El mòdul d'aquest vector indica la velocitat amb la qual es recorre la corba associada a la trajectòria.

#### 4.1.2 Exemples

1. Considerem les trajectòries planes  $\sigma, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definides per

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\cos t, \sin t), \\ \gamma(t) &= (\cos 2t, \sin 2t), \end{aligned}$$

respectivament. Ambdues trajectòries tenen la circumferència  $x^2 + y^2 = 1$  com a corba associada, però mentre que  $\sigma$  fa una volta al llarg de la circumferència,  $\gamma$  en fa dues. Observem que les velocitats corresponents són 1 i 2, respectivament.

2. La cicloide és la corba plana descrita per un punt de la circumferència unitat quan aquesta roda al llarg de l'eix de les  $x$  (vegeu la figura 4.1). Si  $t$  és l'angle de gir de la circumferència, l'equació paramètrica de la cicloide és

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

La cicloide completa un cicle quan  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

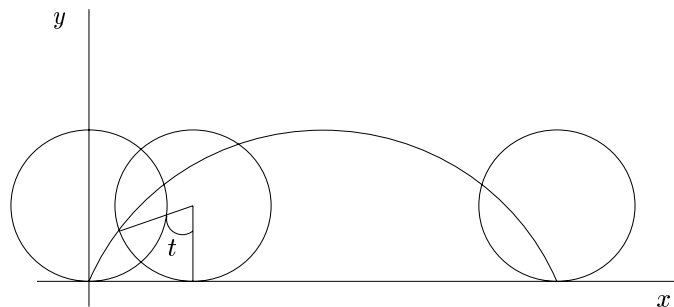


Figura 4.1: Una cicloide

3. La trajectòria  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida per

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t),$$

descriu una volta de l'hèlice circular (vegeu la figura 4.2).

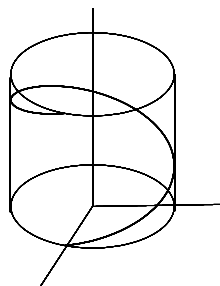


Figura 4.2: Hèlice circular

Com podem mesurar la longitud d'una trajectòria? Ho farem per un procés d'aproximació: considerem una trajectòria  $\sigma$ , que suposarem que és *simple*, és a dir, que és injectiva, o sense autointerseccions (encara que això no és necessari). Podem aproximar la longitud de la corba associada a la trajectòria per la longitud d'una corba poligonal formada per un nombre finit de segments que uneixen diferents punts de la trajectòria (vegeu la figura 4.3). En efecte, sigui  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ , amb  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , una partició d'ordre  $k$  de l'interval  $I$ . La longitud de la corba poligonal formada pels segments que uneixen  $\sigma(t_i)$  i  $\sigma(t_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , que denotarem per  $\ell(P)$ , és igual a

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| .$$

Signi  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq k} \{t_i - t_{i-1}\}$  la norma de la partició. És clar que si afegim més punts a una partició donada, la corba poligonal corresponent s'ajusta millor a la corba original (vegeu la figura 4.3). Això dóna sentit a la definició que segueix.

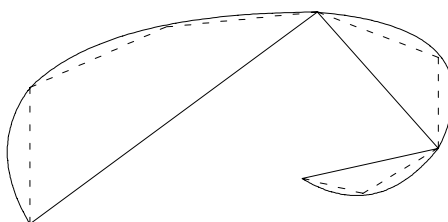


Figura 4.3: Poligonal inscrita a una corba

**4.1.3 Definició** La longitud d'una trajectòria  $\sigma$  és el límit de les longituds de les poligonals inscrites,  $\ell(P)$ , quan la norma de  $P$  tendeix a zero, és a dir,

$$\ell(\sigma) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ell(P) .$$

Lògicament, la definició anterior només té sentit si aquest límit existeix, fet que en el nostre cas està garantit per la proposició següent, resultat que dóna, alhora, una fórmula integral per fer el càlcul efectiu de la longitud d'una trajectòria.

**4.1.4 Proposició** *La longitud d'una trajectòria és igual a la integral de la velocitat o norma del vector tangent, és a dir,*

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

*Demostració.* Com que hem demanat que una trajectòria  $\sigma$  sigui derivable amb continuïtat, les components del vector tangent  $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  són funcions contínues. Aplicant el teorema del valor mig a cadascuna en els intervals  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $1 \leq i \leq k$ , deduïm l'existència de certs valors  $a_i, b_i, c_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tals que

$$\begin{aligned} \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| &= \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{x'(a_i)^2 + y'(b_i)^2 + z'(c_i)^2} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si tinguéssim que  $a_i = b_i = c_i$ , aleshores podríem escriure

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \|\sigma'(t_i) - \sigma'(t_{i-1})\| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \|\sigma'(a_i)\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt,$$

on la darrera igualtat correspon a la definició de la integral d'una funció, i així acabaria la demostració.

No és cert en general, però, que  $a_i = b_i = c_i$ . Per reduir-nos a aquest cas, utilitzarem la continuïtat uniforme: en efecte, essent  $x', y', z'$  funcions contínues sobre l'interval compacte  $I$ , són funcions uniformement contínues i, per tant, donat qualsevol  $\varepsilon > 0$  existeix  $\delta > 0$  tal que, si  $\|P\| < \delta$ , aleshores

$$\left| \sqrt{x'(a_i)^2 + y'(b_i)^2 + z'(c_i)^2} - \|\sigma'(u_i)\| \right| < \varepsilon,$$

per a tot  $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Així, si  $\|P\| < \delta$ , es té que

$$\left| \ell(P) - \sum_{i=1}^k \|\sigma'(u_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon(b-a).$$

Ara bé, la suma  $\sum_{i=1}^k \|\sigma'(u_i)\| (t_i - t_{i-1})$  és una suma de Riemann de la funció  $\|\sigma'\|$  a l'interval  $I$ , és a dir, que es té que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \|\sigma'(u_i)\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt,$$

i, en conseqüència, existeix el límit  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ell(P) = \ell(\sigma)$  i és igual a

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt. \quad \blacksquare$$

### 4.1.5 Exemples

1. Les longituds de les trajectòries de l'exemple 4.1.2, que tenen com a imatge la circumferència de radi 1, són:

$$\begin{aligned}\ell(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi, \\ \ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} dt = 4\pi,\end{aligned}$$

cosa que reflecteix clarament que una de les trajectòries fa una volta a la circumferència mentre que l'altra en fa dues.

2. La longitud d'una volta de l'hèlice  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  és

$$\ell(\sigma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

3. La determinació de la longitud d'una trajectòria mitjançant una integral s'estén sense dificultat a les trajectòries diferenciables a trossos, és a dir, trajectòries contínues  $\sigma(t)$  que són derivables amb continuïtat llevat d'un nombre finit de punts,  $a_1, \dots, a_m$  de l'interval  $[a, b]$ , en els quals la derivada,  $\sigma'$ , presenta discontinuïtats de salt. En aquest cas, si prenem  $a_0 = a$  i  $a_{m+1} = b$ , es té que

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=0}^m \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

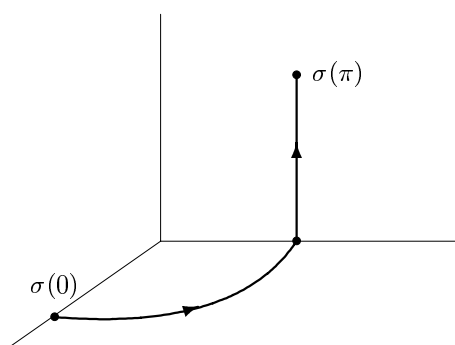


Figura 4.4: Una trajectòria diferenciable a trossos

Així, per exemple, la trajectòria

$$\sigma(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, 0), & 0 \leq t \leq \pi/2, \\ (0, 1, t), & \pi/2 \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

és una trajectòria diferenciable a trossos, ja que és contínua però no és derivable en  $t = \pi/2$  (vegeu la figura 4.4), i la seva longitud és igual a

$$\int_0^{\pi/2} \|\sigma'(t)\| dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt + \int_{\pi/2}^{\pi} dt = \pi.$$

La fórmula que acabem de demostrar per calcular la longitud d'una corba utilitza, de forma essencial, la continuïtat de la derivada de  $\sigma(t)$ . Si no haguéssim imposat que les trajectòries fossin de classe  $C^1$  podríem trobar-nos amb trajectòries de longitud infinita com veiem en els dos exemples que presentem a continuació.

#### 4.1.6 Exemples

1. Considerem l'espiral plana definida, per a  $0 < t \leq 1$ , per (vegeu la figura 4.5)

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \left( t \cos \frac{2\pi}{t}, t \sin \frac{2\pi}{t} \right), \quad \text{si } t \in ]0, 1], \\ \sigma(0) &= 0. \end{aligned}$$

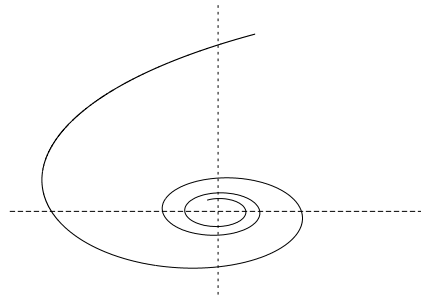


Figura 4.5: Corba espiral

Quan  $t$  recorre l'interval  $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ , la trajectòria  $\sigma$  fa una volta completa a l'origen, que denotarem per  $S_k$ . És clar que la longitud de cadascuna d'aquestes trajectòries satisfà que

$$\ell(S_k) \geq \frac{1}{k+1},$$

d'on se segueix que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} \leq \ell(\sigma).$$

Però aquesta sèrie és la sèrie harmònica d'exponent 1, que és divergent, per la qual cosa la longitud  $\ell(\sigma)$  és infinita.

Observem que, per a  $t \neq 0$ ,  $\sigma$  és derivable amb continuïtat i se satisfà que

$$\sigma'(t) = \left( \cos \frac{2\pi}{t} + \frac{2\pi}{t} \sin \frac{2\pi}{t}, \sin \frac{2\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{2\pi}{t} \right), \quad t \in ]0, 1].$$

La singularitat d'aquest exemple resideix en què  $\sigma$  no és derivable a l'origen. De fet, si intentem calcular la longitud de  $\sigma$  mitjançant una integral com la de la proposició anterior, trobem la integral impròpia

$$\ell(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{t^2}} dt,$$

que és divergent.

2. La corba que anem a descriure seguidament es construeix a partir d'aproximacions poligonals. Prenem un segment  $S$  de longitud 1 i el dividim en tres parts iguals. Substituïm el segment  $[1/3, 2/3]$  pels costats d'un triangle equilàter basat en aquest segment, i notem  $P_1$  la corba poligonal corresponent. Així,  $P_1$  està formada per quatre segments iguals de longitud  $1/3$ , i, per tant, la seva longitud total és  $\ell(P_1) = 4/3$ .

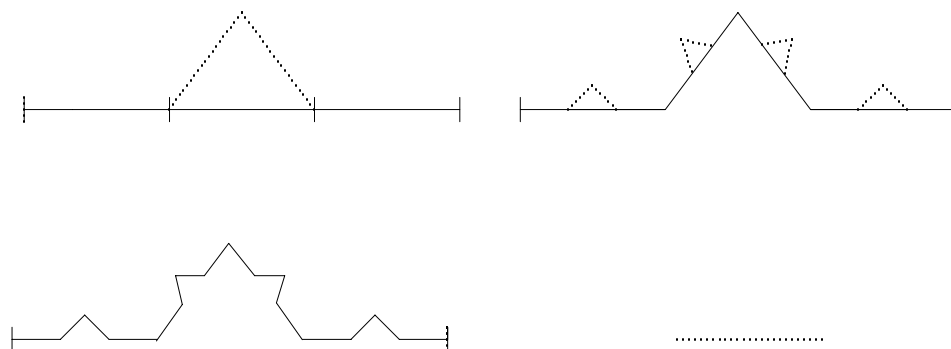


Figura 4.6: Generació de la corba de von Kock

Repetim l'operació en cada un dels quatre segments de  $P_1$ , és a dir, dividim els segments en terços i substituïm el terç mig pels costats d'un triangle equilàter que el té per base (vegeu la figura 4.6). Obtenim així una corba poligonal  $P_2$  formada per 16 segments de longitud  $1/3^2$ . La seva longitud total és

$$\ell(P_2) = 4^2 \frac{1}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Reiterant el procés, construïm una corba poligonal  $P_k$  de longitud

$$\ell(P_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k,$$

i, per tant, si  $C$  és la corba límit de les corbes poligonals  $P_k$  (corba que acceptarem que existeix), la longitud de  $C$  és infinita. En aquest cas ens trobem davant d'una corba que no és derivable en una infinitat de punts.

Fins ara ens hem referit a la longitud d'una trajectòria. Quan diem que la longitud d'una circumferència de radi  $R$  és  $2\pi R$  no fem referència a cap manera explícita de recórrer-la i, a més, esperem que aquesta longitud sigui també la de qualsevol trajectòria que faci una volta completa a la circumferència. Acabem aquest apartat definint la longitud d'una corba. Per fer el pas de la longitud d'una trajectòria a la longitud d'una corba començarem definint trajectòries equivalents.

**4.1.7 Definició** *Direm que dues trajectòries  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  són equivalents si existeix una aplicació bijectiva  $h : I \rightarrow J$  tal que tant  $h$  com  $h^{-1}$  són de classe  $C^1$  i se satisfà que  $\sigma = \gamma \circ h$ .*

Així, dues trajectòries equivalents descriuen el mateix recorregut, però a velocitats diferents (i, possiblement, en sentit invers, vegeu l'apartat d'orientacions del proper capítol). La funció  $h$  és un canvi de variable. Recordem que una funció amb aquestes propietats és sempre estrictament monòtona (creixent o decreixent).

**4.1.8 Proposició** *Dues trajectòries equivalents tenen la mateixa longitud, és a dir, si  $\sigma$  i  $\gamma$  són equivalents,  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ .*

*Demostració.* Com que  $\sigma$  i  $\gamma$  són equivalents, hi ha una funció de canvi de variable,  $h$ , tal que  $\sigma = \gamma \circ h$ . Segons la regla de la cadena tenim que

$$\sigma'(t) = \gamma'(h(t)) h'(t),$$

i, per tant,

$$\|\sigma'(t)\| = |h'(t)| \|\gamma'(h(t))\|.$$

Així, es té que

$$\ell(\sigma) = \int_I |h'(t)| \|\gamma'(h(t))\| dt,$$

i, aplicant el teorema del canvi de variable per a integrals d'una variable, en resulta la igualtat

$$\int_I |h'(t)| \|\gamma'(h(t))\| dt = \int_J \|\gamma'(\tau)\| d\tau,$$

d'on se segueix que  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ . ■

Aquest darrer resultat ens permet ara definir la longitud d'un corba (regular) sense fer referència a la trajectòria que la defineix. En primer lloc establim quines són les corbes regulars.

**4.1.9 Definició** *Direm que una trajectòria  $\sigma$  és regular si el vector tangent no s'anulla mai, és a dir,  $\sigma'(t) \neq 0$ , per a tot  $t \in I$ .*

Les trajectòries regulars satisfan el següent:

**4.1.10 Proposició** *Dues parametritzacions regulars i simples d'una mateixa corba són sempre equivalents.*

*Demostració.* Siguin  $\sigma : I \rightarrow C$  i  $\gamma : J \rightarrow C$  dues parametritzacions regulars i bijectives de la corba  $C$ . Com que els intervals  $I$  i  $J$  són compactes, les funcions inverses  $\sigma^{-1}$  i  $\gamma^{-1}$ , que existeixen per la bijectivitat de les parametritzacions, són també contínues. Així, la composició  $h = \gamma^{-1} \circ \sigma : I \rightarrow J$  és contínua i bijectiva. Ens queda per comprovar que  $h$  i  $h^{-1}$  són derivables amb continuïtat.

Per a qualsevol  $t \in J$ , es té que  $\gamma'(h(t)) \neq 0$ , ja que  $\gamma$  és regular, per la qual cosa alguna component d'aquest vector serà no nul·la; sigui  $\gamma'_i(h(t)) \neq 0$ . Com que  $\gamma'_i$  és contínua, podem aplicar el teorema de la funció inversa per deduir que  $\gamma_i^{-1}$  és derivable amb continuïtat i que, per tant, la composició  $h = \gamma_i^{-1} \circ \sigma_i$  és  $C^1$  en un entorn del  $t$  escollit. Això ho podem fer per a cada  $t \in I$  i, per tant,  $h \in C^1(I)$ . Que  $h^{-1}$  és  $C^1$  se segueix d'una nova aplicació del teorema de la funció inversa. ■

Aquest resultat dóna sentit a la definició següent.

**4.1.11 Definició** *Direm que un conjunt de punts de  $\mathbb{R}^3$  que admeti una parametrització regular i simple és una corba regular. S'anomena longitud de la corba regular la longitud de qualsevol parametrització regular i simple de la corba.*

Si  $\sigma$  és una parametrització regular i simple, la funció  $\ell : I \rightarrow [0, \ell(\sigma)]$  definida per

$$\ell(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau,$$

que dóna la longitud de  $\sigma$  des de  $\sigma(a)$  fins a  $\sigma(t)$ , té per derivada  $\ell'(t) = \|\sigma'(t)\| > 0$ . Així, com que és  $C^1$ , serà estrictament creixent, i, pel teorema de la funció inversa, té inversa  $\ell^{-1}$  de classe  $C^1$ . És a dir,  $\sigma \circ \ell^{-1}$  és una parametrització, equivalent a  $\sigma$ , dependent del paràmetre  $\ell$  que dóna la longitud de l'arc recorregut. Aquest paràmetre rep el nom de *paràmetre arc*.

Observeu que el vector tangent en cada punt d'una corba parametritzada pel paràmetre arc és unitari:

$$(\sigma \circ \ell^{-1})' = (\sigma' \circ \ell^{-1})(\ell^{-1})' = \frac{\sigma' \circ \ell^{-1}}{\|\sigma' \circ \ell^{-1}\|}.$$

Derivant el paràmetre arc respecte del paràmetre  $t$  trobem la igualtat

$$\ell'(t) = \frac{d\ell}{dt} = \|\sigma'(t)\|.$$

Usarem l'expressió *element de longitud* per referir-nos a

$$d\ell = \|\sigma'(t)\| dt.$$

Així, la longitud d'una corba és igual a la integral de l'element de longitud, cosa que escriurem de la forma:

$$\ell(C) = \ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_{\sigma} d\ell = \int_C d\ell.$$

## 4.2 Integral de trajectòria

Ens plantejem el problema següent: sigui  $C$  (o  $\sigma$ ) una corba plana i  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una funció positiva. Representem gràficament  $f$  situant un punt d'alçada  $z = f(x, y)$  sobre cada punt  $(x, y)$  de la corba (vegeu la figura 4.7). S'obté, així, una corba sobre  $C$ , que juntament amb la corba original determina un tancat vertical. Com podem calcular l'àrea d'aquest tancat?

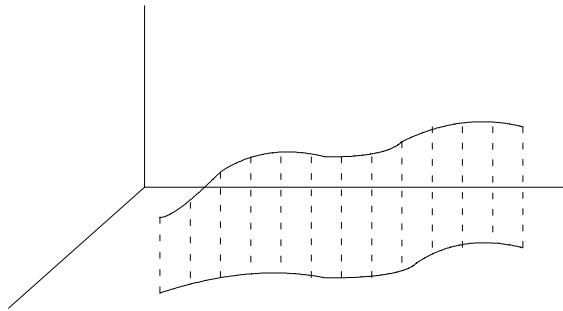


Figura 4.7: Tancat sobre una corba plana

El problema així plantejat té moltes analogies amb el del càlcul de l'àrea sota el gràfic d'una funció d'una variable. És un problema d'integració. Per resoldre'l utilitzarem el mateix mètode emprat en la definició de la longitud d'una trajectòria: dividir la corba en arcs cada vegada més petits, que podem aproximar per segments rectilinis, i prendre el límit quan la longitud d'aquests arcs tendeix a zero.

**4.2.1 Definició** Donada una funció real  $f$  definida sobre la corba imatge d'una trajectòria  $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , direm que  $f$  és integrable sobre la trajectòria  $\sigma$  si existeix el límit

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\sigma(c_i)) \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|,$$

sent  $P$  una partició  $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  de  $I$ ,  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , i aquest límit és independent dels punts  $c_i$  escollits.

El límit rep el nom d'*integral de la funció  $f$  sobre la trajectòria  $\sigma$*  i la designarem per  $\int_{\sigma} f \, dl$ , és a dir,

$$\int_{\sigma} f \, dl = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\sigma(c_i)) \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

**4.2.2 Proposició** Si  $f$  és contínua,  $f$  és integrable sobre qualsevol trajectòria  $\sigma$  i se satisfà que

$$\boxed{\int_{\sigma} f \, dl = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt.}$$

*Demostració.* Usant la continuïtat uniforme i el teorema del valor mig, com en la demostració de la proposició 4.1.4, veiem que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\sigma(c_i)) \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\sigma(c_i)) \|\sigma'(c_i)\| (t_i - t_{i-1}),$$

i l'última expressió és una suma de Riemann de la funció  $(f \circ \sigma) \|\sigma'\|$  sobre l'interval  $I$ . Aquesta funció és contínua sobre  $I$  i, per tant, integrable, d'on se segueix que aquest límit és igual a la integral de l'enunciat. ■

Observeu que la longitud d'una trajectòria és la integral de la funció 1 sobre la trajectòria.

El resultat següent permet definir la integral d'una funció sobre una corba regular independentment de la trajectòria simple que la defineixi.

**4.2.3 Proposició** *La integral d'una funció contínua  $f$  sobre la trajectòria  $\sigma$  no varia si la reparametritzem, és a dir, si  $\sigma$  i  $\gamma$  són parametritzacions equivalents,*

$$\int_{\sigma} f \, dl = \int_{\gamma} f \, dl.$$

*Demostració.* És una aplicació immediata del teorema del canvi de variables. En efecte, si  $\sigma = \gamma \circ h$ , aleshores es té que  $\sigma' = (\gamma' \circ h) h'$  i, per tant,

$$\int_{\sigma} f \, dl = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_a^b (f \circ \gamma)(h(t)) \|\gamma'(h(t))\| |h'(t)| \, dt.$$

Finalment, pel teorema del canvi de variables, resulta que

$$\int_{\sigma} f \, dl = \int_J f(\gamma(\tau)) \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau = \int_{\gamma} f \, dl. \quad \blacksquare$$

Definim ara la integral de  $f$  sobre una corba:

**4.2.4 Definició** *Donada una corba regular  $C$  i una funció contínua  $f$ , definida sobre la corba, es defineix la integral de  $f$  sobre  $C$  com la integral de  $f$  sobre qualsevol parametrització  $\sigma$  regular i simple de  $C$ , és a dir, si  $\sigma : I \rightarrow C$  és una parametrització regular i simple, aleshores es té que*

$$\int_C f \, dl = \int_{\sigma} f \, dl.$$

#### 4.2.5 Exemples

1. Calculem la integral de la funció  $f(x, y) = |xy|$  sobre l'el·lipse  $x^2/4 + y^2 = 1$ . Parametritzem l'el·lipse per  $\sigma(t) = (2 \cos t, \sin t)$ , amb  $t \in [0, 2\pi]$ . L'element de longitud és

$$dl = \|\sigma'(t)\| \, dt = \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \sqrt{1 + 3 \sin^2 t} \, dt$$

i, llavors,

$$\begin{aligned} \int_C f \, dl &= \int_0^{2\pi} 2|\cos t \sin t| \sqrt{1+3\sin^2 t} \, dt = 8 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{1+3\sin^2 t} \, dt \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1+3u} \, du = \frac{8}{9} [(1+3u)^{3/2}]_0^1 = \frac{56}{9}. \end{aligned}$$

2. Calculem la integral d'una funció definida sobre una trajectòria plana expressada en coordenades polars per  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Utilitzant l'angle  $\theta$  com a paràmetre, la trajectòria correspon a

$$\sigma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta),$$

que té derivada

$$\sigma'(\theta) = (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta, r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta),$$

d'on se segueix que l'element de longitud és

$$d\ell = \|\sigma'(\theta)\| \, d\theta = \sqrt{(r')^2 + r^2} \, d\theta.$$

Així, la integral d'una funció  $f$  sobre aquesta trajectòria s'expressa mitjançant la integral

$$\int_{\sigma} f \, dl = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{(r')^2 + r^2} \, d\theta.$$

Per exemple, la integral de la funció  $f(x, y) = x^2 + y^2$  al llarg d'una espira de l'espiral logarítmica  $r = e^\theta$ , és igual a

$$\int_0^{2\pi} e^{2\theta} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} \, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{3\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3} (e^{6\pi} - 1).$$

#### 4.2.6 Observacions

1. Si la trajectòria  $\sigma$  és  $C^1$  a trossos, definim la integral d'una funció contínua sobre la trajectòria com la suma de les integrals sobre cadascun dels trossos on  $\sigma$  és  $C^1$ .

2. Com que les integrals de funcions contínues sobre trajectòries són sumes d'integrals de funcions contínues d'una variable, és evident que es compliran totes les propietats de linealitat, homogeneïtat, etc. d'aquestes. A títol d'exemple, enunciem el teorema del valor mig: donada una trajectòria  $\sigma : I \rightarrow C$  i una funció contínua  $f$ , existeix un punt  $p \in \sigma(I)$  tal que

$$\int_{\sigma} f \, dl = f(p) \ell(\sigma).$$

### 4.3 El concepte de superfície

Intuïtivament, una superfície és un subconjunt de  $\mathbb{R}^3$  que, localment, és com un pla. És clar que el gràfic d'una funció contínua  $z = f(x, y)$  definida en un domini respon a aquesta idea,

ja que per determinar un punt del gràfic és suficient conèixer el valor de les dues coordenades  $(x, y)$ . El paraboloides  $z = x^2 + y^2$  és una d'aquestes superfícies.

Un exemple més ampli de superfícies el donen les descrites per equacions de la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

com l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . En aquest cas, per tal que l'equació determini una superfície en el sentit amb què usualment usem aquest terme, és necessari imposar alguna condició a la funció  $F(x, y, z)$ . En efecte, si  $F$  és  $C^1$  i  $\nabla F(x, y, z) \neq 0$  en cada punt solució de l'equació, aleshores el teorema de la funció implícita assegura que, localment, una de les variables, per exemple  $z$ , pot aïllar-se en funció de les altres dues,  $z = f(x, y)$ .

En aquest segon cas, els punts de la superfície també quedaran unívocament determinats, localment, per dues variables, però ara les variables utilitzades poden canviar d'un punt a un altre. Això ens dóna la idea de generalitzar la definició al cas en què les dues coordenades que determinin els punts de la superfície no siguin les coordenades cartesianes.

**4.3.1 Definició** Una superfície parametritzada és una aplicació de classe  $C^1$

$$\begin{aligned} \varphi: D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

on  $D$  és un domini elemental de  $\mathbb{R}^2$  i tal que és injectiva a l'interior de  $D$ .

La imatge  $S = \varphi(D)$  l'anomenarem la *superfície associada* a la parametrització  $\varphi$ . Les variables  $u, v$  reben el nom de *paràmetres* o *coordenades* de la superfície.

**4.3.2 Observació** La definició de superfície que hem donat pot semblar tècnicament complicada, ja que distingeix el comportament de  $\varphi$  en els punts de l'interior de  $D$  respecte als de la frontera. De fet, normalment es demana, per qüestions de diferenciabilitat, que els paràmetres d'una superfície parametritzada variïn en un obert del pla. Nosaltres hem proposat una variació en un domini elemental,  $D$ , que és compacte ja que facilita els enuncisats d'integrabilitat de funcions contínues, tot i que afegeix la complicació addicional esmentada. Per tal de no fer una digressió tècnica cada cop que utilitzem el concepte de superfície, cosa que ens allunyaria dels objectius que perseguim en aquest text, i com que la frontera de  $D$  té àrea zero i no modifica la integrabilitat d'una funció, obviarem la distinció entre un domini elemental  $D$  i el seu interior, on s'han de satisfer les propietats de regularitat que imposarem més endavant.

Donat un punt  $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ , s'anomenen *corbes coordenades* de la parametrització  $\varphi$  les corbes que són les imatges, per  $\varphi$ , de les rectes  $u = u_0$ ,  $v = v_0$  (vegeu la figura 4.8).

Els vectors tangents en  $p_0$  a aquestes corbes coordenades són els vectors

$$\begin{aligned} \varphi_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) (u_0, v_0), \\ \varphi_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) (u_0, v_0). \end{aligned}$$

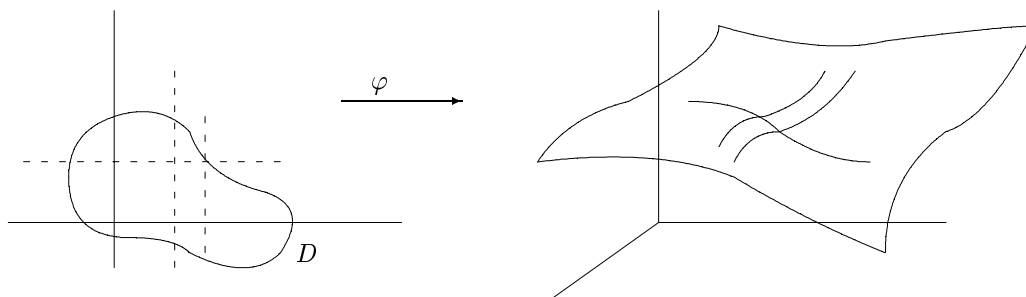


Figura 4.8: Corbes coordenades

Aquests vectors generen l'espai tangent a  $S$  en  $p_0$ ,

$$T_{p_0}S = [\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)].$$

Direm que la superfície és *regular* o suau si l'espai tangent a la superfície en cada punt és un pla, és a dir, si els vectors  $\varphi_u$  i  $\varphi_v$  són linealment independents en tot punt de la superfície. Equivalentment, la superfície és regular si i només si se satisfà que

$$\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0.$$

La condició de regularitat equival, intuïtivament, al fet que la superfície  $S$  no tingui “punxes” ni “arestes”. En aquest cas, el vector  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  dona la direcció normal a la superfície (ortogonal al pla tangent).

### 4.3.3 Exemples

1. El gràfic d'una funció de dues variables,  $z = f(x, y)$ , de classe  $C^1$ , és una superfície regular. Parametritzem el gràfic per  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Així,  $\varphi_x = (1, 0, f_x)$  i  $\varphi_y = (0, 1, f_y)$ , d'on se segueix que  $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$ .

2. El conjunt de solucions d'una equació

$$F(x, y, z) = 0,$$

on  $F$  és una funció de classe  $C^1$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ , és una superfície ja que, mitjançant el teorema de la funció implícita, podem aïllar  $z$  globalment, és a dir, existeix una funció derivable amb continuïtat,  $f$ , tal que

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y).$$

En aquest cas, utilitzant la parametrització anàloga a l'exemple anterior, i tenint present que

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z},$$

resulta que una base del pla tangent és:

$$\varphi_x = \left(1, 0, -\frac{F_x}{F_z}\right), \quad \varphi_y = \left(0, 1, -\frac{F_y}{F_z}\right),$$

i el vector normal corresponent és

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \frac{1}{F_z}(F_x, F_y, F_z).$$

#### 4.3.4 Exemples

1. La superfície d'una esfera de radi  $R$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , es pot parametritzar per

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \varphi(\theta, \phi) &= (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, R \sin \phi). \end{aligned}$$

Aquesta parametrització és regular. En efecte, els vectors tangents a les corbes coordenades són

$$\begin{aligned} \varphi_\theta &= (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \varphi_\phi &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi), \end{aligned}$$

i, per tant, el producte vectorial és el vector

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = (R^2 \cos \theta \cos^2 \phi, R^2 \sin \theta \cos^2 \phi, R^2 \cos \phi \sin \phi),$$

que és sempre no nul quan l'angle  $\phi$  varia a l'interval  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

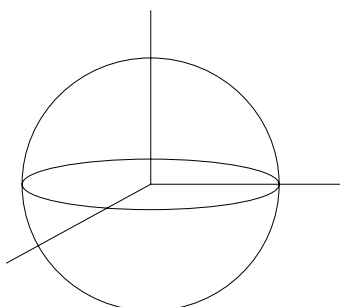


Figura 4.9: Esfera de radi  $R$

Les corbes coordenades  $\phi = cnt$  són els paral·lels, mentre que les corbes coordenades  $\theta = cnt$  corresponen als meridians. Observeu que  $\varphi$  és injectiva a l'interior del domini de definició,  $]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$ .

2. El cilindre de radi 1,  $x^2 + y^2 = 1$ , es pot parametritzar per

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, h] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z). \end{aligned}$$

En aquest cas, un càlcul elemental mostra que  $\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , que és un vector no nul, pel qual la parametrització és una parametrització regular. Les corbes coordenades són les circumferències horitzontals i les generatrius verticals. Observeu que  $\varphi$  és injectiva a l'interior  $]0, 2\pi[ \times ]0, h[$ .

3. Un con de revolució d'angle  $\alpha$ ,  $x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha z^2$ ,  $z > 0$ , es pot parametritzar per

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, h] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \varphi(\theta, z) &= (z \operatorname{tg} \alpha \cos \theta, z \operatorname{tg} \alpha \sin \theta, z). \end{aligned}$$

En aquest cas, trobem que

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (z \operatorname{tg} \alpha \cos \theta, z \operatorname{tg} \alpha \sin \theta, -z \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Observem que aquest vector és nul quan  $z = 0$ , però que això és compatible amb la nostra definició ja que aquest punt correspon a un punt de la frontera de  $D$ .

Les corbes coordenades són les circumferències horitzontals i les generatrius. Observeu que  $\varphi$  és injectiva a l'interior  $]0, 2\pi[ \times ]0, h[$  i que la superfície pròpiament dita (imatge de l'interior) no té punxes (la punxa correspon a la imatge dels punts  $(\theta, 0)$  que són de la frontera).

4. Tots els exemples anteriors són exemples de superfícies de revolució. Més generalment, considerem una corba en el pla  $xz$ ,  $\sigma(t) = (f(t), 0, g(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , i la superfície de revolució generada al girar la corba al voltant de l'eix  $z$  (vegeu la figura 4.10). Si  $\theta$  és l'angle de gir, la parametrització de la superfície és

$$\varphi(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)),$$

i varia  $\theta$  entre 0 i  $2\pi$ . Per tal d'evitar puntes com la del con, suposem que  $f(t) > 0$ , és a dir, que la corba no travessa l'eix de les  $z$ .

Les corbes coordenades  $t = cnt$  són els paral·lels de la superfície, i les corresponents a  $\theta = cnt$  són els meridians. Aquestes corbes tenen vectors tangents

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)), \\ \varphi_\theta &= (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0), \end{aligned}$$

el producte vectorial dels quals és igual a

$$\varphi_t \wedge \varphi_\theta = (-f(t)g'(t) \cos \theta, -f(t)g'(t) \sin \theta, f(t)f'(t)),$$

que és un vector no nul segons les hipòtesis efectuades sobre les funcions  $f$  i  $g$ .

**4.3.5 Observació** Sovint, les superfícies que apareixen en les aplicacions del càlcul integral són superfícies que tenen arestes. Per exemple, la superfície que envolta la massa cilíndrica

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

té arestes circulars al llarg de les circumferències corresponents al tall del cilindre  $x^2 + y^2 = 1$  amb els plans  $z = 0, 1$ . Aquesta superfície està formada per la regió  $0 \leq z \leq 1$  del cilindre i pels cercles  $x^2 + y^2 \leq 1$  dels corresponents plans. Des d'un punt de vista tècnic, aquestes superfícies no són superfícies regulars en el sentit establert en els paràgrafs anteriors, però no presenten dificultats afegides per al càlcul integral. És per això que, en els exemples, utilitzarem

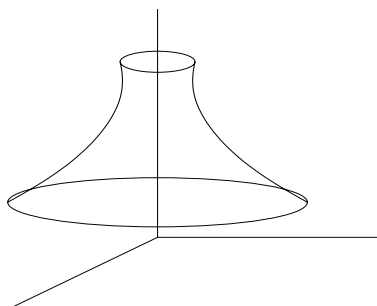


Figura 4.10: Superfície de revolució

superfícies a trossos, de les quals donem la definició orientativa següent: una superfície a trossos és una unió de superfícies parametritzades articulades al llarg de corbes regulars.

Per exemple, siguin  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , les superfícies parametritzades donades per

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, 3 - r), \\ \varphi_2(z, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, z), \\ \varphi_3(\theta, \phi) &= (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi),\end{aligned}$$

on els paràmetres varien en les regions

$$\begin{aligned}(r, \theta) &\in [0, 1] \times [0, 2\pi] = D_1, \\ (z, \theta) &\in [0, 2] \times [0, 2\pi] = D_2, \\ (\theta, \phi) &\in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 0] = D_3.\end{aligned}$$

Aleshores,  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  és una superfície regular a trossos.

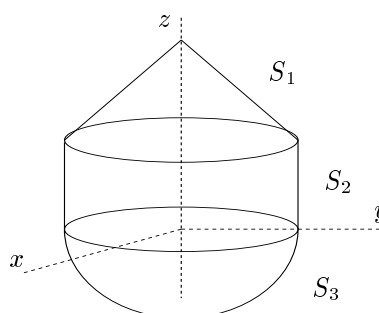


Figura 4.11: Superfície amb arestes

## 4.4 Àrea d'una superfície parametritzada

Donada una superfície parametritzada,  $\varphi : D \rightarrow S$ , ens proposem calcular la seva àrea. Apparentment, el problema és similar al de calcular la longitud d'una corba, resolt per aproximació per corbes poligonals inscrites, però en aquest cas el recurs a aproximacions poligonals no és vàlid, en general. En el llibre de Budak-Fomin citat a la bibliografia trobareu l'exposició d'un conegut exemple de Schwarz que aproxima un cilindre d'àrea finita per una superfície poligonal inscrita amb àrea tan gran com es vulgui.

La idea bàsica per calcular l'àrea d'una superfície és, un cop més, aproximar-la per l'àrea de superfícies més senzilles, cosa que en el límit es convertirà en una integral. Aquesta vegada l'aproximació la farem des de l'espai tangent. Considerarem un rectangle  $R$  que conté el domini  $D$  de definició de la superfície,  $D \subseteq R$ . Considerem una partició regular d'ordre  $n$  de  $R$  en  $n^2$  rectangles  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Per a cadascun dels rectangles  $R_{ij} \subseteq D$  notem per  $S_{ij} = \varphi(R_{ij})$  el tros de la superfície  $S$  que li correspon per la parametrització  $\varphi$ . Per a  $n$  molt gran, és raonable pensar que l'àrea de la superfície  $S_{ij}$  és aproximadament igual a l'àrea de la superfície del rectangle imatge de  $R_{ij}$  per l'aplicació lineal  $d\varphi$ , per a tots els  $1 \leq i, j \leq n$ , (vegeu la figura 4.12).

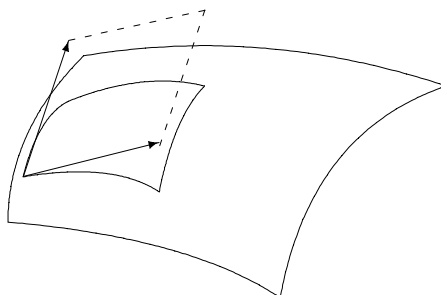


Figura 4.12: Aproximació de l'àrea des de l'espai tangent

Així, si denotem per  $\Delta u, \Delta v$  les longituds dels costats dels rectangles  $R_{ij}$ , l'àrea de cada  $S_{ij}$  s'aproxima per l'àrea del paral·lelogram de costats  $\Delta u \varphi_u(u_i, v_j)$ ,  $\Delta v \varphi_v(u_i, v_j)$ , que està en el pla tangent a  $S$  en  $\varphi(u_i, v_j)$ , i que és igual a

$$A(S_{ij}) \approx \| \varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j) \| \Delta u \Delta v.$$

Sumant aquestes expressions sobre tots els rectangles  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , en resulta l'aproximació

$$A(S) \approx \sum_{i,j} \| \varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j) \| \Delta u \Delta v.$$

El pas al límit, quan  $n$  tendeix a l'infinit, justifica la definició següent.

**4.4.1 Definició** Es defineix l'àrea de la superfície parametritzada  $\varphi : D \rightarrow S$  per la integral

$$A_\varphi(S) = \int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv.$$

**4.4.2 Observació** Com que solament hem considerat superfícies parametritzades amb  $\varphi \in C^1$  i sobre dominis *elementals*, que recordem que són compactes, totes les superfícies considerades tenen àrea finita.

Abans de fer cap exemple, recordem que si notem

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \|\varphi_u\|^2, \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \|\varphi_v\|^2, \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \end{aligned}$$

llavors es té que

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = EG - F^2,$$

per la qual cosa l'àrea de la superfície  $S$  pot expressar-se de la forma

$$A_\varphi(S) = \int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

L'expressió

$$dS = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv = \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

rep el nom d'*element de superfície*. A vegades se'l denota per  $dA$  i se l'anomena *element d'àrea*.

#### 4.4.3 Exemples

1. *Àrea del gràfic d'una funció.* Sigui  $S$  la superfície corresponent a una funció  $z = f(x, y)$ , de classe  $C^1$ , definida sobre un domini elemental  $D$ . Hem vist abans que, per a la parametrització  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , es té que  $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1)$ , d'on se segueix que l'àrea de la superfície  $S$  és igual a

$$A_\varphi(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy.$$

Per exemple, l'àrea del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  sobre el disc  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R\}$ , és igual a

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr d\theta \\ &= 2\pi \frac{2}{3} \frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{8} \Big|_0^R = \frac{\pi}{12} [(1 + 4R^2)^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

El terme subintegral de l'àrea d'un gràfic admet la següent interpretació geomètrica: observem que el vector normal unitari a la superfície que surt de la cara superior és igual a

$$N = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|},$$

i que, per tant, el cosinus de l'angle  $\Phi$  que forma aquest vector amb el semieix positiu de les  $z$  és (vegeu la figura 4.13)

$$\cos \Phi = \langle N, \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

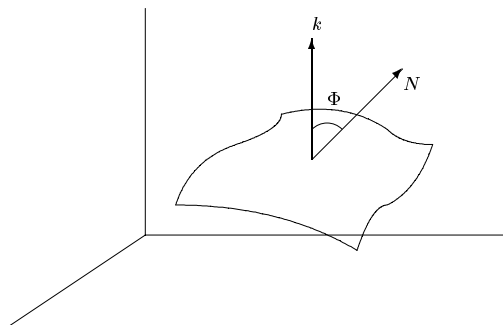


Figura 4.13: Àrea del gràfic d'una funció

Això fa que l'àrea de  $S$  s'expressi de la forma següent:

$$A_\varphi(S) = \int_D \frac{1}{\cos \Phi} dx dy.$$

És a dir, l'àrea d'un gràfic  $S$  és igual a la integral de l'invers del cosinus de l'angle que forma la normal amb el semieix  $z$ .

En el cas en què la superfície sigui un pla, l'angle  $\Phi$  és constant i, per tant, en resulta la fórmula

$$A_\varphi(S) = \frac{1}{\cos \Phi} A(D),$$

és a dir, l'àrea de  $S$  és igual a l'àrea de la seva projecció sobre el pla  $xy$ ,  $D$ , dividida pel cosinus de l'angle  $\Phi$ . Per exemple, calculem l'àrea de la regió del pla  $2x + y + 3z = 1$  continguda dins el cilindre  $x^2 + y^2 \leq 1$ . El vector unitari normal al pla és

$$N = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3),$$

i, per tant,

$$\cos \Phi = \langle N, \mathbf{k} \rangle = \frac{3}{\sqrt{14}},$$

d'on resulta que

$$A_\varphi(S) = \frac{\sqrt{14}}{3} A(D) = \frac{\sqrt{14}}{3} \pi.$$

2. *Àrea d'una superfície de revolució.* Amb les notacions de l'exemple 4.3.4, donada una superfície de revolució es té que

$$E = \|\varphi_t\|^2 = [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = [f(t)]^2, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle = 0.$$

Per tant, l'àrea de la superfície de revolució es calcula mitjançant la integral

$$A_\varphi(S) = \int_{I \times [0, 2\pi]} |f(t)| \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt d\theta = 2\pi \int_a^b |f| \sqrt{(f')^2 + (g')^2} dt.$$

Observem que la integral

$$\int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2} dt,$$

és la longitud de la corba que genera la superfície. Així, la fórmula de l'àrea d'una superfície de revolució admet la següent interpretació: l'àrea de la superfície de revolució generada per la corba  $(f(t), 0, g(t))$  és la integral (la suma en el sentit heurístic) de trajectòria de les longituds de les circumferències generades en la rotació, és a dir, de la funció  $2\pi|f|$ .

Destaquem els casos particulars següents, coneguts dels cursos de Càlcul Infinitesimal:

(a) Si la corba és el gràfic d'una funció  $z = g(x)$ , la fórmula es converteix en

$$A_\varphi(S) = 2\pi \int_I |x| \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx.$$

(b) Si la corba és el gràfic d'una funció  $x = f(z)$ , aleshores la fórmula es converteix en

$$A_\varphi(S) = 2\pi \int_I |f(z)| \sqrt{1 + [f'(z)]^2} dz.$$

(c) Àrea d'una esfera de radi  $R$ . Una esfera de radi  $R$  s'obté al fer girar una semicircumferència de radi  $R$ ,  $\sigma(t) = (R \cos t, 0, R \sin t)$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ , al voltant de l'eix  $z$ . Així, la seva àrea és igual a

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos t dt = 2\pi R^2 \sin t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Acabem aquest apartat assenyalant que l'àrea d'una superfície no depèn de la parametrització escollida per calcular-la. Per això, necessitem la noció de parametritzacions equivalents.

**4.4.4 Definició** Donades dues parametritzacions d'una mateixa superfície  $\varphi : D \rightarrow S$ ,  $\psi : D^* \rightarrow S$ , direm que són equivalents si existeix una aplicació derivable amb continuïtat,  $h : D \rightarrow D^*$ , que és bijectiva i amb jacobià no nul,  $Jh(u, v) \neq 0$ , per a qualsevol punt  $(u, v) \in D$ , i tal que  $\varphi = \psi \circ h$ .

És a dir,  $h$  és un canvi de variables, ja que pel teorema de la funció inversa, la funció  $h^{-1}$  és, també, una funció derivable amb continuïtat.

**4.4.5 Proposició** Si  $\varphi$  i  $\psi$  són dues parametritzacions equivalents de  $S$ , aleshores es té que  $A_\varphi(S) = A_\psi(S)$ , és a dir,

$$\int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv = \int_{D^*} \|\psi_w \wedge \psi_t\| dwdt.$$

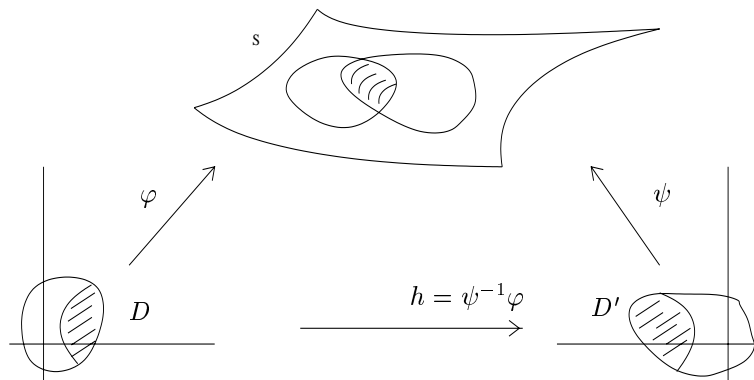


Figura 4.14: Canvi de paràmetres en una superfície

*Demostració.* Per la regla de la cadena es té que

$$D\varphi = D\psi \cdot Dh,$$

cosa que podem escriure de la forma

$$[\varphi_u, \varphi_v] = [\psi_w, \psi_t] \cdot Dh.$$

Veiem que  $Dh$  és la matriu del canvi de base i, per tant, les matrius del producte escalar estan relacionades per la igualtat:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = Dh^T \begin{pmatrix} \langle \psi_w, \psi_w \rangle & \langle \psi_w, \psi_t \rangle \\ \langle \psi_w, \psi_t \rangle & \langle \psi_t, \psi_t \rangle \end{pmatrix} Dh,$$

i els seus determinants satisfan que

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = Jh^2 \|\psi_w \wedge \psi_t\|^2.$$

Per tant, aplicant el teorema del canvi de variables resulta que

$$\int_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv = \int_{D^*} \|\psi_w \circ h \wedge \psi_t \circ h\| \cdot |Jh| \, dudv = \int_{D^*} \|\psi_w \wedge \psi_t\| \, dwdt. \quad \blacksquare$$

Enunciem ara, sense demostració, l'equivalència de les parametritzacions regulars d'una superfície.

**4.4.6 Proposició** *Dues parametritzacions regulars d'una mateixa superfície són equivalents.* ■

Aquest resultat dona sentit a la definició de l'àrea d'una superfície:

**4.4.7 Definició** *Si un conjunt  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  admet una parametrització regular en dues variables, direm que és una superfície regular. S'anomena àrea de la superfície l'àrea relativa a qualsevol parametrització regular.*

Per tant, posarem  $A(S) = A_\varphi(S)$  sent  $\varphi$  una parametrització regular i també escriurem

$$A(S) = \int_S dS.$$

## 4.5 Integral d'una funció sobre una superfície

Anàlogament al que hem fet en l'apartat 4.2 respecte de la integral de trajectòria, en aquesta secció definim la noció d'integral d'una funció sobre una superfície i en calculem alguns exemples.

**4.5.1 Definició** *Sigui  $f$  una funció real definida sobre la imatge,  $S$ , d'una superfície parametritzada  $\varphi : D \rightarrow S$ . Direm que  $f$  és integrable sobre la superfície  $S$  si existeix el límit*

$$\lim_n \sum_{\substack{i,j=1 \\ R_{ij} \subseteq D}}^n (f \circ \varphi)(c_{ij}) \|\varphi_u(c_{ij}) \wedge \varphi_v(c_{ij})\| \Delta u \Delta v,$$

sent  $R_{ij}$  els subrectangles d'una partició regular d'ordre  $n$  d'un rectangle que conté  $D$ ,  $D \subseteq R$ , i  $c_{ij} \in R_{ij}$ , i, a més, aquest límit és independent dels punts  $c_{ij}$  escollits.

En aquest cas, el límit rep el nom d'integral de  $f$  sobre  $S$  i el denotarem per

$$\int_\varphi f dS.$$

Tenint present que és l'element de superfície, és immediat comprovar que les funcions contínues són integrables. Més concretament, se satisfà:

**4.5.2 Proposició** *Si  $f$  és una funció contínua, aleshores  $f$  és integrable sobre qualsevol superfície parametritzada  $\varphi : D \rightarrow S$ , sent  $D$  un domini elemental, i es té que*

$$\int_\varphi f dS = \int_D (f \circ \varphi) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

*Demostració.* Es deriva directament de la definició. ■

### 4.5.3 Exemples

1. La integral d'una funció  $g$  sobre un gràfic,  $z = f(x, y)$ , definida en un domini  $D$  és igual a la integral ordinària

$$\int_S g dS = \int_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Així, per exemple, la integral de la funció  $f(x, y, z) = x + 1$  sobre la superfície  $z = x^2 - y^2$ , variant els paràmetres en el cercle unitat,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , és igual a la integral

$$\int_D (x + 1) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

La integral de la funció  $x$  és zero per simetria, així, calculant amb coordenades polars, la integral anterior resulta igual a

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2} dr = \frac{\pi}{12}(5^{3/2} - 1).$$

2. Calculem la integral de la funció  $f(x, y, z) = x + z$  sobre la superfície del primer octant del cilindre  $x^2 + y^2 = 9$  entre  $z = 0$  i  $z = 5$ . Per fer-ho, parametritzem el cilindre amb coordenades cilíndriques

$$\varphi(\theta, z) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, z).$$

Com que només considerem el primer octant, l'angle varia entre 0 i  $\pi/2$ . Un càlcul elemental dona que  $E = 9$ ,  $F = 0$ , i  $G = 1$ , amb la qual cosa la integral plantejada val:

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^5 (3 \cos \theta + z)\sqrt{9} dz \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (15 \cos \theta + \frac{25}{2}) d\theta = 45 + \frac{75\pi}{4}. \end{aligned}$$

Com succeïa en el cas de corbes, la definició d'integral de superfície que hem donat depèn, aparentment, dels paràmetres utilitzats, en el sentit que els paràmetres  $u, v$  intervenen en la pròpia definició. Es planteja, doncs, esbrinar si aquesta dependència és fonamental o simplement és operativa. La resposta és, un cop més, que la definició depèn de la geometria de la superfície  $S$ , i no dels paràmetres que haguem escollit per descriure-la. El resultat que ens assegura aquest fet és:

**4.5.4 Proposició** *La integral d'una funció contínua  $f$  sobre una superfície parametritzada no varia si la reparametritzem, és a dir, si  $\varphi$  i  $\psi$  són dues parametritzacions equivalents, aleshores*

$$\int_{\varphi} f dS = \int_{\psi} f dS.$$

*Demostració.* El raonament és completament anàleg al realitzat en la demostració de 4.2.3, i aquesta vegada s'utilitza el teorema de la funció inversa per a funcions de dues variables. ■

Estem ara en condicions de definir la integral d'una funció sobre una superfície regular.

**4.5.5 Definició** *Donada una superfície regular  $S$  i una funció contínua  $f$  definida a sobre, definim la integral de  $f$  sobre la superfície  $S$  com la integral de  $f$  sobre qualsevol parametrització regular  $\varphi$  de  $S$ , és a dir,*

$$\int_S f dS = \int_{\varphi} f dS.$$

Hem esmentat al final de la secció anterior que, en les aplicacions del càlcul integral, apareixen sovint superfícies que no són regulars en el sentit de la nostra definició. És clar que la definició d'integral d'una funció contínua s'estén sense dificultat a les superfícies regulars a trossos. Tot seguit en presentem un exemple.

**4.5.6 Exemple** Sigui  $S$  la superfície que envolta el volum determinat per les desigualtats  $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ , i  $f$  la funció  $f(x, y, z) = zx + 1$ . Anem a calcular la integral de  $f$  sobre  $S$ .

La superfície  $S$  és una superfície regular a trossos formada per les dues superfícies següents: la superfície  $S_1$ , que és el tros del paraboloides  $z = 1 - x^2 - y^2$  amb  $z \geq 0$ , i la superfície  $S_2$ , que és el cercle  $x^2 + y^2 \leq 1$  del pla  $z = 0$ . Així, es té que

$$\int_S f \, dS = \int_{S_1} f \, dS + \int_{S_2} f \, dS.$$

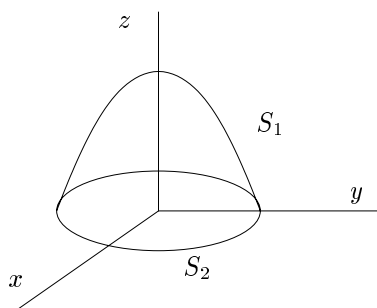


Figura 4.15: Superfície que envolta el volum  $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$

Calculem cadascuna d'aquestes integrals per separat. Si usem coordenades polars per parametritzar  $S_1$ , la funció  $f$  s'expressa per  $f(r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r^2) = (1 - r^2)(r \cos \theta + 1)$  i, per tant, es té que

$$\begin{aligned} \int_{S_1} f \, dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ((1 - r^2)r \cos \theta + 1)r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^1 (1 - r^2)r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \\ &= \frac{\pi}{12} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Per a la superfície  $S_2$ , i tenint en compte que  $z = 0$  a sobre, es té que :

$$\int_{S_2} f \, dS = \int_{S_2} dS = A(S_2) = \pi.$$

Així, finalment,

$$\int_S f \, dS = \pi + \frac{\pi}{12} (5^{3/2} - 1).$$

**4.5.7 Observació** Com que les integrals de funcions contínues sobre superfícies són sumes d'integrals de funcions contínues de dues variables, és clar que es compliran totes les propietats de linealitat, homogeneïtat, etc. de les integrals ordinàries. Per la qual cosa les utilitzarem sense fer-ne una menció explícita.

## 4.6 Aplicacions de les integrals de trajectòria i de superfície

Com hem esmentat a la introducció d'aquest capítol, sovint els models físics de fenòmens reals s'elaboren amb el concepte de trajectòria o amb el de superfície. És per això que, en les aplicacions del càlcul integral, és necessari disposar de les nocions de massa, de centre de masses, moments d'inèrcia, etc., sobre aquesta mena de realitzacions geomètriques. L'extensió dels conceptes introduïts al capítol 3 a aquesta nova situació és immediata un cop ja sabem què hem d'entendre per integral d'una funció sobre una trajectòria o una superfície. Així, en lloc de reescriure el capítol 3 sobre corbes i superfícies, ens limitarem, en aquesta secció, a posar alguns exemples que il·lustrin la situació.

Comencem per la demostració del primer teorema de Pappus-Guldin, que tenim pendent des del capítol 3.

**4.6.1 Exemple** *Primer Teorema de Pappus-Guldin.* L'àrea d'una superfície de revolució és el producte de la longitud de la secció per la longitud del recorregut del seu centre de gravetat.

En efecte, si la superfície la parametritzem com en 4.4.3, tenim que l'àrea és igual a

$$A(S) = 2\pi \int_I |f| \sqrt{(f')^2 + (g')^2} dt.$$

La coordenada  $x$  del centre de gravetat de la corba  $\sigma$  és

$$\frac{1}{\ell(\sigma)} \int_{\sigma} |f| dl = \frac{1}{\ell(\sigma)} \int_I |f| \sqrt{(f')^2 + (g')^2} dt,$$

i, per tant, la longitud del seu recorregut és

$$\frac{2\pi}{\ell(\sigma)} \int_I |f| \sqrt{(f')^2 + (g')^2} dt,$$

d'on se segueix el resultat.

Per exemple, podem aplicar el teorema de Pappus-Guldin per trobar l'àrea d'un tor. Un tor és la superfície generada per una circumferència de radi  $R$  al girar al voltant d'un eix, del qual el centre de la circumferència està a una distància  $a$ , amb  $a > R$  (vegeu la figura 3.9). Segons la fórmula anterior, resulta que

$$A(S) = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR.$$

### 4.6.2 Exemples

1. Calculem la massa total de la superfície  $z = x^2 + y^2$ , amb  $1 \leq z \leq 4$ , si la funció de densitat és  $\rho = |x|$ .

$$\begin{aligned} M &= \int_S \rho dS = \int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} |x| \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta \int_1^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \frac{1}{12} \left[ (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{1}{3} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

2. El centre de gravetat d'un filferro, modelitzat per la corba  $C$ , amb funció de densitat  $\rho(p)$  està donat per les integrals.

$$\bar{x} = \frac{\int_{\sigma} x \rho dl}{\int_{\sigma} \rho dl} \quad \bar{y} = \frac{\int_{\sigma} y \rho dl}{\int_{\sigma} \rho dl} \quad \bar{z} = \frac{\int_{\sigma} z \rho dl}{\int_{\sigma} \rho dl}.$$

Calculem la massa i el centre de gravetat del filferro definit per  $\sigma(t) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , amb densitat  $\rho(x, y) = \frac{1}{x + y}$ .

La trajectòria  $\sigma(t)$  és  $C^1$  a trossos perquè no és derivable a  $t = 0$  i  $t = 1/2$ . La funció densitat és contínua sobre la corba perquè aquesta no talla  $x + y = 0$ . Descomponem la corba en tres trajectòries de la forma següent:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \left(-t, -t + \frac{1}{2}\right), & -1 \leq t \leq 0, \\ \sigma_2(t) &= \left(t, -t + \frac{1}{2}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma_3(t) &= \left(t, t - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

La massa total del filferro és igual a

$$\begin{aligned} M &= \int_{\sigma} \frac{1}{x + y} dl = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2} - 2t} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{2}}{2t - \frac{1}{2}} dt \\ &= \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1}{2} - 2t \right) \right]_{-1}^0 + 1 + \frac{1}{2} \left[ \ln \left( 2t - \frac{1}{2} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{\ln 15}{2} \right). \end{aligned}$$

Ara, calculem la integral del numerador de la primera coordenada del centre de masses:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{x}{x + y} dl &= \int_{-1}^0 \frac{-\sqrt{2}t}{\frac{1}{2} - 2t} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}t dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{2}t}{2t - \frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} \left[ \ln \left( -2t + \frac{1}{2} \right) \right]_{-1}^0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[ \ln \left( 2t - \frac{1}{2} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln 15. \end{aligned}$$

Així, la primera coordenada del centre de masses és

$$\bar{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8} \ln 15}{\sqrt{2} \left( 1 + \frac{\ln 15}{2} \right)} = \frac{\ln 15}{8 + 4 \ln 15}.$$

De forma similar trobaríem la segona coordenada,  $\bar{y}$ .

3. Calculem el moment d'inèrcia respecte de l'eix  $z$  de la superfície de l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , suposant que té densitat constant  $\rho = k$ . Utilitzant la parametrització de l'esfera mitjançant

coordenades esfèriques tenim que

$$\begin{aligned}\int_S (x^2 + y^2) dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 \phi R^2 \cos \phi d\phi \\ &= 2\pi R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 \phi) d\phi = 4\pi R^4.\end{aligned}$$

# Camps escalars i camps vectorials

Alguns fenòmens físics poden ser descrits mitjançant funcions. Per exemple, la temperatura d'un sòlid pot ser descrita per una funció que a cada punt  $(x, y, z)$  de la regió de l'espai  $U$  que ocupa el sòlid li associa la seva temperatura  $f(x, y, z)$ . Coneguda la funció  $f(x, y, z)$ , les integrals estudiades en el capítol anterior permeten trobar, per exemple, la temperatura mitjana del sòlid en qüestió.

Altres fenòmens no poden ser descrits totalment per simples funcions. Així, per exemple, pel moviment d'un fluid no n'hi ha prou, posem per cas, amb conèixer el mòdul de la velocitat del fluid en cada punt de l'espai que ocupa. Cal conèixer també la direcció i el sentit del seu moviment. La qual cosa ens du a associar a cada punt no pas un nombre real, un escalar, sinó un vector, i aleshores parlarem de *camps vectorials*.

En aquest capítol, que és una introducció als camps vectorials, es plantegen els aspectes diferencials i integrals associats als camps vectorials. Les integrals que anem a definir per a aquests camps vectorials, *circulació* i *flux*, ens permetran calcular, per exemple, la quantitat de fluid per unitat de temps (flux) que travessa una secció d'un canal de conducció del qual coneixem el camp de velocitats  $F(x, y, z)$  en cada punt. En el proper capítol veurem d'altres aplicacions d'aquestes integrals.

## 5.1 Camps vectorials

La formulació matemàtica de la noció de camp vectorial és:

**5.1.1 Definició** *Un camp vectorial de  $\mathbb{R}^3$  és una aplicació*

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \end{aligned}$$

on  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . El camp  $F$  s'anomena *continu*, *derivable*,  $C^\infty$ , etc., si les funcions escalars  $P, Q, R : U \longrightarrow \mathbb{R}$  són *contínues*, *derivables*,  $C^\infty$ , etc.

Anàlogament, un camp vectorial de  $\mathbb{R}^2$ , o *camp vectorial pla*, és una aplicació

$$\begin{aligned} F : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \end{aligned}$$

on  $U$  és una regió de  $\mathbb{R}^2$  i  $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$  són funcions.

### 5.1.2 Observacions

1. En general, suposarem que els camps vectorials que considerem són suficientment derivables, per exemple  $\mathcal{C}^\infty$ , en el domini on estan definits, de manera que tinguin sentit les operacions de derivació que efectuem a les seves funcions coordenades.
2. Llevat que es digui explícitament el contrari, tot el que fem per a camps de l'espai  $\mathbb{R}^3$  val per a camps de  $\mathbb{R}^2$ . Per tant, tot sovint veurem tan sols un dels dos casos.

### 5.1.3 Exemples

1. En la figura 5.1 hi ha representats els camps vectorials  $F(x, y) = (1, 0)$ , que és un camp constant, i  $G(x, y) = (y, -x)$ . La representació suggereix que aquest darrer camp vectorial “gira” al voltant de l'origen. Concretarem tot seguit aquesta interpretació en termes de les línies de flux d'un camp vectorial.

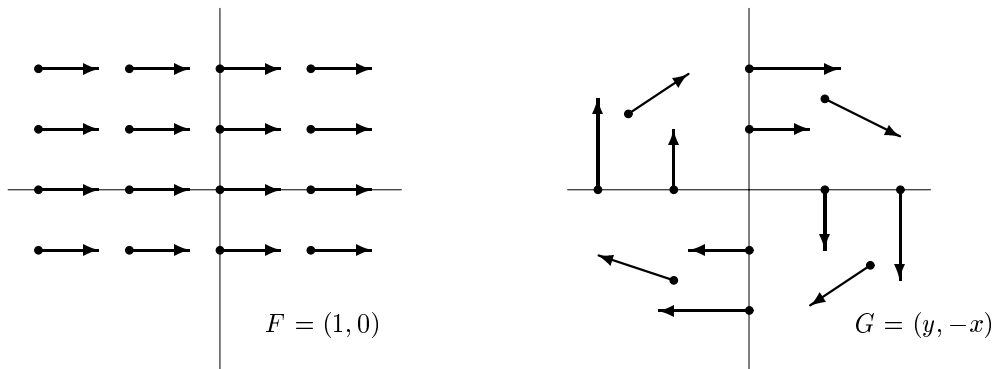


Figura 5.1: Alguns camps vectorials plans

2. Les forces que actuen en diferents punts de l'espai formen un camp vectorial. Per exemple, segons la llei de gravitació universal de Newton, el *camp gravitatori* creat per una partícula de massa  $M$  és igual a

$$F(x, y, z) = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}, \quad r = \|\vec{r}\|,$$

on  $(x_0, y_0, z_0)$  són les coordenades de la massa  $M$ ,  $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , i  $G$  és la constant universal.

Experimentalment s'ha demostrat que el camp gravitatori és additiu, en el sentit que el camp creat per dues masses puntuals és la suma dels camps individuals corresponents a cadascuna de

les masses. Estenent aquest principi de superposició a una distribució de massa  $\rho$  que ocupa un volum  $W$ , el camp gravitatori corresponent en un punt  $(x_1, y_1, z_1)$  de l'espai es defineix (llevat de constants) per la integral vectorial

$$F(x_1, y_1, z_1) = - \int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz,$$

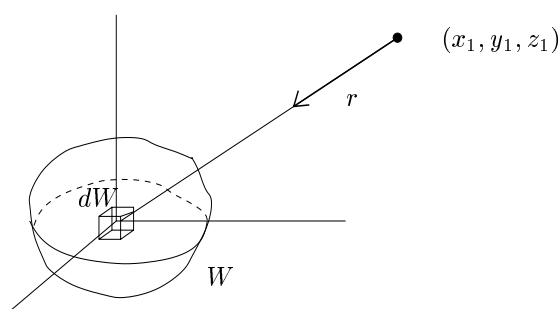


Figura 5.2: Camp gravitatori

que té per components

$$\begin{aligned} P &= - \int_W \frac{\rho(x_1 - x) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}, \\ Q &= - \int_W \frac{\rho(y_1 - y) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}, \\ R &= - \int_W \frac{\rho(z_1 - z) dx dy dz}{((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Si el punt  $(x_1, y_1, z_1)$  és extern a la massa  $W$ , aleshores les funcions subintegrals són funcions contínues a  $W$  i, per tant, integrables. En canvi, si el punt és de  $W$ , aleshores les integrals són impròpies. Observem, però, que en qualsevol cas, són integrals convergents, ja que podem aplicar el criteri de comparació que se segueix de l'exemple 2.7.6 del capítol 2.

3. Segons la llei de Coulomb, el camp elèctric determinat per una càrrega elèctrica puntual (i estàtica)  $Q$  és igual a

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r},$$

on  $\epsilon_0$  és el valor de la permissivitat en el buit, de manera que la força exercida per  $Q$  sobre una càrrega  $q$  és igual a  $qE$ . Experimentalment s'ha comprovat que, com en el cas dels camps gravitatoris, el camp elèctric satisfà el principi de superposició. Eliminant un cop més les constants, el camp elèctric definit per una distribució contínua de càrregues  $\rho$  en el volum  $W$  es igual a la integral vectorial

$$E = \int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz.$$

Aquí hem de tenir present que la distribució de càrregues elèctriques és sempre discreta. De tota manera, per a fenòmens d'escala suficientment gran comparada amb l'escala atòmica,

la quantitat de càrregues que ocupen una regió de l'espai és tant elevada que és convenient tractar-les com si fos una distribució contínua.

En definitiva, tant el camp gravitatori com l'elèctric són, llevat de constants, iguals al camp

$$\frac{\vec{r}}{r^3},$$

en el cas discret, i al camp determinat per la integral vectorial

$$\int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz,$$

en el cas d'una distribució de massa o de càrrega contínua  $\rho$ .

4. Integrant sobre corbes o superfícies, es defineix el camp gravitatori o el camp elèctric determinat per una massa lineal (una barnilla) o per una massa superficial (una placa). Per exemple, donada una placa  $D$  que s'estén sobre el disc unitat definit per  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , amb densitat  $\rho$  constant, calculem el camp gravitatori que defineix en un punt  $(0, 0, a)$ .

Si  $F = (P, Q, R)$  és el camp que volem determinar, un raonament senzill de simetria mostra que  $P = Q = 0$ . Calculem la tercera component:

$$\begin{aligned} R &= - \int_D \frac{\rho a dx dy dz}{((x^2 + y^2 + a^2))^{3/2}} = -\rho a \int_0^1 \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2\pi\rho a \int_0^1 \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = 2\pi\rho a (r^2 + a^2)^{-1/2} \Big|_0^1 = 2\pi\rho a \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{|a|} \right). \end{aligned}$$

Observem que quan el punt  $(0, 0, a)$  s'aproxima al disc, és a dir, quan  $a$  tendeix a zero, la força (és a dir, la integral) no esdevé infinita, com succeiria pel camp gravitatori creat per una partícula. D'altra banda, veiem que la força és discontinua justament en els punts del disc: quan  $a > 0$  tendeix a zero, el límit de  $R$  és  $-2\pi\rho$ , mentre que si fem el mateix límit al llarg del semieix  $a < 0$ , en resulta  $2\pi\rho$ .

En la secció 5.4, quan disposem de la noció d'integral curvilínia, introduïrem el camp d'inducció magnètica a partir de la llei de Biot-Savart.

Una forma adequada de visualitzar algunes propietats dels camps vectorials és a través de les seves línies de flux, que tot seguit introduïm.

**5.1.4 Definició** *Sigui  $F$  un camp vectorial definit a  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Una trajectòria,  $\sigma(t)$ , es diu que és una línia de flux de  $F$  si satisfà que*

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t)),$$

*en tots els seus punts.*

Dit d'una altra manera, una línia de flux d'un camp vectorial és una corba tal que en cadascun dels seus punts el vector del camp vectorial li és tangent.

Analíticament, les línies de flux s'obtenen resolent un sistema d'equacions diferencials de primer ordre: en efecte, si  $F = (P, Q, R)$ , aleshores les línies de flux són les solucions del sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned}\sigma_1'(t) &= P(\sigma(t)), \\ \sigma_2'(t) &= Q(\sigma(t)), \\ \sigma_3'(t) &= R(\sigma(t)).\end{aligned}$$

Fixat un instant inicial,  $t_0$ , i un punt de l'espai,  $(x_0, y_0, z_0) \in U$ , el teorema d'existència i unicitat de les solucions per a equacions diferencials ordinàries aplicat al sistema anterior, respecte de les condicions inicials  $\sigma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , ens permet assegurar que hi ha una única línia de flux del camp  $F$  que passa pel punt fixat en l'instant  $t_0$ .

Una interpretació especialment suggeridora de les línies de flux es dona quan  $F$  és el camp de velocitats d'un fluid: en efecte, si  $F$  és un camp de velocitats d'un fluid, la línia de flux que passa per un punt  $(x_0, y_0, z_0)$  correspon a la trajectòria que seguirà una partícula situada en aquest punt sota la influència del camp  $F$ .

### 5.1.5 Exemples

1. El camp constant  $F = (1, 0)$  té per línies de flux les rectes  $\sigma(t) = (t + x_0, y_0)$ , que són rectes paral·leles a l'eix  $x$ .

Les línies de flux del camp pla  $G = (y, -x)$  satisfan el sistema

$$\begin{aligned}\sigma_1'(t) &= \sigma_2(t), \\ \sigma_2'(t) &= -\sigma_1(t).\end{aligned}$$

Així, derivant la primera equació i tenint present la igualtat que estableix la segona, trobem que les línies de flux satisfan que

$$\sigma_1''(t) = -\sigma_1(t),$$

i, anàlogament, derivant la segona equació trobem que

$$\sigma_2''(t) = -\sigma_2(t).$$

De la teoria d'equacions diferencials, sabem que les solucions d'aquestes equacions d'ordre dos són de la forma

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= A \cos t + B \sin t, \\ \sigma_2(t) &= C \cos t + D \sin t,\end{aligned}$$

per a certes constants  $A, B, C$  i  $D$ . Tenint present el sistema d'equacions inicial, trobem que

$$C = B, \quad D = -A,$$

per la qual cosa les solucions són del tipus

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= A \cos t + B \sin t, \\ \sigma_2(t) &= B \cos t - A \sin t.\end{aligned}$$

Si  $\varphi$  és un angle, entre 0 i  $2\pi$ , tal que

$$\sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

aquestes equacions es poden escriure en termes de l'amplitud,  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , i la fase,  $\varphi$ , segons

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(t + \varphi), \\ \sigma_2(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(t + \varphi). \end{aligned}$$

Aquesta expressió mostra clarament que les trajectòries descriuen circumferències de radi igual a l'amplitud,  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , i que en l'instant  $t = 0$  estan en el punt  $(A, B)$  (vegeu la figura 5.3).

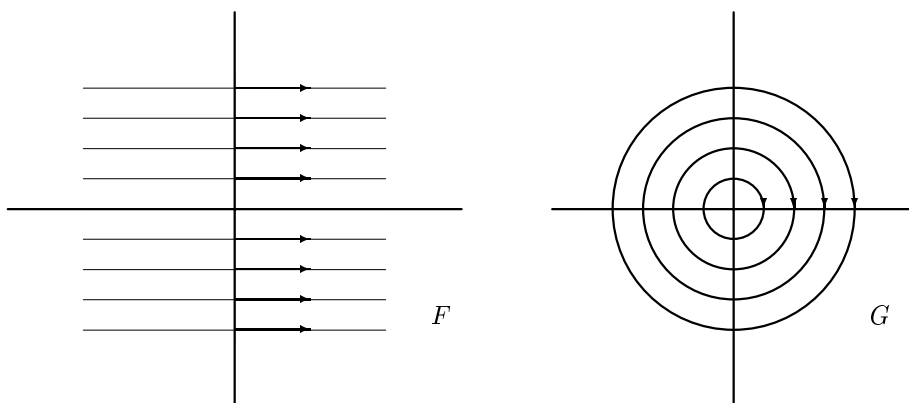


Figura 5.3: Línies de flux

Tot i que hem desenvolupat de forma completa l'exemple anterior, el nostre objectiu no serà, en general, calcular explícitament les línies de flux dels camps vectorials. El nostre interès per les línies de flux rau en les interpretacions físiques i geomètriques que se'n deriven, que ens ajuden a comprendre els conceptes desenvolupats.

2. Sigui  $F$  un camp radial de la forma  $F = \vec{r}/r^3$ , com són el camp gravitatori i el camp elèctric. Les línies de flux són rectes que passen per l'origen, com veurem més fàcilment en el proper apartat.

3. En la figura 5.4, veiem les línies de flux pels camps elèctrics generats per dues càrregues puntuals de mòdul igual, segons si tenen o no el mateix signe.

## 5.2 Camps gradients

En el context d'aquest capítol, les funcions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definides en un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , s'anomenen *campes escalars*.

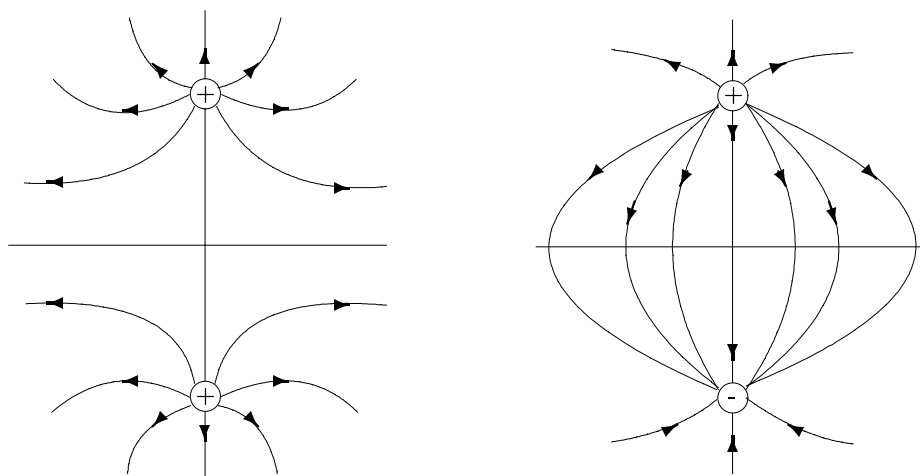


Figura 5.4: Camps elèctrics generats per dues càrregues iguals, d'igual o diferent signe

Donat un camp escalar pla,  $f(x, y)$ , el podem representar a  $\mathbb{R}^2$  mitjançant les corbes de nivell  $f(x, y) = \text{cnt}$ . Això és el que s'acostuma a utilitzar en la representació de mapes, marcant les corbes de nivell de les alçades respecte del nivell del mar (vegeu la figura 5.5). Podem estendre aquesta idea als camps escalars de l'espai.

**5.2.1 Definició** Donat un camp escalar  $f(x, y, z)$  es defineixen les superfícies de nivell de  $f$  com les superfícies

$$f(x, y, z) = \text{cnt}.$$

Per tal que les superfícies de nivell d'un camp escalar siguin veritables superfícies, en el sentit del capítol anterior, serà suficient que es tingui que  $\nabla f \neq 0$  en tots els punts de la superfície.

**5.2.2 Exemple** Si  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , les superfícies de nivell del camp escalar  $f = ar$  són les esferes centrades a l'origen, llevat del cas en què la constant és zero. Anàlogament, les superfícies de nivell del camp  $f = 1/r$  són també esferes centrades a l'origen.

Com en el cas dels mapes, les superfícies de nivell ens permeten fer-nos una imatge gràfica de la variació del camp escalar  $f$ . Allà on són més properes dues superfícies de nivell és on es produeix el màxim desnivell, és a dir, on la variació del camp escalar  $f$  és més gran. Per formalitzar aquesta idea recordem la definició de derivada direccional d'una funció.

**5.2.3 Definició** Sigui  $v$  un vector unitari de  $\mathbb{R}^3$ . La derivada direccional respecte del vector  $v$  d'una funció  $f$  en el punt  $p$  es defineix com el límit següent (en cas d'existir)

$$\frac{df}{dv}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

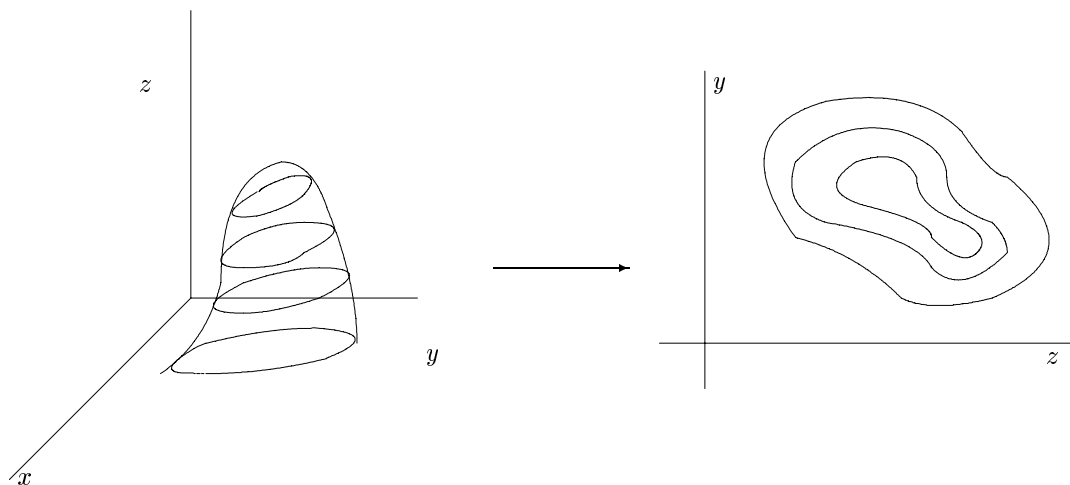


Figura 5.5: Corbes de nivell

Recordem que si  $f$  és diferenciable en  $p$ , aleshores existeixen les derivades direccionals respecte de qualsevol direcció  $v$ , i se satisfà que

$$\frac{df}{dv}(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle \quad \text{on} \quad \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Així, en resulta immediatament el resultat següent:

**5.2.4 Proposició** *La derivada direccional màxima d'un camp escalar  $f$  en un punt  $p$  es dona en la direcció del vector  $\nabla f / \|\nabla f\|$ .* ■

Quan varia el punt  $p$  en l'obert  $U$  de definició del camp escalar  $f$ , els vectors gradients  $\nabla f$  formen un camp vectorial, que anomenarem el *camp gradient associat a  $f$* :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Usarem també la notació  $\text{grad } f$  per referir-nos al camp gradient. Aquest camp està caracteritzat per la proposició 5.2.4: té la direcció en qu'q la derivada direccional és màxima i el seu mòdul atansa aquest màxim.

D'entre les propietats dels camps gradients, en destacarem la següent:

**5.2.5 Proposició** *Els camps gradients són perpendiculars a les superfícies de nivell.*

*Demostració.* En efecte, si  $\sigma(t)$  és una trajectòria que està continguda en una superfície de nivell,  $f(x, y, z) = c$ , amb  $c$  una constant, aleshores se satisfà que  $f(\sigma(t)) = c$ . Així, si derivem

aquesta expressió i tenim present la regla de la cadena trobem que

$$\langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle = 0,$$

és a dir, que  $\nabla f$  és ortogonal al vector  $\sigma'(t)$ , que és tangent a la trajectòria  $\sigma$  i a la superfície de nivell que la conté. Com que tot els vectors tangents a una superfície de nivell s'obtenen com a vectors tangents d'una trajectòria inclosa a la superfície, això acaba la demostració. ■

**5.2.6 Definició** *Es diu que un camp vectorial  $F$  deriva de potencial en un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  si és el camp gradient d'un camp escalar  $f$ , és a dir, si existeix una funció  $f$ , diferenciable en  $U$ , tal que  $F = \nabla f$ . La funció  $f$  l'anomenarem la funció potencial, o simplement el potencial, del camp  $F$ .*

### 5.2.7 Exemples

1. El camp gravitatori i el camp elèctric són camps gradients. De fet, llevat de constants, són iguals al gradient de la funció  $1/r$ , ja que es té que

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^3},$$

i anàlogament per a les altres components. És a dir, si  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , es té que

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Com hem vist anteriorment, les superfícies de nivell de  $f = 1/r$  són esferes concèntriques i, per tant, les línies de flux del camp  $\vec{r}/r^3$  són les semirectes que surten de l'origen.

En el cas d'una distribució contínua de massa,  $\rho$ , el potencial del camp gravitatori és la funció

$$f(x_1, y_1, z_1) = \int_V \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}},$$

que ja havíem considerat en el capítol 3.

2. No tot camp vectorial deriva de potencial. En efecte, si  $F = (P, Q, R)$  és un camp que deriva de potencial, aleshores existeix una funció  $f$  tal que

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z},$$

i, en particular, les components del camp  $F$  han de satisfer les equacions de compatibilitat

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

que corresponen al fet que les derivades creuades d'ordre dos de  $f$  són iguals independentment de l'ordre amb el qual les hem calculat.

Per exemple, el camp  $F = (x, xy, z)$  no deriva de potencial, ja que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \neq y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En canvi, el camp  $F(x, y, z) = (y, x + 2yz, y^2)$ , que satisfà les equacions de compatibilitat, admet el potencial  $f(x, y, z) = xy + y^2z$ . Hem de remarcar que les equacions de compatibilitat donen condicions necessàries per a l'existència del potencial, però que, en general, no són suficients. Amb l'ajut dels teoremes integrals del proper capítol, estudiarem situacions on aquestes condicions (que s'expressen dient que el rotacional del camp és nul) són suficients, és a dir, en què asseguren l'existència del potencial.

### 5.3 Divergència i rotacional d'un camp vectorial

En l'apartat anterior hem vist com, a partir d'un camp escalar  $f$ , se'n deriva un camp vectorial  $\nabla f$ . En aquest apartat anem a introduir, de forma purament operativa, els operadors diferencials que actuen sobre un camp vectorial: la divergència i el rotacional.

En tot aquest apartat,  $F = (P, Q, R)$  serà un camp vectorial definit en un obert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , on és  $C^\infty$ .

**5.3.1 Definició** *Es defineix la divergència de  $F$  com el camp escalar*

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} .}$$

Com veurem en el proper capítol, la divergència d'un camp vectorial mesura l'expansió o contracció d'aquest per unitat de volum i de temps. Fem ara una aproximació heurística a aquesta interpretació: suposem que  $F$  és la velocitat d'un fluid i calculem, aproximadament, el volum de fluid que surt, per unitat de volum i de temps, a través de les parets d'un paralelepípede elemental, d'eixos paral·lels als eixos de coordenades, centrat en un punt  $p$ , i de dimensions  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , (vegeu la figura 5.6).

El volum del paralelepípede està limitat per sis parets rectangulars. Calculem el volum que surt, per unitat de temps, per les cares laterals  $AFED$  i  $GHCB$ : en aquest cas és suficient considerar la component de la velocitat,  $F$ , en la direcció de l'eix  $x$ ,  $P$ . En el punt  $p$ , la velocitat considerada és  $P(p)$ , que per comoditat denotarem simplement per  $P$ . A partir d'aquest valor, podem calcular la velocitat del fluid en el centre del rectangle  $AFED$ : en efecte, pel teorema del valor mig, aquesta velocitat és

$$P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x .$$

Anàlogament, la velocitat en el centre del rectangle  $GHCB$  és igual a

$$P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x .$$

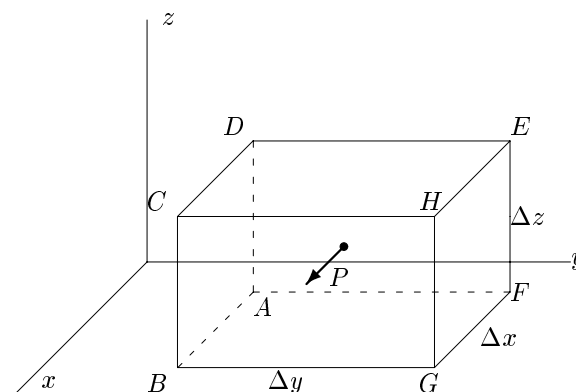


Figura 5.6: Paral·lelepípede elemental

Així, el volum de fluid que travessa els rectangles  $AFED$  i  $GHCB$ , per unitat de temps, és igual a

$$\left(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z,$$

$$\left(P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z,$$

respectivament. En definitiva, el volum per unitat de temps que *surt* d'aquestes dues cares del paral·lelepípede és igual a

$$\left(P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z - \left(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Tenint present la contribució de les altres quatre cares del paral·lelepípede, trobem que el volum total, per unitat de temps i de volum, que *surt* d'aquest és igual a

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \operatorname{div} F.$$

De fet, l'exactitud del resultat anterior es dona en el límit quan les longituds dels costats del paral·lelepípede tendeixen a zero.

### 5.3.2 Exemples

1. La divergència del camp  $F = (x, y, z)$  és  $\operatorname{div} F = 3$ . Aquest valor positiu és congruent amb el fet que, intuïtivament, el camp és un camp expansiu (vegeu la figura 5.7).
2. El camp  $G = (y, -x)$  té divergència 0. Hem vist a l'exemple 5.1.5 que les línies de flux d'aquest camp són circumferències centrades a l'origen. Observeu que el mòdul del camp vectorial sobre cadascuna d'aquestes circumferències és constant, cosa que es correspon amb el fet que la divergència és zero.

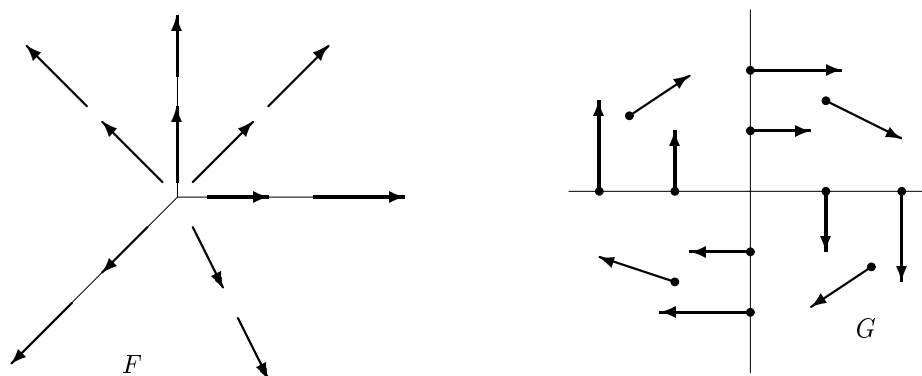


Figura 5.7: Un camp expansiu,  $F$ , i un de divergència nulla,  $G$

3. Si  $E$  és el camp elèctric creat per una càrrega puntual  $q$ , situada a l'origen, aleshores la divergència de  $E$  és zero en qualsevol punt diferent de l'origen, ja que es comprova fàcilment que se satisfà que

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

El mateix resultat és cert per al camp elèctric creat per una distribució contínua de càrrega  $\rho$ .

**5.3.3 Definició** *Es defineix el rotacional del camp vectorial  $F$  com el camp vectorial*

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

### 5.3.4 Exemples

1. Un exemple paradigmàtic del significat del rotacional d'un camp vectorial el dona el rotacional del camp de velocitats d'un sòlid rígid. Suposem que  $F$  és el camp de velocitats d'un sòlid rígid que gira amb velocitat angular constant,  $\omega$ , al voltant d'una semirecta  $\ell$ , (vegeu la figura 5.8). Si  $\vec{e}$  és el vector unitari en la direcció del semiradi  $\ell$ , el camp vectorial  $F$  està donat per l'equació

$$F = \omega \vec{e} \wedge \vec{r}.$$

Si  $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ , aleshores el camp  $F$  és igual a

$$\begin{aligned} F &= \omega(e_1, e_2, e_3) \wedge (x, y, z) \\ &= (ze_2 - ye_3, xe_3 - ze_1, ye_1 - xe_2), \end{aligned}$$

i, per tant, el seu rotacional és igual a

$$\omega \left( \frac{\partial(ye_1 - xe_2)}{\partial y} - \frac{\partial(xe_3 - ze_1)}{\partial z}, \frac{\partial(ze_2 - ye_3)}{\partial z} - \frac{\partial(ye_1 - xe_2)}{\partial x}, \frac{\partial(xe_3 - ze_1)}{\partial x} - \frac{\partial(ze_2 - ye_3)}{\partial y} \right),$$

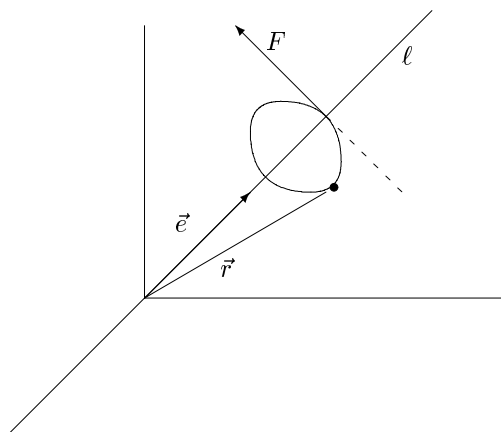


Figura 5.8: Velocitat d'un sòlid rígid

per la qual cosa

$$\text{rot } F = 2\omega \vec{e}.$$

És a dir, el rotacional és constant, té la direcció de l'eix de gir i el seu mòdul és el doble de la velocitat angular.

2. Si  $F = (P(x, y), Q(x, y))$  és un camp pla, es defineix el rotacional de  $F$  com el rotacional del camp  $(P(x, y), Q(x, y), 0)$ , és a dir,

$$\text{rot } F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Així, si el rotacional d'un camp pla és diferent de zero, és un vector ortogonal al pla on està definit el camp vectorial.

**5.3.5 Observació** Les definicions que hem donat del rotacional i de la divergència d'un camp vectorial depenen, de forma essencial, del sistema de coordenades que estem utilitzant, les coordenades cartesianes, i el seu significat físic, que ha de ser independent del sistema escollit, no és evident. En el proper capítol donarem expressions per a aquests operadors que són independents dels sistemes de coordenades i que, per exemple, ens permetran donar les fórmules per calcular-los en coordenades cilíndriques o esfèriques.

Si introduïm formalment l'operador nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

aleshores la divergència i el rotacional d'un camp  $F$  s'interpreten com el producte escalar i

vectorial, respectivament, de  $\nabla$  per  $F$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F &= \nabla \cdot F, \\ \operatorname{rot} F &= \nabla \wedge F.\end{aligned}$$

Aquesta notació i les propietats del producte vectorial suggereixen que, en general, se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \wedge F) &= 0, \\ \nabla \wedge (\nabla \cdot F) &= 0.\end{aligned}$$

Aquestes igualtats són, efectivament, certes. Enunciem-ho en forma de teorema:

### 5.3.6 Teorema

1. Si  $F$  és un camp vectorial  $\mathcal{C}^2$ , se satisfà que

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

2. Si  $f$  és un camp escalar  $\mathcal{C}^2$ , se satisfà que

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0. \quad \blacksquare$$

El resultat se segueix de què les derivades creuades d'ordre dos d'una funció no depenen de l'ordre amb el qual han estat calculades. Observem que la condició  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$  no és altra cosa que l'equació de compatibilitat que hem imposat als camps gradients en l'exemple 5.2.7.

La proposició següent resumeix les principals propietats del gradient, la divergència i el rotacional, i les seves relacions. La comprovació d'aquestes propietats és elemental, i es deixa com a exercici.

### 5.3.7 Proposició

(a) *Propietats del gradient:*

1.  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ .
2.  $\nabla(cf) = c\nabla f$ .
3.  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ .
4.  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$ .

(b) *Linealitat de la divergència i del rotacional:*

5.  $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$ .
6.  $\operatorname{rot}(F + G) = \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G$ .

(c) *Fórmules de derivació de productes:*

$$7. \operatorname{div}(fF) = \nabla f \cdot F + f \operatorname{div} F.$$

$$8. \operatorname{div}(F \wedge G) = \operatorname{rot} F \cdot G - F \cdot \operatorname{rot} G.$$

$$9. \operatorname{rot}(fF) = \nabla f \wedge F + f \operatorname{rot} F.$$

$$10. \operatorname{rot}(F \wedge G) = \operatorname{rot} F \wedge G - F \wedge \operatorname{rot} G. \quad \blacksquare$$

A partir de les fórmules recollides en aquest resultat es poden derivar altres igualtats entre els operadors diferencials. A títol d'exemple, provem que donades dues funcions  $f, g$  es té que

$$\operatorname{div}(\nabla f \wedge \nabla g) = 0.$$

En efecte, segons la fórmula número 8 i el teorema 5.3.6, podem escriure

$$\operatorname{div}(\nabla f \wedge \nabla g) = \operatorname{rot} \nabla f \wedge \nabla g - \nabla f \wedge \operatorname{rot} \nabla g = 0.$$

Encara hi ha una altra combinació possible entre els operadors gradient i divergència que dóna lloc a un operador fonamental de la física-matemàtica: la laplaciana.

**5.3.8 Definició** *Si  $f$  un camp escalar. Es defineix la laplaciana de  $f$  com el camp escalar*

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Les solucions de l'equació diferencial  $\Delta f = 0$  tenen un paper essencial en la teoria del potencial. S'anomenen *funcions harmòniques*. Per exemple, la funció  $f(x, y) = e^x \sin y$  és una funció harmònica, ja que es té:

$$\Delta(e^x \sin y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

Per a un camp vectorial  $F$  es defineix la laplaciana per l'expressió

$$\Delta F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \operatorname{rot} \operatorname{rot} F.$$

Aquest operador de camps vectorials s'anomena laplaciana ja que si expressem  $F$  en el sistema cartesià de coordenades,  $F = (P, Q, R)$ , se satisfà que

$$\Delta F = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R).$$

Les propietats operacionals de la laplaciana es deriven fàcilment de les propietats fonamentals establertes a 5.3.7. A títol d'exemple, n'establirem dues que utilitzarem més endavant.

**5.3.9 Corollari**

$$1. \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g.$$

$$2. \operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f. \quad \blacksquare$$

## 5.4 Integrals sobre corbes: circulació

La noció de treball ens ajudarà a donar sentit a la definició d'integral de línia o circulació d'un camp vectorial. Comencem per una cas elemental: si en cada punt del pla tenim un camp de forces constant  $F(x, y) = F_0$ , el treball efectuat quan un punt es mou sobre un segment rectilini que uneix els punts  $A$  i  $B$  des de  $A$  fins a  $B$ , és

$$\text{treball} = \langle F_0, \overrightarrow{AB} \rangle = \|F_0\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos \alpha,$$

on  $\alpha$  és l'angle que formen  $F_0$  i  $\overrightarrow{AB}$  (vegeu la figura 5.9).

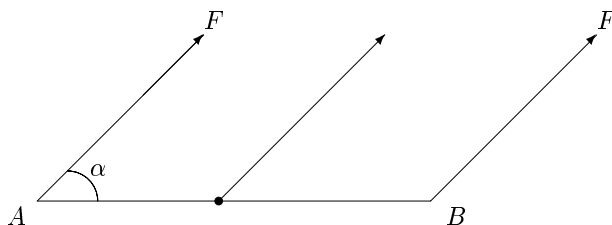


Figura 5.9: Treball d'un camp de forces constant

En general, si volem calcular el treball efectuat quan un punt es mou al llarg d'una trajectòria  $\sigma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  sota un camp variable  $F$ , aproximarem  $\sigma$  per una trajectòria poligonal i suposarem que  $F$  és constant sobre cada segment de la corba: prenem una partició de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ . Suposant, com a primera aproximació, que  $F$  és constant sobre els segments rectilinis  $\overline{\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i)}$ , el treball per moure un punt de l'origen a l'extrem en cadascun d'aquests segments serà

$$\langle F(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{\sigma(t_{i-1})\sigma(t_i)} \rangle,$$

sent  $(x_i, y_i, z_i)$  un punt qualsevol sobre el segment de  $\sigma(t_{i-1})$  a  $\sigma(t_i)$ . Si, com és habitual, escrivim  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  i  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  i  $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ , el treball total desenvolupat al desplaçar-nos al llarg del segment entre  $\sigma(t_{i-1})$  i  $\sigma(t_i)$  és igual a

$$\langle F(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{\sigma(t_{i-1})\sigma(t_i)} \rangle = P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i.$$

Per tant, el treball al moure's al llarg de tota la poligonal serà

$$\sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i).$$

Prenent la separació entre els punts  $(x_i, y_i, z_i)$  cada cop més petita, sembla natural definir el treball al llarg de  $\sigma$  del camp  $F$  com el límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i). \quad (5.1)$$

Si la trajectòria  $\sigma$  és diferenciable, podem utilitzar el teorema del valor mig per a les funcions  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$ , de forma anàloga a com ho hem fet en diversos moments del capítol anterior per igualar el límit (5.1) a la integral

$$\int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt, \quad (5.2)$$

que escriurem abreujadament de la forma

$$\int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt.$$

Observem que l'integrand és el producte escalar  $\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle$ . Per tant, el treball fet per moure una partícula al llarg de  $\sigma$  sota l'acció del camp  $F$  és la integral

$$\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt.$$

En general, per a un camp vectorial  $F$  qualsevol (no necessàriament un camp de forces) prenem aquesta expressió com a definició d'integral vectorial:

**5.4.1 Definició** *Sigui  $\sigma$  una trajectòria i  $F$  un camp continu definit sobre  $\sigma$ . Anomenarem circulació o integral de línia de  $F$  al llarg de  $\sigma$  la integral:*

$$\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt. \quad (5.3)$$

Hi ha diverses notacions útils per a la circulació d'un camp al llarg d'una trajectòria. Una és

$$\int_{\sigma} \langle F, d\ell \rangle = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt,$$

i una altra és

$$\int_{\sigma} \langle F, d\ell \rangle = \int_{\sigma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

En aquest segon cas, l'expressió

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

s'anomena la *1-forma diferencial* associada al camp vectorial  $F$ . La raó d'aquesta escriptura és clara si observem que per als punts de la trajectòria  $\sigma$ , les regles habituals de derivació permeten escriure, formalment,  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$  i  $dz = z'(t)dt$ , i, per tant, que

$$\int_{\sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b Px'(t)dt + Qy'(t)dt + Rz'(t)dt = \int_a^b \langle (P, Q, R), \sigma' \rangle dt.$$

### 5.4.2 Exemples

1. Calculem la integral de  $F(x, y) = (y, 0)$  al llarg de l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

parametritzada per  $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , quan  $t \in [0, 2\pi]$ . Segons la definició es té:

$$\int_{\sigma} \langle F, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (b \sin t, 0), (-a \sin t, b \cos t) \rangle dt = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi ab.$$

El signe negatiu d'aquesta integral es deu al fet que la parametrització  $\sigma$  recorre l'el·lipse en sentit antihorari, mentre que el camp vectorial  $F$  "gira" en sentit horari (vegeu la figura 5.10).

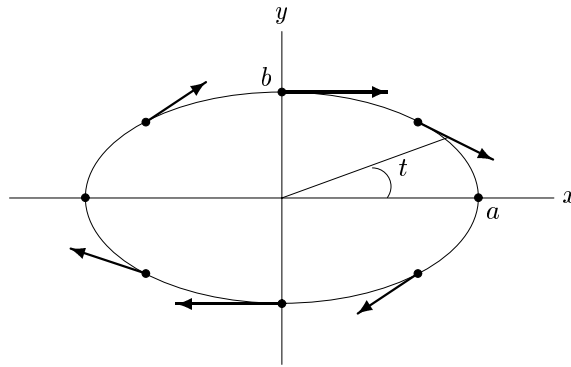


Figura 5.10: El camp  $F$  sobre l'el·lipse

2. Calculem la integral del camp vectorial  $F = (x, y, z)$  al llarg de la primera volta de l'hèlice  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Es té:

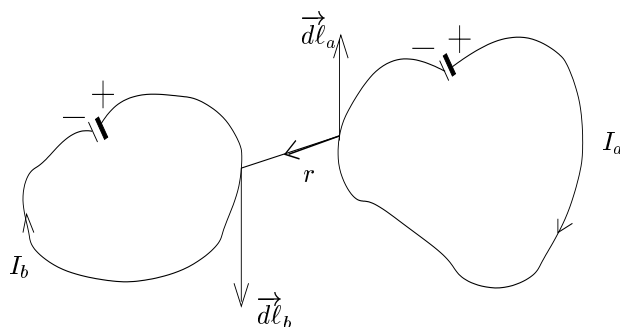
$$\int_0^{2\pi} \langle (\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t + t) dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

En aquest cas el valor de la integral és positiu, cosa que està d'acord amb el fet que el camp vectorial  $F$  té el mateix sentit que la trajectòria sobre la qual hem integrat.

**5.4.3 Exemple** *El camp magnètic.* És conegut que dos circuits recorreguts per corrents elèctrics exerceixen una força entre si. Més concretament, si  $C_a$  i  $C_b$  són dos circuits pels que hi ha corrents d'intensitat  $I_a$  i  $I_b$ , respectivament, la força que exerceix  $C_a$  sobre  $C_b$  és

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \int_{C_a} \int_{C_b} \frac{d\vec{\ell}_a \wedge (d\vec{\ell}_b \wedge \vec{r}')}{r^3},$$

on  $\mu_0$  és la constant de permeabilitat magnètica en el buit,  $\vec{r}'$  és el vector de posició des de  $C_a$  a  $C_b$  i  $r$  el seu mòdul, és a dir, la distància entre els punts dels circuits (vegeu la figura 5.11).

Figura 5.11: Circuits recorreguts per corrents elèctrics  $I_a$ ,  $I_b$ 

Podem escriure aquesta força de la forma

$$F = I_b \int_{C_b} \vec{dl}_b \wedge \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \int_{C_a} \frac{\vec{dl}_a \wedge \vec{r}}{r^3} \right),$$

que podem interpretar com l'acció del camp

$$B = \frac{\mu}{4\pi} I_a \int_{C_a} \frac{\vec{dl}_a \wedge \vec{r}}{r^3}$$

creat pel circuit  $C_a$  sobre el circuit  $C_b$ . A  $B$  l'anomenem el camp d'inducció magnètic creat per  $C_a$ . Aquesta definició de  $B$  és el que es coneix com a llei de Biot-Savart.

Si el corrent  $I$  està distribuït a l'espai amb densitat de corrent  $J$ , aleshores  $I$  es converteix en  $J \cdot dS$  i  $I dl = J dS dl$  pot escriure's com  $J dx dy dz$ . És a dir, en aquest cas definim el camp d'inducció magnètica per

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \frac{J \wedge \vec{r}}{r^3} dx dy dz.$$

La circulació d'una camp vectorial admet la interpretació geomètrica següent: si la trajectòria  $\sigma$  és regular, és a dir, que satisfà que  $\sigma'(t) \neq \vec{0}$ , per a tot  $t \in [a, b]$ , aleshores podem considerar el vector tangent unitari

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|},$$

i podem escriure la circulació d'un camp de la forma

$$\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), T(t) \rangle \|\sigma'(t)\| dt = \int_{\sigma} \langle F \circ \sigma, T \rangle dl,$$

on  $dl$  és l'element de longitud de la trajectòria. És a dir, la circulació de  $F$  al llarg de  $\sigma$  és la integral de trajectòria de la funció escalar

$$t \mapsto \langle F(\sigma(t)), T(t) \rangle.$$

Aquesta funció és la *component tangencial* de  $F$  sobre la corba  $\sigma$  en cada punt, és a dir, la projecció ortogonal de  $F(\sigma(t))$  sobre la recta tangent a  $\sigma$  en el punt  $\sigma(t)$ . Per tant, sols la component tangencial del camp  $F$  sobre la corba  $\sigma$  intervé en el treball realitzat (vegeu la figura 5.12).

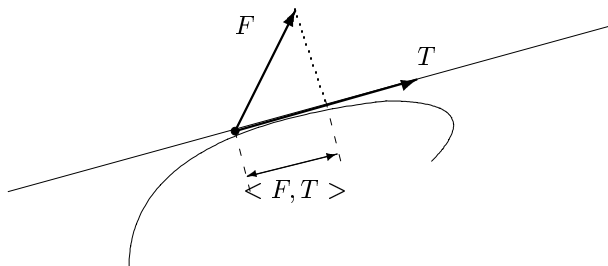


Figura 5.12: Projecció del camp  $F$  sobre la recta tangent

Les integrals de línia satisfan les propietats habituals de linealitat, homogeneïtat, etc., com es comprova fàcilment. Així per exemple, es té que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \langle F + G, dl \rangle &= \int_{\sigma} \langle F, dl \rangle + \int_{\sigma} \langle G, dl \rangle, \\ \int_{\sigma} \langle \lambda F, dl \rangle &= \lambda \int_{\sigma} \langle F, dl \rangle.\end{aligned}$$

Una d'aquestes propietats és l'additivitat de la integral. D'acord amb aquesta propietat, podem estendre la definició d'integral de línia per a corbes que siguin de tipus  $\mathcal{C}^1$  a trossos:

$$\int_{\sigma} \langle F, dl \rangle = \int_{\sigma_1} \langle F, dl \rangle + \dots + \int_{\sigma_n} \langle F, dl \rangle,$$

on  $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ , i  $\sigma$  és  $\mathcal{C}^1$  en els subintervalls  $[t_{i-1}, t_i]$ , que determinen una partició de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ .

**5.4.4 Exemple** Calculem  $\int_{\sigma} 3x^2y dx + (x^3 + 1)dy$  sent  $\sigma$  el camí

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1], \\ (1, t-1), & t \in [1, 2], \end{cases}$$

representat en la figura 5.13. Aleshores es té:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} 3x^2y dx + (x^3 + 1)dy &= \int_0^1 [3t^2 \cdot 0 \cdot 1 + (t^3 + 1)0] dt + \int_1^2 [3 \cdot 1(t-1)0 + (1^3 + 1)1] dt \\ &= \int_1^2 2 dt = 2(2-1) = 2.\end{aligned}$$

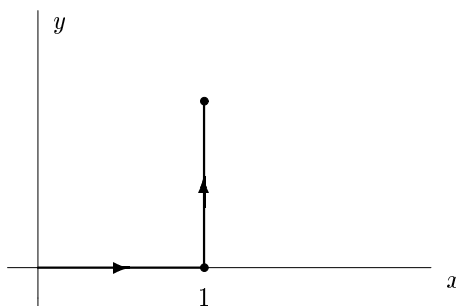


Figura 5.13: Un camí diferenciable a trossos

Ja hem esmentat la independència de la integral de la funció escalar  $\langle F, T \rangle$  respecte de la parametrització de la corba. Observem que la funció escalar  $\langle F, T \rangle$  depèn del sentit de recorregut de la corba, ja que si anem en sentit contrari el vector unitari tangent corresponent serà  $-T$ , i la funció escalar que integrarem serà  $-\langle F, T \rangle$ . De forma més precisa: siguin  $\sigma : [a, b] \rightarrow C$  i  $\gamma : [c, d] \rightarrow C$  dues parametritzacions regulars d'una mateixa corba,  $C$ , i sigui  $p = \sigma(a)$ ,  $q = \sigma(b)$ . Direm que les dues parametritzacions induïxen la mateixa *orientació* de la corba  $C$  si ambdues comencen i acaben en el mateix punt, és a dir, si

$$\sigma(a) = \gamma(c), \quad \text{i} \quad \sigma(b) = \gamma(d),$$

ambdues van des de  $p$  fins a  $q$ . En cas contrari, direm que són *parametritzacions oposades*.

Si  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  és la funció de canvi de paràmetre,  $h = \gamma^{-1} \circ \sigma$ , segons si  $h$  és monòtona creixent o decreixent estarem mantenint o canviant el sentit amb què recorrem la corba. Direm que  $h$  *preserva l'orientació* o que *inverteix l'orientació*, respectivament. Equivalentment, com que  $h$  és bijectiva

$$\begin{aligned} h \text{ preserva l'orientació} &\iff h'(t) \geq 0, \quad \forall t \in [a, b], \\ h \text{ inverteix l'orientació} &\iff h'(t) \leq 0, \quad \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Efectivament, com que

$$\sigma'(t) = (\gamma \circ h)'(t) = h'(t)\gamma'(h(t)),$$

si  $h$  preserva l'orientació,  $\sigma'(t)$  i  $\gamma'(h(t))$  tindran el mateix sentit i, si  $h$  la inverteix, tindran sentits oposats.

Per tant, una *orientació* d'una corba (l'elecció d'un sentit de recorregut) és equivalent a triar un vector tangent unitari en cada punt,  $T(t)$ . Si escollim el sentit de recorregut d'una parametrització  $\sigma(t)$ , aquest vector tangent unitari serà

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|},$$

i dues parametritzacions equivalents,  $\sigma$  i  $\gamma = \sigma \circ h$ , tindran la mateixa orientació si

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\sigma'(h(t))}{\|\sigma'(h(t))\|},$$

per a tot  $t$ .

**5.4.5 Exemple** Donada una trajectòria  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la corba

$$\begin{aligned} \sigma_{op} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \sigma_{op} = \sigma(a + b - t), \end{aligned}$$

és una reparametrització de  $\sigma$  que n'inverteix l'orientació. Correspon a la funció

$$\begin{aligned} h : [a, b] &\rightarrow [a, b] \\ t &\mapsto h(t) = a + b - t. \end{aligned}$$

L'anomenarem la *trajectòria oposada* de  $\sigma$ . La trajectòria oposada de

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto \sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \end{aligned}$$

és la trajectòria

$$\begin{aligned} \sigma_{op}(\theta) &= \sigma(2\pi - \theta) = (\cos(2\pi - \theta), \sin(2\pi - \theta)) \\ &= (\cos \theta, -\sin \theta). \end{aligned}$$

De la discussió anterior, se segueix immediatament que se satisfà el resultat següent:

**5.4.6 Teorema** *Sigui  $F$  un camp vectorial continu sobre la corba,  $C^1$  a trossos,  $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  i sigui  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrització de  $\sigma$ . Aleshores,*

$$(1) \int_{\gamma} \langle F, dl \rangle = \int_{\sigma} \langle F, dl \rangle, \text{ si } \gamma \text{ i } \sigma \text{ tenen la mateixa orientació.}$$

$$(2) \int_{\gamma} \langle F, dl \rangle = - \int_{\sigma} \langle F, dl \rangle, \text{ si } \gamma \text{ i } \sigma \text{ tenen orientacions oposades.} \quad \blacksquare$$

**5.4.7 Observació** Per aquest fet, es diu que la integral de línia és una integral *orientada*. Això la distingeix de la integral de trajectòria, que és independent de la reparametrització i també de l'orientació. Es diu que la integral de trajectòria és *no orientada*.

En definitiva, donada una corba  $C$  podem parlar de la circulació d'un camp vectorial al llarg de  $C$ , sense especificar-ne una parametrització, sempre que haguem prefixat una orientació sobre  $C$ . En aquest cas, per remarcar la importància de l'orientació escriurem  $C^+$ , i la integral corresponent la denotarem per

$$\int_{C^+} \langle F, T \rangle dl.$$

## 5.5 Camps conservatius i potencials escalars

Comencem aquest apartat amb dos exemples que mostren la importància del camí d'integració per a la circulació d'un camp vectorial al llarg d'una trajectòria.

**5.5.1 Exemple** Calculem  $\int_{\sigma} x^2 dx + xy dy$  per als camins

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (1-t, t), & t \in [0, 1], \\ \gamma(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi/2].\end{aligned}$$

Ambdós camins van des del punt  $(1, 0)$  del pla al punt  $(0, 1)$ , (vegeu la figura 5.14).

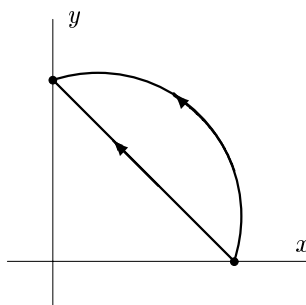


Figura 5.14: Els camins  $\sigma$  i  $\gamma$

La integral de la forma diferencial  $x^2 dx + xy dy$  al llarg de  $\sigma$  és:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 [(1-t)^2(-1) + (1-t)t] dt \\ &= \int_0^1 (-1 + 2t - t^2 + t - t^2) dt \\ &= \int_0^1 (-1 + 3t - 2t^2) dt \\ &= \left. -t + \frac{3t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} \right|_0^1 = -1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Mentre que la integral al llarg de  $\gamma$  és igual a

$$\int_{\rho} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\pi/2} [\cos^2 t(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t] dt = 0.$$

Veiem en aquest exemple que, en general, la integral d'un camp vectorial depèn del camí d'integració escollit.

**5.5.2 Exemple** Calculem ara la integral de la forma diferencial  $3x^2ydx + (x^3 + 1)dy$  sobre els camins

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (t, t), & t \in [0, 1], \\ \gamma(t) &= (t, t^2), & t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Com en l'exemple anterior, els camins  $\sigma$  i  $\gamma$  tenen els mateixos extrems, ambdós comencen en el punt  $(0, 0)$  i acaben en  $(1, 1)$ . Ara, però, la integral de  $3x^2ydx + (x^3 + 1)dy$  és la mateixa per als dos camins. En efecte, es té que

$$\int_{\sigma} 3x^2ydx + (x^3 + 1)dy = \int_0^1 3t^2tdt + (t^3 + 1)dt = t^4 + t \Big|_0^1 = 2,$$

i, de forma anàloga, es comprova que

$$\int_{\gamma} 3x^2ydx + (x^3 + 1)dy = 2.$$

En el primer exemple hem vist un camp,  $F(x, y) = (x^2, xy)$ , per al qual la circulació entre dos punts depèn del camí que seguim, mentre que a l'exemple següent, en canvi, la circulació del camp  $G(x, y) = (3x^2y, x^3 + 1)$  és la mateixa per als dos camins d'integració. De fet, com veurem tot seguit, per al camp  $G$  això passa sempre: la circulació de  $(0, 0)$  fins a  $(1, 1)$  serà sempre la mateixa, independentment del camí  $\tau$  que seguim:  $\int_{\tau} \langle G, dl \rangle = 2$ . Els camps com  $G$  s'anomenen *conservatius*.

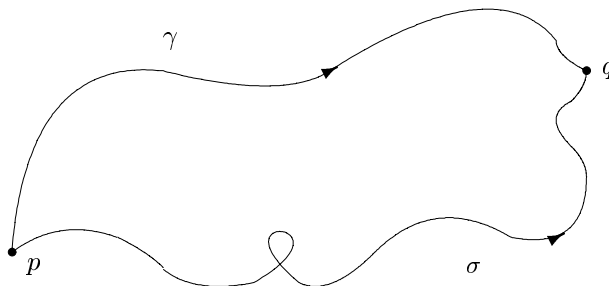


Figura 5.15: Dos camins diferents entre dos punts

**5.5.3 Definició** Es diu que un camp vectorial  $F$  és conservatiu, si la circulació de  $F$  al llarg d'una corba  $\sigma$  depèn tan sols dels punts inicial i final de  $\sigma$ .

Els camps conservatius són importants a causa de la llei de la conservació de l'energia: si  $F$  és un camp de forces, el treball fet per moure una partícula de  $p$  a  $q$  sota la seva acció és  $\int_{\sigma} \langle F, dl \rangle$ , on  $\sigma$  és una corba d'origen  $p$  i extrem  $q$ . Si  $\gamma$  és una altra corba amb el mateix origen i extrem (vegeu la figura 5.13), el treball per anar de  $p$  a  $q$  seguint  $\sigma$  i de  $q$  a  $p$  invertint el sentit de  $\gamma$  és

$$\int_{\sigma} \langle F, dl \rangle + \int_{\gamma_{op}} \langle F, dl \rangle = \int_{\sigma} \langle F, dl \rangle - \int_{\gamma} \langle F, dl \rangle,$$

segons el teorema 5.4.6. Segons la llei de la conservació de l'energia, aquest treball ha de ser zero i, per tant,

$$\int_{\sigma} \langle F, dl \rangle = \int_{\gamma} \langle F, dl \rangle .$$

És a dir, la llei de conservació de l'energia requereix camps de forces conservatius.

Anem a donar una caracterització matemàtica dels camps conservatius. Abans, però, introduïrem un resultat que es pot interpretar com una mena de regla de Barrow (i el potencial escalar com una mena de "primitiva" del camp).

**5.5.4 Teorema** [Newton-Leibniz]. *Sigui  $f$  una funció de classe  $\mathcal{C}^1$  i  $\sigma$  una corba de classe  $\mathcal{C}^1$  a trossos. Aleshores,*

$$\int_{\sigma} \langle \nabla f, dl \rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) .$$

*Demostració.* Si apliquem la regla de la cadena a la composició  $g(t) = f(\sigma(t))$ , obtenim que

$$g'(t) = (f \circ \sigma)'(t) = \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle .$$

Integrem separadament cadascun dels costats d'aquesta igualtat. Per la regla de Barrow,

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) ,$$

mentre que, d'altra banda, es té que

$$\int_{\sigma} \langle \nabla f, dl \rangle = \int_a^b \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt .$$

Igualant aquestes dues expressions en resulta la fórmula de l'enunciat. ■

El teorema de Newton-Leibniz implica fàcilment una part de la caracterització dels camps conservatius que cerquem:

**5.5.5 Corollari** Tot camp que deriva d'un potencial escalar és conservatiu. ■

### 5.5.6 Exemples

1. El camp  $G(x, y) = (3x^2y, x^3 + 1)$  deriva del potencial escalar  $f(x, y) = x^3y + y$ , com es comprova immediatament:

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (3x^2y, x^3 + 1) = G(x, y) .$$

Per tant, és conservatiu, com havíem avançat.

2. Hem comprovat en un exemple anterior que el camp gravitatori o el camp elèctric deriven del potencial escalar (llevat de constants i del signe)

$$f(x, y, z) = \frac{1}{r} , \tag{5.4}$$

on,  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Per tant, són camps conservatius.

Veiem com també és cert el recíproc del corollari anterior i, per tant, camps conservatius i camps que deriven d'un potencial escalar són el mateix:

**5.5.7 Proposició** *Tot camp conservatiu deriva d'un potencial escalar.*

*Demostració.* De forma més precisa, anem a provar que si  $F$  és un camp conservatiu definit en un obert connex  $U$ , aleshores  $F$  deriva de potencial escalar en  $U$ . Sigui  $p_0$  un punt de  $U$ . Com que  $U$  és un obert connex, donat un punt  $p \in U$  existeix algun camí  $C_p$ , tot contingut a  $U$ , que uneix  $p_0$  i  $p$ . A més, com que  $F$  és un camp conservatiu, la integral

$$\int_{C_p} \langle F, dl \rangle,$$

és independent del camí escollit, només depèn dels extrems inicial,  $p_0$ , i final,  $p$ . Es defineix així una funció

$$f(p) = \int_{C_p} \langle F, dl \rangle.$$

Comprovem ara que  $f$  és un potencial escalar de  $F$ , és a dir, que se satisfà que  $F = \nabla f$ .

Hem de veure que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

Provarem la primera igualtat, ja que les altres dues es raonen de forma anàloga. Per definició de derivada parcial,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

El numerador d'aquest límit és

$$f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) = \int_{C_{p'}} \langle F, dl \rangle - \int_{C_p} \langle F, dl \rangle,$$

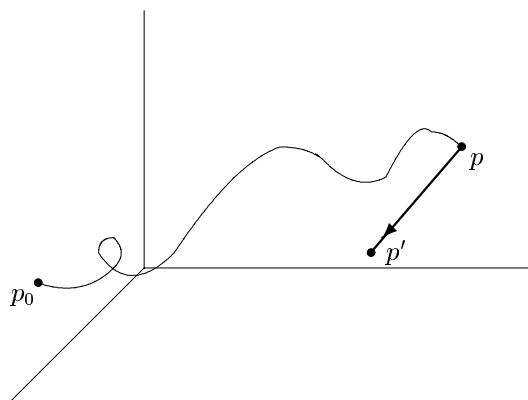
on  $C_p$  és una corba que uneix  $p_0$  amb  $p = (x, y, z)$  i  $C_{p'}$  uneix  $p_0$  amb  $p' = (x + \Delta x, y, z)$ , (vegeu la figura 5.16).

Com que  $F$  és conservatiu, la circulació de  $F$  al llarg d'una trajectòria depèn únicament dels extrems d'aquesta. Això ens dona llibertat a l'hora d'escollir el camí  $C_{p'}$ : podem prendre com  $C_{p'}$  la unió de  $C_p$  amb el segment rectilini paral·lel a l'eix  $x$ ,  $C'$ , que uneix  $p$  amb  $p'$ . Llavors, per l'additivitat de la integral,

$$\int_{C_{p'}} \langle F, dl \rangle - \int_{C_p} \langle F, dl \rangle = \int_{C'} \langle F, dl \rangle,$$

i aquesta darrera integral és igual a

$$\int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt,$$

Figura 5.16: El camí  $C'_p$  entre  $p_0$  i  $p$ 

la qual, pel teorema del valor mig, és igual a

$$P(t_0, y, z)\Delta x,$$

per a algun  $t_0 \in [x, x + \Delta x]$ . Tot plegat, resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(t_0, y, z)\Delta x}{\Delta x} = P(x, y, z),$$

ja que, quan  $\Delta x \rightarrow 0$ , es té que  $t_0 \rightarrow x$ . ■

Donada la seva importància, recollim els dos resultats anteriors en forma de teorema:

**5.5.8 Teorema** *Si  $F$  un camp vectorial definit en un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Són equivalents:*

- i)  $F$  deriva de potencial en  $U$ ,  $F = \nabla f$ .
- ii)  $F$  és un camp conservatiu en  $U$ . ■

**5.5.9 Observació** Si  $f$  és un potencial d'un camp vectorial  $F$ , també ho és la funció resultant de sumar a  $f$  una constant qualsevol,  $f + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . És a dir, el potencial d'un camp conservatiu està determinat llevat de constants.

La demostració anterior dóna, de fet, una fórmula per calcular potencials escalars de camps conservatius:

$$f(p) = \int_{C_p} \langle F, dl \rangle .$$

Per tal d'aplicar-la hem d'escollir un punt,  $p_0$ , de l'obert  $U$  des d'on calcular les integrals. Observem que si canviem l'elecció d'aquest punt, escollint un punt  $p_1$ , aleshores el potencial que en resulta difereix de l'anterior per la constant

$$\int_{p_1}^{p_0} \langle F, dl \rangle .$$

En el cas que  $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  estigui definit a tot  $\mathbb{R}^3$ , podem prendre  $p_0 = (0, 0, 0)$  i com a corba  $C_p$  unint  $p_0$  amb  $p = (x, y, z)$  la formada pels segments rectilinis paral·lels als eixos coordenats definits per (vegeu la figura 5.17):

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= (t, 0, 0), & t \in [0, x], \\ \sigma_2(t) &= (x, t, 0), & t \in [0, y], \\ \sigma_3(t) &= (x, y, t), & t \in [0, z].\end{aligned}$$

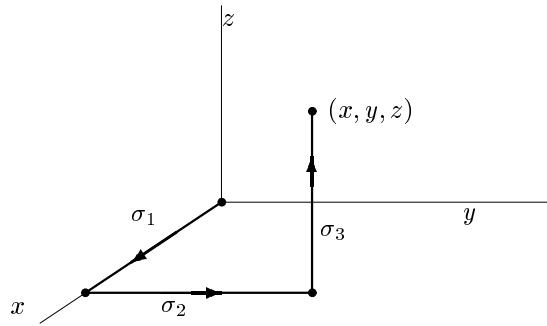


Figura 5.17: Camí des de l'origen fins a un punt

Fent-ho així, resulta

$$\int_{C_p} \langle F, dl \rangle = \int_{\sigma_1} \langle F, dl \rangle + \int_{\sigma_2} \langle F, dl \rangle + \int_{\sigma_3} \langle F, dl \rangle,$$

i, com que es tenen les igualtats

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1} \langle F, dl \rangle &= \int_0^x \langle F(\sigma_1(t)), \sigma_1'(t) \rangle dt = \int_0^x P(t, 0, 0) dt, \\ \int_{\sigma_2} \langle F, dl \rangle &= \int_0^y Q(x, t, 0) dt, \\ \int_{\sigma_3} \langle F, dl \rangle &= \int_0^z R(x, y, t) dt,\end{aligned}$$

trobem la fórmula

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt.$$

Per a camps plans, de dues variables, la fórmula corresponent és

$$f(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt.$$

### 5.5.10 Exemples

1. Un potencial escalar del camp conservatiu  $G(x, y) = (3x^2y, x^3 + 1)$  és:

$$f(x, y) = \int_0^x 3t^2 y dt + \int_0^y (x^3 + 1) dt = (x^3 t + t) \Big|_0^y = x^3 y + y.$$

2. Lògicament, si el camp  $F$  no és conservatiu, les fórmules que hem trobat no donen un potencial escalar. Així, per al camp  $F(x, y) = (x^2, xy)$ , la funció

$$f(x, y) = \int_0^x t^2 dt + \int_0^y x t dt = \frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{2}$$

no és un potencial escalar:

$$\nabla f(x, y) = \left( x^2 + \frac{y^2}{2}, xy \right) \neq F(x, y).$$

## 5.6 Integrals de camps sobre superfícies: flux

Suposem que en una regió de l'espai tenim un líquid en moviment (un fluid) del qual coneixem la velocitat en cada punt:  $F(x, y, z)$ . Volem mesurar la quantitat de fluid per unitat de temps que passa a través d'una superfície  $S$ . Per exemple, la superfície pot ser una secció d'un canal i estem interessats en el cabal d'aquest canal.

Suposem, per començar, que la superfície és una regió d'un pla, que la velocitat del fluid és constant  $F(x, y, z) = F_0$  i que  $F$  és perpendicular a  $S$ . Aleshores la quantitat de fluid (flux) que passarà a través de  $S$  per unitat de temps serà justament el volum del "cilindre" de tapes  $S$  i  $S + F_0$  i alçada  $\|F_0\|$ , és a dir,

$$\text{Flux} = \|F_0\| \dot{\text{Àrea}}(S).$$

Si la direcció de  $F$  no és necessàriament perpendicular a  $S$ , aleshores tindrem (vegeu la figura 5.18)

$$\text{Flux} = \|\pi_N(F_0)\| \dot{\text{Àrea}}(S) = \langle F_0, \frac{N}{\|N\|} \rangle \dot{\text{Àrea}}(S).$$

Anem ara al cas general: si  $S = \varphi(D)$  és una superfície qualsevol, procedim per un procés d'aproximació com hem fet en el càlcul de l'àrea. És a dir, prenem una partició de  $S$  en regions  $K_{ij}$ , que alhora aproximem per les regions corresponents dels plans tangents (i que seguirem denotant per  $K_{ij}$ , vegeu la figura 5.19). Tindrem que el flux a través de la superfície  $S$  serà aproximadament igual a

$$\sum_{i,j=1}^n \langle F(p_{ij}), \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u_i, v_j) \rangle \dot{\text{Àrea}}(K_{ij}).$$

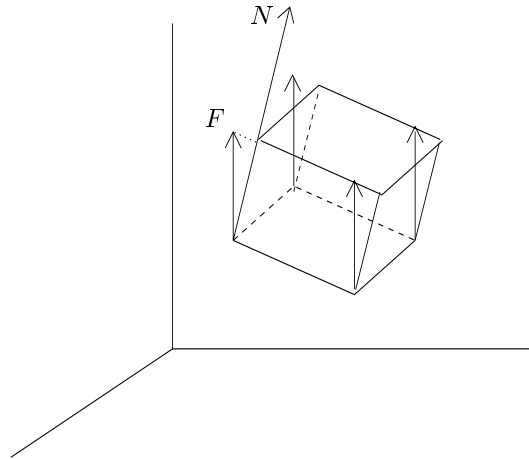


Figura 5.18: Flux d'un camp constant

Com que l'element d'àrea de  $K_{ij}$  s'aproxima per  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ , aquesta suma és igual a

$$\sum_{i,j=1}^n \langle F(p_{ij}), (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_i, v_j) \rangle \Delta u_i \Delta v_j,$$

on hem escrit  $p_{ij} = \varphi(u_i, v_j)$ .

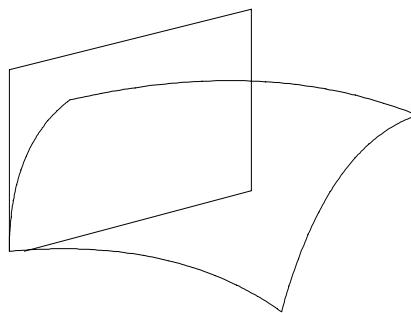


Figura 5.19: Aproximació de l'àrea d'una superfície

Refinant la partició, i passant al límit quan les longituds dels costats  $\Delta u$  i  $\Delta v$  tendeixen a zero, tindrem el flux desitjat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \langle F(\varphi(u_i, v_j)), (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u_i, v_j) \rangle \Delta u_i \Delta v_j,$$

que no és altra cosa que la integral

$$\int_D \langle F(\varphi(u, v)), (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) \rangle dudv.$$

En general, per a un camp qualsevol (no necessàriament de velocitat d'un fluid) prenem aquesta integral com a definició de flux:

**5.6.1 Definició**  *sigui  $S$  la superfície corresponent a la parametrització  $\varphi : D \rightarrow \varphi(D) = S \subseteq \mathbb{R}^3$  i  $F$  un camp vectorial definit sobre  $S$ . Anomenarem integral de superfície de  $F$  sobre  $S$  o flux de  $F$  a través de  $S$*

$$\int_S \langle F, dS \rangle = \int_D \langle F \circ \varphi, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle dudv.$$

Si  $\varphi : D \rightarrow S = \varphi(D) \subseteq \mathbb{R}^3$  és una parametrització regular, és a dir, tal que  $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$  en tots els seus punts, podem calcular en cada punt el vector normal unitari corresponent a la parametrització  $\varphi$ ,

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}.$$

Així, substituint aquest vector en la definició del flux, tenim que

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, dS \rangle &= \int_D \langle F \circ \varphi, N \rangle \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv \\ &= \int_S \langle F \circ \varphi, N \rangle dS. \end{aligned}$$

És a dir, la integral de superfície del camp  $F$  coincideix amb la integral de superfície de la funció escalar

$$(u, v) \mapsto \langle F(\varphi(u, v)), N(u, v) \rangle,$$

que és la component normal de  $F$  sobre  $S$ .

**5.6.2 Observació** Una notació alternativa per al flux de  $F$  a través de  $S$  és

$$\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy.$$

En aquest cas, es diu que

$$Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

és la 2-forma diferencial associada al camp  $F$ .

Veiem el perquè d'aquesta notació: considerem l'expressió aproximada

$$\sum_{i,j=1}^n \langle F(p_{ij}), N(p_{ij}) \rangle \text{Àrea}(K_{ij}), \quad (5.5)$$

on

$$N(p_{ij}) = \frac{\varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j)}{\|\varphi_u(u_i, v_j) \wedge \varphi_v(u_i, v_j)\|}.$$

Si escrivim

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \quad \text{i} \quad N = (n_1, n_2, n_3),$$

aleshores qualsevol dels sumands anteriors és

$$\langle F, N \rangle \text{Àrea}(K) = (Pn_1 + Qn_2 + Rn_3) \text{Àrea}(K) \quad (5.6)$$

$$= Pn_1 \text{Àrea}(K) + Qn_2 \text{Àrea}(K) + Rn_3 \text{Àrea}(K). \quad (5.7)$$

Recordem que, com hem vist al capítol 3, podem obtenir l'àrea del paral·lelogram  $K$  a partir de les seves projeccions,  $K^{yz}$ ,  $K^{zx}$  i  $K^{xy}$  sobre els plans coordenats  $yz$ ,  $zx$  i  $xy$ , mitjançant les igualtats

$$\text{Àrea}(K) = \frac{\text{Àrea}(K^{yz})}{\cos \theta_1} = \frac{\text{Àrea}(K^{zx})}{\cos \theta_2} = \frac{\text{Àrea}(K^{xy})}{\cos \theta_3},$$

on  $\theta_1, \theta_2$ , i  $\theta_3$  són els angles de  $N$  amb els eixos coordenats:

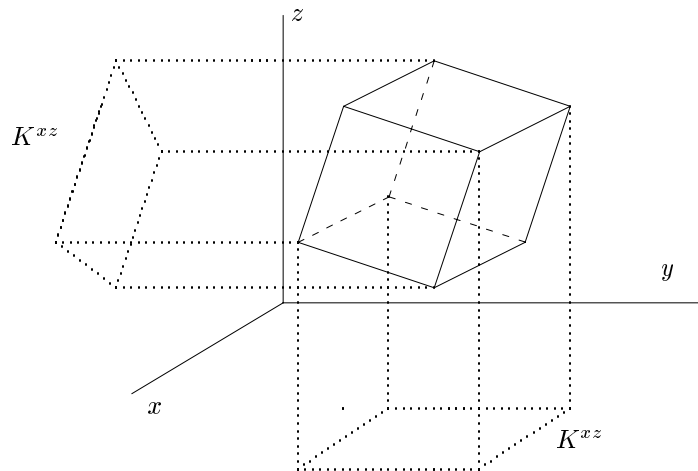


Figura 5.20: Projeccions sobre els plans coordenats

$$n_1 = \cos \theta_1, \quad n_2 = \cos \theta_2, \quad n_3 = \cos \theta_3.$$

Substituint en (5.6), en resulta la igualtat

$$\langle F, N \rangle \text{Àrea}(K) = P \text{Àrea}(K^{yz}) + Q \text{Àrea}(K^{zx}) + R \text{Àrea}(K^{xy}).$$

Les àrees de les projeccions sobre els plans coordenats són  $\Delta y \Delta z$ ,  $\Delta z \Delta x$ , i  $\Delta x \Delta y$ . Sumant ara la contribució de cadascuna de les regions  $K_{ij}$ , obtenim

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \left[ P(p_{ij}) \text{Àrea}(K_{ij}^{yz}) + Q(p_{ij}) \text{Àrea}(K_{ij}^{zx}) + R(p_{ij}) \text{Àrea}(K_{ij}^{xy}) \right] \\ = & \sum_{i,j=1}^n [P(p_{ij}) \Delta y \Delta z + Q(p_{ij}) \Delta z \Delta x + R(p_{ij}) \Delta x \Delta y], \end{aligned}$$

que per pas al límit dóna l'expressió de la 2-forma corresponent.

### 5.6.3 Exemples

1. Considerem la parametrització de l'esfera unitària

$$\begin{aligned} D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto \varphi(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi). \end{aligned}$$

Calculem el flux a través de  $\varphi(D)$  del camp  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Els vectors tangents a les corbes coordenades són

$$\begin{aligned} \varphi_\theta &= (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \varphi_\phi &= (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -1). \end{aligned}$$

i, per tant, el vector normal a la parametrització és igual a

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -1 \end{vmatrix} = (-\cos \theta \sin^2 \phi, -\sin \theta \sin^2 \phi, -\sin \phi \cos \phi).$$

Així, per calcular el flux de  $F$  per  $\varphi(D)$  hem d'integrar la funció

$$\begin{aligned} \langle F(\varphi(\theta, \phi)), \varphi_\theta \wedge \varphi_\phi \rangle &= (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin^2 \phi \\ -\sin \theta \sin^2 \phi \\ -\sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= -\cos^2 \theta \sin^3 \phi - \sin^2 \theta \sin^3 \phi - \sin \phi \cos^2 \phi \\ &= -\sin^3 \phi - \sin \phi \cos^2 \phi = -\sin \phi. \end{aligned}$$

Calculem, finalment, la integral:

$$\int_\varphi \langle F, ds \rangle = \int_D -\sin \phi d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (-\sin \phi) d\theta d\phi = 2\pi \cos \phi \Big|_0^\pi = 2\pi(-1 - 1) = -4\pi.$$

Observem que el valor d'aquesta integral és negatiu, quina interpretació té aquest fet? Si calculem el vector normal en un punt, per exemple, en el punt  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ,  $\varphi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ , veiem que

$$\varphi_\theta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \varphi_\phi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 0),$$

que és un vector que apunta cap endins de l'esfera, mentre que el camp  $F$  del qual estàvem calculant el flux apunta cap enfora. Així, si  $F$  hagués estat la velocitat d'un fluid, el que estàvem calculant era la quantitat de fluid per unitat de temps que *entra* dins l'esfera. Lògicament, hem trobat una quantitat negativa!

2. Si  $S$  és una superfície, s'anomena *angle sòlid* d'un casquet  $\Sigma$  de  $S$ , i el denotarem per  $\Omega(\Sigma)$ , l'àrea de la superfície de l'esfera unitat tallada pel con que projecte  $\Sigma$  des de l'origen (vegeu la figura 5.21).

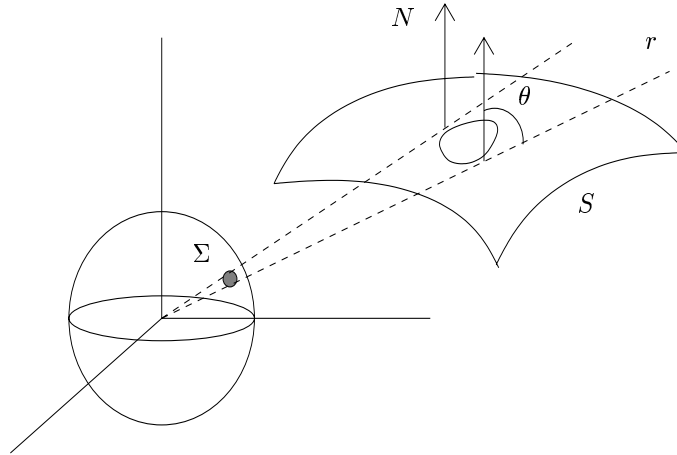


Figura 5.21: Angle sòlid determinat per una superfície

Si  $\theta$  és l'angle format per la normal a la superfície  $S$ ,  $N$ , i la normal a l'esfera,  $\vec{r}/r$ , aleshores

$$r^2 \Delta \Omega = \cos \theta \Delta \Sigma,$$

i, per tant,

$$\Delta \Omega = \frac{\cos \theta}{r^2} \Delta \Sigma = \frac{1}{r^2} \langle \frac{\vec{r}}{r}, N \rangle \Delta \Sigma,$$

d'on resulta que l'angle sòlid  $\Omega(\Sigma)$  és igual a

$$\Omega(\Sigma) = \int_{\Sigma} \langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \rangle dS,$$

és a dir, que l'angle sòlid és el flux del camp vectorial  $\vec{r}/r^3$ .

En el primer exemple hem vist com és d'important l'*orientació* de la superfície. Abans de fer altres exemples, anem a introduir els conceptes fonamentals al voltant de l'orientació de superfícies.

**5.6.4 Definició** Una superfície  $S$  es diu que és orientable si a sobre hi ha definit un camp vectorial unitari continu que sigui ortogonal a la superfície en cada punt

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto N(p). \end{aligned}$$

### 5.6.5 Exemples

1. Les superfícies que poden cobrir-se amb una sola parametrització regular, que és injectiva, són orientables. En efecte, si  $S = \varphi(D)$  és una parametrització regular, podem orientar  $S$

mitjançant el camp normal

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}.$$

En particular, els gràfics de funcions,  $z = f(x, y)$ , són superfícies orientables. En aquest cas, si la parametritzem per  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , la podem orientar pel camp normal

$$N(x, y) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1).$$

Per exemple, la superfície d'un paraboloides  $z = x^2 + y^2$  és orientable.

2. Les superfícies definides implícitament per una equació  $f(x, y, z) = 0$  també són orientables, ja que el camp vectorial  $\nabla f$  és normal i, si es donen les condicions per aplicar el teorema de la funció implícita, és no nul, per la qual cosa podem orientar-les pel camp normal unitari

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}.$$

Per exemple, una esfera,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , és una superfície orientable.

3. A diferència del que succeeix per a les corbes, hi ha superfícies no orientables, és a dir, per a les quals no és possible l'elecció d'un vector normal unitari en cada punt variant amb continuïtat. Un exemple és la *cinta de Moebius* (vegeu la figura 5.22).

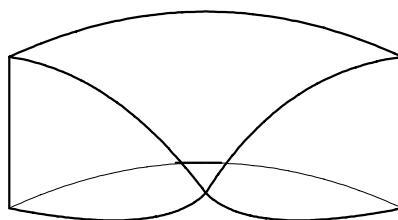


Figura 5.22: Cinta de Moebius

Com en el cas de corbes, en les quals podem anar en un sentit o en el sentit contrari, per a les superfícies orientables hi ha dues maneres de travessar-les: si  $S$  és orientable i  $N$  és un camp vectorial unitari continu i ortogonal, aleshores el camp oposat,  $-N$ , també compleix les mateixes propietats. Escollir un o altre camp ortogonal unitari ( $N$  o  $-N$ ) s'anomena una *orientació* de la superfície. Una superfície per a la qual hem escollit una orientació s'anomena una *superfície orientada*. Així, les superfícies orientables són aquelles que tenen dues cares; la *superior* (*exterior, positiva*) és aquella on es troba el vector normal unitari. La contrària és la *inferior* (*interior, negativa*). La cinta de Moebius té, doncs, una sola cara.

L'elecció d'un vector unitari ortogonal que variï contínuament equival a elegir una base (p.e., ortonormal) en cada espai tangent  $T_p S$ , també que variï contínuament. Exactament, una base

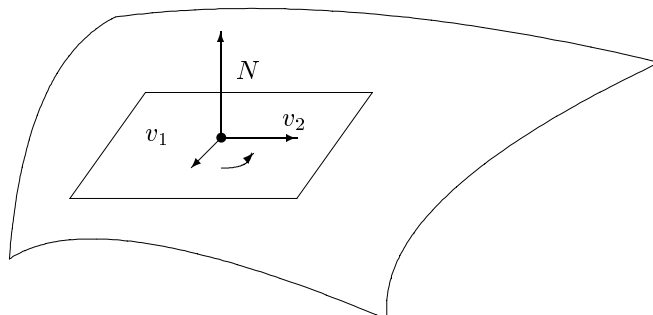


Figura 5.23: Orientació del pla tangent

$\{v_1, v_2\}$  tal que  $N = v_1 \wedge v_2$ . Per tant, l'elecció d'una orientació equival a l'elecció d'un sentit de gir en cada espai tangent (o en l'entorn de cada punt): el sentit que porta del primer vector de la base al segon.

Donada una superfície orientada, que podem denotar per  $(S, N)$ , es diu que una parametrització  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $S$  *preserva l'orientació* si el vector normal corresponent a la parametrització  $\varphi$ ,

$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|},$$

coincideix amb el vector  $N$  en tot punt. En cas contrari, es té que  $N = -\varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ , i es diu que  $\varphi$  *inverteix l'orientació*. Donades dues parametritzacions equivalents d'una superfície  $S$ ,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $\psi : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es diu que tenen la *mateixa orientació* si

$$\frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|},$$

en tot punt de  $S$ . Si  $\varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = -\psi_u \wedge \psi_v / \|\psi_u \wedge \psi_v\|$  en tot els punts, es diu que tenen *orientacions oposades*.

**5.6.6 Exemple** Si orientem l'esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  escollint en cada punt el vector normal unitari que apunta cap enfora

$$N(x, y, z) = (x, y, z),$$

aleshores la parametrització  $\varphi(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$  inverteix l'orientació.

**5.6.7 Observació** Donada una parametrització

$$\begin{aligned} \varphi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

aleshores  $\psi(v, u) = \varphi(u, v)$  té l'orientació oposada de la de  $\varphi$ .

Un cop aclarit això, podem enunciar que la integral de superfície de funcions vectorials és independent de la parametrització, si aquesta preserva l'orientació (compareu-ho amb la circulació i també amb la integral de funcions escalars sobre superfícies).

**5.6.8 Teorema** *Si  $S$  una superfície orientable i  $F$  un camp vectorial continu definit sobre  $S$ . Sigui  $\varphi$  i  $\psi$  dues parametritzacions equivalents de  $S$ . Aleshores,*

(a)  $\int_{\varphi} \langle F, dS \rangle = \int_{\psi} \langle F, dS \rangle$ , si  $\varphi$  i  $\psi$  tenen la mateixa orientació.

(b)  $\int_{\varphi} \langle F, dS \rangle = -\int_{\psi} \langle F, dS \rangle$ , si  $\varphi$  i  $\psi$  tenen orientacions oposades. ■

Per tant, si  $S$  és una superfície orientada té sentit parlar de la integral sobre  $S$  i no pas sobre una parametrització particular:

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, dS \rangle &= \int_{\varphi} \langle F, dS \rangle, \quad \text{si } \varphi \text{ preserva l'orientació de } S, \\ \int_S \langle F, dS \rangle &= -\int_{\varphi} \langle F, dS \rangle, \quad \text{si } \varphi \text{ inverteix l'orientació de } S. \end{aligned}$$

Algunes vegades, per tal de remarcar que hem escollit una orientació de la superfície  $S$ , la denotarem per  $S^+$ .

### 5.6.9 Exemples

1. Calculem el flux del camp  $F(x, y, z) = (0, 1, 0)$  a través de l'esfera unitària orientada per la normal exterior.

Si  $\varphi$  és la parametrització per coordenades esfèriques considerada en l'exemple 5.6.3, aleshores  $\psi(\phi, \theta) = \varphi(\theta, \phi)$  n'és una parametrització que preserva l'orientació. Es té que

$$\psi_{\phi} \wedge \psi_{\theta} = \varphi_{\theta} \wedge \varphi_{\phi} = -(\varphi_{\theta} \wedge \varphi_{\phi}) = (\cos \theta \sin^2 \phi, \sin \theta \sin^2 \phi, \sin \phi \cos \phi),$$

i, per tant, hem d'integrar la funció

$$\langle F, \psi_{\phi} \wedge \psi_{\theta} \rangle = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} \cos \theta \sin^2 \phi \\ \sin \theta \sin^2 \phi \\ \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} = \sin \theta \sin^2 \phi.$$

Ara tenim tots els ingredients per a realitzar el càlcul desitjat:

$$\int_S \langle F, dS \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \sin^2 \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = 0.$$

La interpretació física d'aquest resultat és evident: entra tant de fluid com en surt.

2. Calculem el flux del camp constant  $F = (9, -6, 3)$  per la superfície del pla  $2x + 3y + 6z = 12$  continguda en el primer octant, segons la direcció del vector normal  $(2, 3, 6)$ . En aquest cas efectuem el producte escalar de  $F$  amb el vector normal unitari,  $N$ :

$$\langle F, N \rangle = \langle (9, -6, 3), \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \rangle = \frac{18}{7}.$$

El flux de  $F$  és

$$\int_S \langle F, dS \rangle = \int_S \frac{18}{7} dS = \frac{18}{7} A(S) = \frac{18}{7} \frac{12}{6/7} = 36.$$

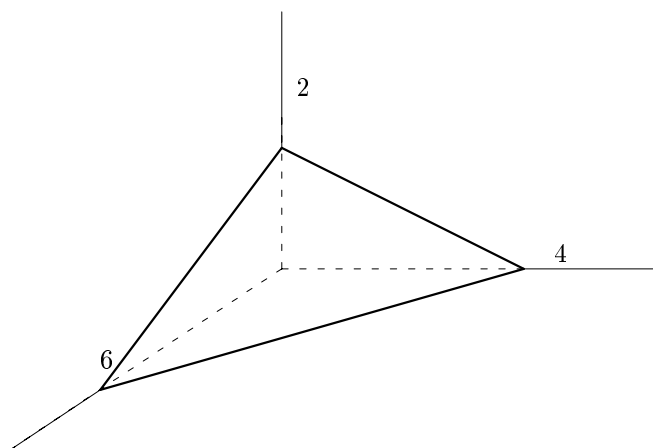


Figura 5.24: Pla  $2x + 3y + 6z = 12$

3. Com succeeix per a les integrals de funcions sobre una superfície, podem calcular el flux d'un camp vectorial a través d'una superfície diferenciable a trossos, sempre que aquesta estigui orientada. Vegem-ne un exemple.

Signi  $S$  la superfície que envolta el sòlid definit per les equacions

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

Calculem el flux sortint per  $S$  del camp vectorial  $F = (xz, x, -3y^2z)$ .

La superfície  $S$  es compon de la superfície cilíndrica lateral,  $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 5$ , que denotarem per  $S_1$ , el disc inferior,  $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ , que denotarem per  $S_0$ , i el disc superior,  $z = 5, x^2 + y^2 \leq 1$ , que denotarem per  $S_2$ , (vegeu la figura 5.25).

Els vectors unitaris normals corresponents són  $N_1 = (x, y, 0)$ ,  $N_0 = (0, 0, -1)$  i  $N_2 = (0, 0, 1)$ . Així, el flux de  $F$  per la superfície  $S$  és igual a la suma dels fluxos de  $F$  per  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$ :

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, dS \rangle &= \int_{S_0} \langle F, dS \rangle + \int_{S_1} \langle F, dS \rangle + \int_{S_2} \langle F, dS \rangle \\ &= \int_{S_0} \langle F, (0, 0, -1) \rangle dS + \int_{S_1} \langle F, (x, y, 0) \rangle dS + \int_{S_2} \langle F, (0, 0, 1) \rangle dS \\ &= - \int_{S_0} 3y^2z dS + \int_{S_1} (x^2z + xy) dS + \int_{S_2} 3y^2z dS. \end{aligned}$$

La primera integral és igual a zero ja que  $z = 0$  sobre la superfície  $S_0$ . Per a la segona, parametritzem la superfície del cilindre amb les coordenades habituals,  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ ;

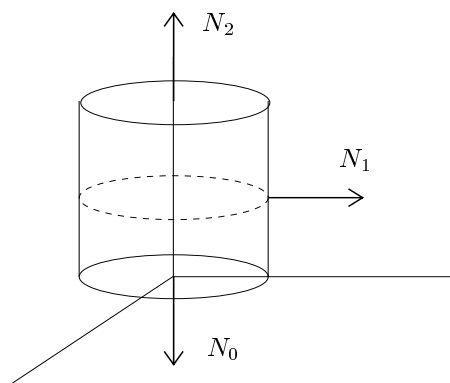


Figura 5.25: Superfície que envolta un cilindre

observem que, en aquest cas, no cal que comprovem si la parametrització preserva o no l'orientació, ja que ja hem utilitzat l'orientació del vector normal sortint quan hem calculat el producte escalar  $\langle F, N \rangle = x^2z + xy$ , i ara hem d'integrar aquesta funció, la qual cosa es fa independentment de la parametrització utilitzada. La variació dels paràmetres és  $0 \leq u \leq 2\pi$  i  $0 \leq v \leq 5$ , per la qual cosa el càlcul a efectuar és:

$$\int_{S_1} (x^2z + xy)dS = \int_0^{2\pi} du \int_0^5 (v \cos^2 u + \cos u \sin u) = \frac{25}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \frac{25}{2} \pi.$$

Calculem ara la tercera integral usant coordenades polars,

$$\int_{S_2} 3y^2 \cdot 5dS = 15 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \cdot r^2 \sin^2 \theta dr = \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{15}{4} \pi.$$

En definitiva, el flux total del camp  $F$  a través de la superfície que envolta el cilindre és igual a

$$0 + \frac{25}{2} \pi + \frac{15}{4} \pi = \frac{115}{4} \pi.$$

# Els teoremes integrals i aplicacions

El teorema fonamental del Càlcul estableix la igualtat

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

és a dir, que quan s'integra la derivada d'una funció,  $f'(x)$ , en un interval,  $[a, b]$ , el resultat que s'obté és la diferència de valors de la funció  $f(x)$  en els extrems de l'interval. En aquest capítol presentem els coneguts com els teoremes integrals del càlcul vectorial que relacionen les integrals de línia, de superfície i de volum amb els operadors diferencials que actuen sobre els camps escalars i vectorials, el gradient, el rotacional i la divergència. Interpretats adequadament, aquests resultats generalitzen el teorema fonamental del càlcul abans esmentat en cadascuna de les situacions que es donen en la integració vectorial. Són els teoremes de Green, de Stokes i de de la divergència de Gauss.

Els resultats d'aquest capítol van tenir l'origen en la física matemàtica del XIX. Al llarg de l'exposició presentem, a títol indicatiu, alguns exemples que reflecteixen aquesta vinculació amb les aplicacions a la física matemàtica, tot i que per a un estudi més complet és convenient consultar la bibliografia especialitzada corresponent.

## 6.1 El teorema de Green

En aquest apartat establim l'anomenada fórmula de Green que expressa la relació entre una integral de línia del pla

$$\int_C Pdx + Qdy,$$

calculada al llarg del contorn  $C$  d'un domini del pla  $D$  i una integral doble en aquest domini.

Per tal d'enunciar el teorema de Green és convenient fixar una terminologia adequada: per una *corba tancada simple* del pla entendrem una corba tancada sense autointerseccions, (vegeu la figura 6.1).

Una regió  $D$  del pla direm que és *simplement connexa* si és connexa i la regió tancada per tota corba tancada simple de  $D$  està tota continguda a  $D$ . Per exemple, a la figura 6.2 veiem dues

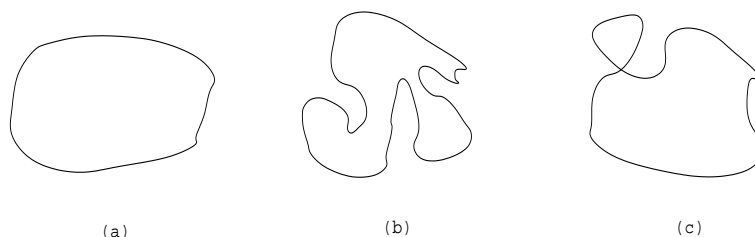


Figura 6.1: Corbes tancades del pla

regions simplement connexes, la (a) i la (b), mentre que no ho són les altres dues. De fet, en la figura (c) una circumferència centrada a l'origen com la dibuixada és una corba tancada simple de  $D$ , però el disc que encercla aquesta circumferència no està tot a  $D$ , ja que la regió  $D$  no conté l'origen.

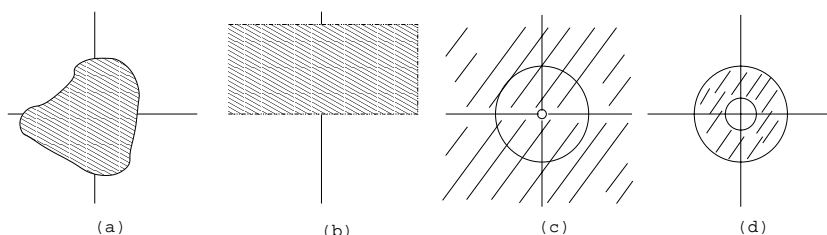


Figura 6.2: Regions del pla

Intuïtivament, una regió plana és simplement connexa si és d'una sola peça (això és la connexió) i no té forats.

Podem ara enunciar el teorema de Green.

**6.1.1 Teorema de Green** *Sigui  $D$  una regió elemental del pla, simplement connexa i sigui  $C = \partial D$  la corba que l'envolta. Sigui  $F = (P, Q)$  un camp vectorial, derivable amb continuïtat a  $D$ . Aleshores se satisfà que*

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

on  $C^+$  indica que recorrem la corba  $C$  (que és una corba tancada) en sentit antihorari.

*Demostració.* Provarem el resultat per a un tipus especial de regió  $D$  i indicarem com es tractaria el cas general, de desenvolupament molt més tècnic.

Suposarem que  $D$  és una regió tal que tota recta vertical i tota recta horitzontal tallen la seva frontera com a màxim en dos punts, (vegeu la figura 6.3).

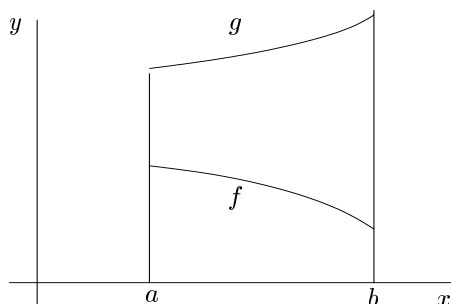


Figura 6.3: Regió pel teorema de Green

Aleshores la corba  $C$  que l'envolta està formada pels gràfics de dues funcions,  $f(x)$  i  $g(x)$ , de manera que la regió es pot descriure per les desigualtats

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x).$$

Provem que se satisfà la igualtat

$$\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

D'una banda, podem aplicar el teorema de Fubini de la forma següent:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx. \end{aligned}$$

De l'altra, utilitzant la definició d'integral de línia al llarg de  $C$ , el fet que al llarg dels segments  $x = a$  i  $x = b$  la forma diferencial  $P dx$  és zero, i que el sentit de recorregut és antihorari trobem que

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx,$$

i, per tant, trobem justament el valor oposat al càlcul anterior.

Tal com hem escollit  $D$ , la situació és simètrica respecte de les variables  $x$  i  $y$ , per la qual cosa es prova anàlogament que

$$\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

i això acaba la demostració en aquest cas.

El cas general se segueix de descompondre una regió  $D$  en un nombre finit de regions com les del cas particular que hem provat, (vegeu la figura 6.4), i aplicar el resultat a cadascuna d'aquestes regions, aprofitant el teorema d'additivitat de les integrals i el fet que les integrals que apareguin al llarg dels talls practicats per obtenir la descomposició es cancel·laran dos a

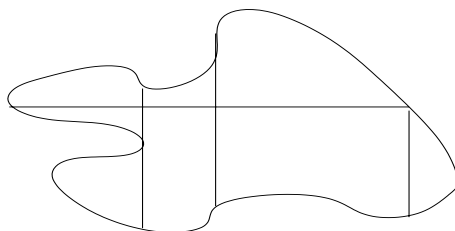


Figura 6.4: Descomposició d'una regió en regions simples

dos. En els exemples i situacions que es presenten a la pràctica serà clar com obtenir una descomposició com l'esmentada, tot i que provar-ne l'existència en general resulta un afer molt tècnic, que no tractarem. ■

**6.1.2 Exemple** En aquest exemple verifiquem el teorema de Green en una regió determinada: sigui  $D$  el semicercle definit per  $x^2 + y^2 \leq 1$  i  $y \geq 0$ , i considerem el camp vectorial  $F = (x + y, xy)$ . Calculem la circulació de  $F$  al llarg de la corba que envolta  $D$ : aquesta corba està formada pel segment  $C_1$ , definit per  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$ , i la semicircumferència de radi 1,  $C_2$ , recorreguda des del punt  $(1, 0)$  fins al punt  $(-1, 0)$ , (vegeu la figura 6.5).

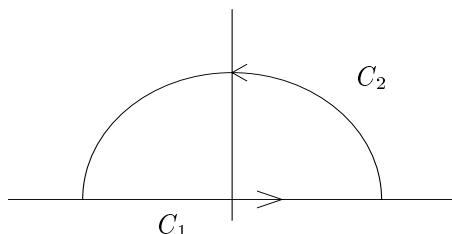


Figura 6.5: Regió de l'exemple 6.1.2

Així, les parametritzacions de  $C_1$  i  $C_2$  donades per

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= (t, 0), & -1 \leq t \leq 1, \\ \sigma_2(t) &= (\cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq \pi,\end{aligned}$$

respectivament, són positives. La circulació de  $F$  és, per tant,

$$\begin{aligned}\int_C (x + y)dx + xydy &= \int_{-1}^1 t dt + \int_0^\pi (\cos t + \sin t)d(\cos t) + \cos t \sin t d(\sin t) \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \int_0^\pi (-\cos t \sin t - \sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \frac{\cos^2 t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

D'altra banda, si integrem l'altre terme de la fórmula de Green trobem:

$$\begin{aligned}
 \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_D (y - 1) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy - \frac{\pi}{2} \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{\pi}{2} = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

resultat que coincideix, com era d'esperar, amb el càlcul anterior.

**6.1.3 Observació** Hem enunciat el teorema de Green per a regions simplement connexes, però de fet pot aplicar-se a regions molt més generals, com per exemple a una corona circular, (que no és simplement connexa). En aquests casos, la regió pot estar envoltada per més d'una corba, dues circumferències en el cas d'una corona circular, cadascuna de les quals contribuirà a la fórmula de Green amb la integral de línia corresponent, essent molt important recórrer cadascuna de les corbes en el sentit adequat. Anem a concretar aquest comentari veient com deduir la fórmula de Green per a una corona circular, (vegeu la figura 6.6).

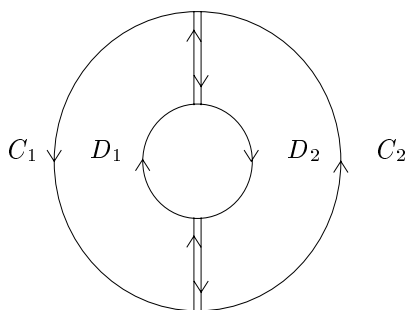


Figura 6.6: Descomposició d'una corona circular

Utilitzant les notacions de la figura, descomponem la corona en dues regions,  $D = D_1 \cup D_2$ , cadascuna de les quals és simplement connexa. Per l'additivitat de la integral es té que

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \int_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

i, aplicant el teorema de Green a cadascuna d'aquestes regions, deduïm la igualtat:

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_1^+} P dx + Q dy + \int_{C_2^+} P dx + Q dy,$$

on  $C_1$  i  $C_2$  són les corbes que envolten  $D_1$  i  $D_2$ , respectivament, recorregudes en sentit antihorari. Observem que els segments verticals de  $C_1$  i  $C_2$  estan recorreguts en sentits oposats, segons

es recorrin formant part de  $C_1$  o de  $C_2$ , per la qual cosa les integrals corresponents a aquests segments en la darrera igualtat es cancel·len. Així, si  $C_r$  i  $C_R$  són les circumferències de radis  $r$  i  $R$ ,  $r < R$ , que delimiten la corona, trobem que

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{C_r^+} P dx + Q dy + \int_{C_R^+} P dx + Q dy,$$

on ara,  $C_R$  està recorreguda en sentit antihorari, mentre que  $C_r$  ho està en sentit horari.

El fet de canviar el sentit de recorregut per a la circumferència interna pot induir a confusió. De fet, el sentit de recorregut de la vora d'un domini del pla està determinat per la següent regla general: el sentit de recorregut de cadascuna de les corbes és tal que el parell de vectors format pel vector normal sortint de la corona i el que dona el sentit de recorregut formen una base directa. Més endavant, quan parlem del teorema de Stokes, tornarem a aquest punt.

Ara és senzill deduir com aplicar el teorema de Green a una regió com la de la figura 6.7. En aquest cas serà:

$$\sum_{i=0}^n \int_{C_i^+} P dx + Q dy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

on el signe + en cadascuna de les corbes indica que està recorreguda en el sentit marcat a la figura 6.7.

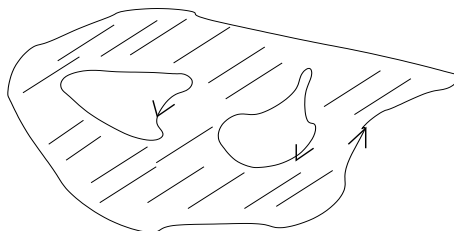


Figura 6.7: Orientació d'una regió múltiplesment connexa

L'exemple següent és una verificació de la versió més general del teorema de Green que acabem d'establir.

**6.1.4 Exemple** Sigui  $D$  la corona definida per  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , i considerem el camp vectorial  $F = (x^2 y, x)$ . La vora de  $D$  està formada per les circumferències centrades a l'origen de radis 1 i 2, que parametritzarem, d'acord amb el criteri de l'observació 6.1.3, per

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (\sin t, \cos t), \\ \sigma_2(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t), \end{aligned}$$

respectivament. Així, la integral de línia de  $F$  al llarg de la vora de  $D$  es calcula de la forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma_1} x^2 y dx + x dy + \int_{\sigma_2} x^2 y dx + x dy &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t d(\sin t) + \sin t d(\cos t) \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t d(2 \cos t)) + 2 \cos t d(2 \sin t) \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t - \sin^2 t - 16 \cos^2 t \sin^2 t + 4 \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 t - 15 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
 &= 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (3 \cos^2 t - 15 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
 &= 2(3B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) - 15B(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \\
 &= 3\pi - \frac{15\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

D'altra banda, hem de calcular la integral a  $D$  de

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2.$$

Per fer-ho, usem coordenades polars:

$$\begin{aligned}
 \int_D (1 - x^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (1 - r^2 \cos^2 \theta) r dr \\
 &= \left. \pi r^2 - \frac{r^4}{4} 2B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \right|_1^2 \\
 &= 4\pi - 4\pi - \pi + \frac{1}{4}\pi \\
 &= -\frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Tal com era d'esperar, els dos càlculs coincideixen.

### ***Aplicació: Àrea d'una regió plana com una integral curvilínia***

Una primera aplicació del teorema de Green és el càlcul de l'àrea de regions planes mitjançant una integral de línia al llarg de la seva vora: sigui  $D$  una regió elemental del pla que té per vora una corba  $C$ ; aleshores, l'àrea de  $D$  està donada per

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{C^+} -y dx + x dy.$$

En efecte, si apliquem el teorema de Green al camp vectorial  $(-y, x)$  en la regió  $D$  trobem la fórmula enunciada:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} -y dx + x dy &= \int_D \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \int_D dx dy \\ &= 2A(D). \end{aligned}$$

Posem dos exemples per il·lustrar l'interès de la fórmula obtinguda.

### 6.1.5 Exemples

1. Sabem que l'àrea tancada per l'el·lipse definida per

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

és igual a  $\pi ab$ . Calculem aquesta àrea mitjançant la fórmula anterior: hem de recórrer l'el·lipse en sentit antihorari, per la qual cosa la parametritzem segons:  $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , amb  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Així, trobem que

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \sin t d(a \cos t) + a \cos t d(b \sin t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

2. Aquesta manera de calcular l'àrea d'una regió plana resulta imprescindible quan només coneixem la corba que envolta la regió  $D$  per una parametrització: si  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ , amb  $a \leq t \leq b$ , aleshores la fórmula anterior es transforma en

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_{\sigma} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b -y x' dt + x y' dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (x y' - y x') dt. \end{aligned}$$

Per exemple, calculem l'àrea tancada per una volta de la cicloide i l'eix  $x$ , (vegeu la figura 6.8).

La corba que envolta  $D$  està formada pel segment  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $y = 0$ , de l'eix  $x$ , recorregut en sentit creixent, i l'arc de cicloide determinat per

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

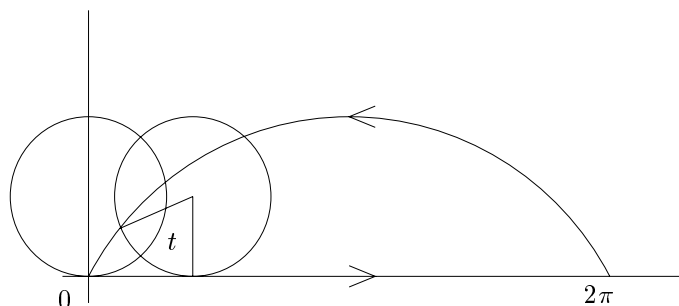


Figura 6.8: Una volta de cicloide

que haurem de recórrer en sentit invers, des del punt  $(2\pi, 0)$  fins al punt  $(0, 0)$ .

Sobre el segment de l'eix  $x$  es té que

$$-ydx + xdy = 0,$$

ja que  $y$  és constant i igual a zero. Així doncs, només caldrà integrar la forma diferencial  $-ydx + xdy$  sobre l'arc de cicloide per tal de calcular l'àrea de  $D$ . Tenint present que  $\sigma(t)$  recorre la corba en el sentit contrari del que hem de calcular, en resulta:

$$\begin{aligned} A(D) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((t - \sin t) \sin t - (1 - \cos t)(1 - \cos t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t \sin t - 2 + 2 \cos t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left| -t \cos t + \sin t - 2t + 2 \sin t \right|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} (-4\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

### **Camps conservatius plans**

Una altra aplicació del teorema de Green és la caracterització dels camps vectorials plans que són conservatius, és a dir, que provenen de potencial:

**6.1.6 Teorema** *Sigui  $D$  una regió elemental del pla simplement conexas. Un camp vectorial  $F = (P, Q)$  és conservatiu si i només si*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

En efecte, sabem que la condició és necessària. També és suficient: si es dona la condició de l'enunciat, la circulació de  $F$  per qualsevol corba tancada de  $D$  serà zero, com es dedueix per

aplicació de la fórmula de Green. Però aquesta és una condició equivalent al fet que  $F$  sigui conservatiu. ■

La hipòtesi que  $D$  sigui un domini simplement connex (és a dir, sense forats) és fonamental, com mostra l'exemple següent.

**6.1.7 Exemple** Considerem el camp vectorial definit per

$$F = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Aquest camp vectorial està definit, i és derivable amb continuïtat, a tots els punts del pla llevat de l'origen. Així, el teorema de Green li és aplicable en tota regió que no encercli l'origen, però no el podem aplicar, per exemple, al disc unitat.

El camp  $F$  satisfà (allà on està definit):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

De tota manera, el camp no és conservatiu en el disc unitat menys l'origen. En efecte, si ho fos, la circulació de  $F$  al llarg de qualsevol corba tancada hauria de ser zero, mentre que el càlcul directe que segueix mostra que no és així: la integral de  $F$  al llarg de la circumferència centrada a l'origen i de radi 1, recorreguda en sentit antihorari, és

$$\begin{aligned} \int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\cos t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\sin t) \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

## 6.2 El teorema de Stokes. Camps conservatius

En aquest apartat establim el teorema de Stokes, també conegut com a *teorema del rotacional*, que és un resultat que expressa la relació entre les integrals de línia i les integrals de superfície. El teorema de Stokes conté, com a cas particular, el teorema de Green que ja hem establert. A més, del teorema de Stokes deduirem una interpretació física del rotacional d'un camp vectorial, independent del sistema de coordenades que emprem, i caracteritzarem (amb les hipòtesis adequades) els camps conservatius com aquells que són irrotacionals.

Començarem reescrivint la fórmula de Green, que a l'apartat anterior hem establert com la igualtat

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

de manera que no faci referència explícita a les coordenades cartesianes  $x, y$ : la integral de línia de la forma diferencial  $Pdx + Qdy$  és la circulació del camp vectorial  $F = (P, Q, 0)$  al llarg de la corba  $C$ . D'altra banda, el rotacional d'aquest camp és igual a

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

i, per tant,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \langle \text{rot } F, \mathbf{k} \rangle,$$

essent  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  el vector normal al pla  $z = 0$ . Així, podem expressar la fórmula de Green de la forma

$$\int_{C^+} \langle F, T \rangle d\ell = \int_D \langle \text{rot } F, \mathbf{k} \rangle dS.$$

Podria semblar que en aquesta expressió queda encara una rèmora de les coordenades cartesianes, ja que el signe  $+$  de  $C^+$  indica que recorrem la corba en sentit antihorari, és a dir, de l'eix  $x$  a l'eix  $y$ . Observem que podem descriure aquest sentit de gir directament a partir del vector normal al pla escollit,  $\mathbf{k}$ . En efecte, el sentit antihorari és aquell que fa que, caminant sobre  $\partial D$  en la posició de  $\mathbf{k}$ , la regió  $D$  quedi a l'esquerra, (vegeu la figura 6.9).

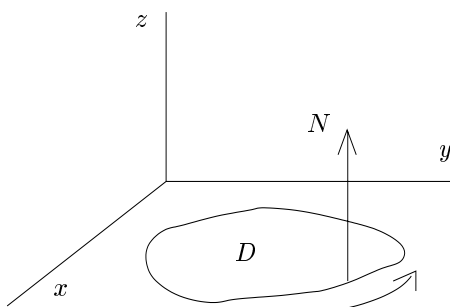


Figura 6.9: Sentit antihorari de recorregut

El teorema de Stokes estableix la validesa d'una fórmula com l'anterior sobre superfícies no necessàriament planes limitades per una corba simple. Abans d'enunciar-lo, analitzem amb una mica més de detall com són aquestes superfícies i com s'orienten les corbes que les limiten.

### **Superfícies amb vora**

La idea intuïtiva de què és una superfície limitada per una corba és clara. Per exemple, un disc està limitat per una circumferència, com també ho està un casquet esfèric obtingut pel

tall d'una esfera amb un pla, i la superfície del paraboloides  $z = x^2 + y^2$ , amb  $x + y \leq 2$ , està limitada per una el·lipse (vegeu la figura ??).

En lloc de donar una definició general i abstracta de superfície amb vora, ens limitarem a considerar dues situacions en les quals es presenten aquestes superfícies, i que són suficients per a les necessitats d'aquest llibre.

1. *Superfícies amb vora paramètriques.* Donada una parametrització d'una superfície,  $\varphi : U \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ , on  $U$  és un obert del pla, la imatge d'una regió elemental  $D \subseteq U$  per  $\varphi$ ,  $\varphi(D)$ , és una superfície amb vora, limitada per la corba  $\varphi(\partial D)$ .

Per exemple, si parametritzem el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  segons

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \quad 0 < u < \infty, \quad 0 < v < 2\pi,$$

i prenem  $D = \{(u, v) / 1 \leq u \leq 2, \pi/2 \leq v \leq \pi\}$ , aleshores  $\varphi(D)$  és la regió del paraboloides compresa entre els meridians  $u = 1, 2$ , i els paral·lels  $v = \pi/2, \pi$ , (vegeu la figura 6.10).

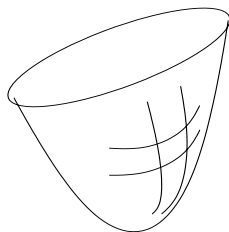


Figura 6.10: Regió elemental d'un paraboloides

2. *Superfícies amb vora definides implícitament.* Sigui ara  $S$  una superfície definida implícitament per una equació,

$$f(x, y, z) = 0,$$

i sigui  $g(x, y, z)$  una funció. Aleshores, el sistema

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ g(x, y, z) &\leq 0, \end{aligned}$$

defineix una superfície amb vora sempre que les equacions

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ g(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

defineixin una corba (recordem que, per tal que això passi, és suficient que  $\nabla f \wedge \nabla g \neq 0$ , en els punts solució del sistema), que és la corba que limita la superfície.

Per exemple, el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x &\leq y, \end{aligned}$$

defineix un casquet esfèric, limitat per la corba  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = y$ .

### Orientació de la vora

Sigui  $S$  una superfície limitada per una corba  $C$ . Suposem que  $S$  està orientada per un camp normal  $N$ . Anomenarem *orientació compatible de  $C$  amb  $N$* , i la notarem  $C^+$ , aquella que correspon a recórrer  $C$  de manera que, situant-nos segons el vector normal  $N$  sobre  $C$ , la superfície  $S$  queda a l'esquerra. Equivalentment, el sentit de recorregut està determinat per  $N$  i la regla de la mà dreta (vegeu la figura 6.11).

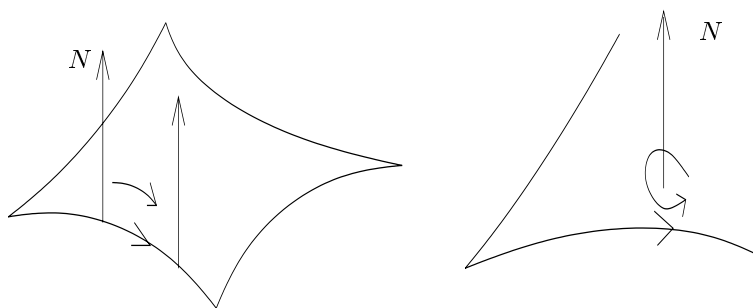


Figura 6.11: Orientació de la vora

#### 6.2.1 Exemples

1. Sigui  $S$  el casquet esfèric definit per  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  i  $z \geq 0$ , orientat pel camp normal exterior, és a dir, per  $N = (x, y, z)$ . Aleshores, el sentit de recorregut de la circumferència  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z = 0$ , és el sentit “antihorari”, (vegeu la figura 6.12).

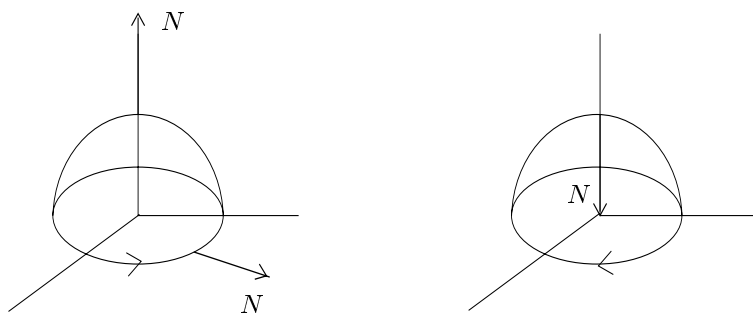


Figura 6.12: Diferents orientacions d'un casquet esfèric

Observem que si prenem com a camp normal el camp  $(-x, -y, -z)$ , que és el camp que assenyala cap a l'interior de l'esfera, aleshores el sentit de recorregut de  $C$  compatible amb aquesta elecció és el sentit “horari”.

2. En general, si la superfície  $S$  està definida per

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ g(x, y, z) &\leq 0, \end{aligned}$$

i orientada pel camp normal  $N = \nabla f$ , aleshores l'orientació compatible de la vora  $C = \partial D$  està determinada pel camp tangent

$$\nabla f \wedge \nabla g.$$

Comprovem-ho en l'exemple anterior: en aquest cas  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $g(x, y, z) = -z$ , i la superfície està orientada pel camp  $N = \frac{1}{2}\nabla f$ . Així, el camp vectorial

$$\nabla f \times \nabla g = 2(x, y, z) \times (0, 0, -1) = 2(-y, x, 0),$$

ha de donar l'orientació correcta de  $C$ , com ho és en efecte ja que en resulta el sentit antihorari de recorregut, (vegeu la figura 6.12).

Estem ara en condicions d'enunciar el teorema principal d'aquesta secció. En tot el que segueix suposarem que els camps vectorials que apareixen són derivables amb continuïtat.

**6.2.2 Teorema de Stokes** *Sigui  $S$  una superfície amb vora i  $C = \partial S$  la corba que la limita. Suposem que  $S$  està orientada pel camp normal  $N$  i sigui  $F$  un camp vectorial definit a  $S$ . Aleshores,*

$$\boxed{\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle dS = \int_{C^+} \langle F, T \rangle dl,}$$

on  $C^+$  indica que orientem la corba  $C$  de manera compatible amb  $N$ .

*Demostració.* Provarem el resultat en un cas particular, el que correspon a una superfície  $S$  definida pel gràfic d'una funció,  $z = f(x, y)$ , sobre una regió elemental del pla,  $D$ . El camp normal amb el qual orientem  $S$  serà:

$$N = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

on, com és habitual, els subíndexs indiquen derivades parcials respecte de les variables corresponents.

Si  $F = (P, Q, R)$ , la circulació de  $F$  per  $C$  és la integral de la forma diferencial  $Pdx + Qdy + Rdz$ . Però, en els punts de  $C$  es té que  $z = f(x, y)$ , per la qual cosa podem aplicar la regla de la cadena per escriure

$$dz = z_x dx + z_y dy.$$

Així, la circulació de  $F$  és igual a la integral

$$\int_C (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy,$$

i, aplicant el teorema de Green a la regió  $D$ , podem calcular aquesta integral de la forma següent:

$$\begin{aligned} \int_C (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy &= \int_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(Q + Rz_y) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rz_x) \right] dx dy \\ &= \int_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} z_x + \frac{\partial R}{\partial x} z_y + Rz_{xy} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} z_y - \frac{\partial R}{\partial y} z_x - Rz_{xy} \right] dx dy \\ &= \int_D \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (-z_x) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (-z_y) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

que és, precisament, el flux per  $S$  de  $\text{rot } F$ , és a dir, la integral

$$\int_S \langle \text{rot } F, N \rangle dS.$$

El cas general pot reduir-se al cas que hem provat si es pot descompondre  $S$  en una unió finita de regions, cadascuna de les quals és el gràfic d'una funció, cosa que podrem fer en els diferents exemples que apareguin al llarg del text, i per això no detallarem la demostració del cas general. ■

### 6.2.3 Exemples

1. En aquest exemple anem a comprovar que se satisfà el teorema de Stokes en la situació següent: considerem la superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \leq 0$ , orientada pel camp normal  $(x, y, z)$ , i  $F$  el camp vectorial  $(x, 2y, xz^2)$ .  $S$  és un casquet esfèric i l'orientació que indueix el vector normal sobre la circumferència  $y = 0$  de l'esfera correspon al sentit antihorari del pla  $x, z$ .

El rotacional de  $F$  és el camp vectorial

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 2y & xz^2 \end{vmatrix} = (0, -z^2, 0),$$

i el seu flux per  $S$  és la integral

$$\begin{aligned} \int_S \langle \text{rot } F, N \rangle dS &= \int_S \langle (0, -z^2, 0), (x, y, z) \rangle dS \\ &= - \int_S yz^2 dS. \end{aligned}$$

Si utilitzem ara coordenades esfèriques, aquesta integral és igual a

$$\begin{aligned} &- \int_{\pi}^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 v \sin u \cos^2 v dv \\ &= - \cos u \Big|_{\pi}^{2\pi} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 v \cos^2 v dv \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Calculem ara la circulació de  $F$  al llarg de la corba  $C$ . El recorregut de la circumferència  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $y = 0$ , compatible amb  $N$  és el donat per la parametrització

$$\sigma(t) = (\cos t, 0, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Així, la circulació és:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \langle F, T \rangle d\ell &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos t, 0, \cos t \sin^2 t), (-\sin t, 0, \cos t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \cos^2 t \sin^2 t) dt \\ &= \left. \frac{\cos^2 t}{2} \right|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. En la secció anterior hem vist que el teorema de Green s'aplica a regions limitades per més d'una corba simple. Anàlogament, el teorema de Stokes s'aplica també a superfícies limitades per més d'una corba. La fórmula corresponent s'escriu

$$\boxed{\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle dS = \sum_{C \subseteq \partial S} \int_{C^+} \langle F, T \rangle d\ell,}$$

on la suma s'estén a totes les corbes  $C$  que limiten  $S$ , orientades compatiblement amb la superfície  $S$ .

Per exemple, considerem la superfície cilíndrica definida per

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

que està limitada per les circumferències

$$\begin{aligned} C_0 : \quad &x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \\ C_1 : \quad &x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1. \end{aligned}$$

Orientem  $S$  pel camp normal exterior  $(x, y, 0)$ . Aleshores, per a tot camp vectorial  $F$  definit a  $S$ , el teorema de Stokes generalitzat a aquesta situació estableix la igualtat

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle dS = \int_{C_0^+} \langle F, T \rangle d\ell + \int_{C_1^+} \langle F, T \rangle d\ell,$$

on les orientacions compatibles de  $C_0$  i  $C_1$  són les indicades a la figura 6.13.

Per exemple, si  $F = (-zy, zx, z)$ , aleshores  $\operatorname{rot} F = (x, y, 2z)$ . Així, el flux de  $\operatorname{rot} F$  pel cilindre  $S$  és:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle dS &= \int_S \langle (-x, -y, 2z), (x, y, 0) \rangle dS \\ &= - \int_S (x^2 + y^2) dS = - \int_S dS = -2\pi. \end{aligned}$$

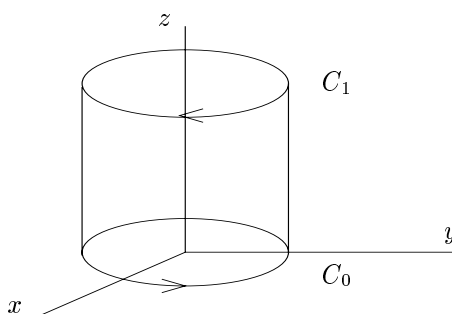


Figura 6.13: Orientació de les vores d'un cilindre

Integrem ara el camp  $F$  sobre cadascuna de les circumferències  $C_0$  i  $C_1$  utilitzant les parametritzacions

$$\begin{aligned} C_0 : \quad \sigma_0(t) &= (\cos t, \sin t, 0), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ C_1 : \quad \sigma_1(t) &= (-\cos t, \sin t, 1), & 0 \leq t \leq 2\pi, \end{aligned}$$

que són compatibles amb les orientacions induïdes per  $S$ . La circulació al llarg de  $C_0$  és

$$\int_{C_0} \langle F, T \rangle dl = \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = 0,$$

i la circulació al llarg de  $C_1$  és:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \langle F, T \rangle dl &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, -\cos t, 1), (\sin t, \cos t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_{C_0} \langle F, T_0 \rangle dl + \int_{C_1} \langle F, T_1 \rangle dl = 0 - 2\pi = -2\pi,$$

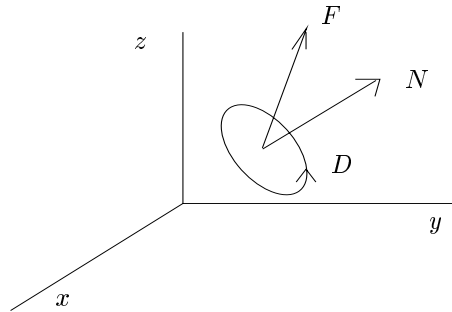
i, en definitiva, hem comprovat en aquest exemple que la suma de les circulacions de  $F$  al llarg de totes les corbes que limiten la superfície és igual al flux de  $\text{rot } F$  per  $S$ .

### **Interpretació física del rotacional**

El teorema de Stokes permet donar una interpretació del rotacional d'un camp vectorial de la qual es deriva gran part del seu interès en les aplicacions.

Sigui  $F$  un camp vectorial definit en un entorn d'un punt  $p$  i  $\text{rot } F$  el camp rotacional associat. Sigui  $N$  un vector unitari en  $p$  i considerem  $D$  un disc centrat en  $p$  que està sobre el pla ortogonal a  $N$ , (vegeu la figura 6.14).

Pel teorema de Stokes, el flux de  $\text{rot } F$  per  $D$  és igual a la circulació de  $F$  al llarg de la circumferència  $C = \partial D$ . D'altra banda, pel teorema del valor mig (vegeu el capítol 1), hi ha

Figura 6.14: Disc ortogonal al vector  $N$ 

un punt  $q \in D$  tal que el flux de  $\text{rot } F$  és igual a

$$\langle \text{rot } F(q), N \rangle A(D),$$

on  $A(D)$  és l'àrea de  $D$ . Així, es té que

$$\langle \text{rot } F(q), N \rangle A(D) = \int_C \langle F, T \rangle d\ell,$$

i, per tant, que

$$\langle \text{rot } F(q), N \rangle = \frac{1}{A(D)} \int_C \langle F, T \rangle d\ell.$$

Si fem ara tendir a zero el radi del disc  $D$ , el punt  $q$  tendirà a  $p$  i, per tant, trobem:

**6.2.4 Proposició** *Amb les notacions anteriors, se satisfà que*

$$\langle \text{rot } F(p), N \rangle = \lim_{A(D) \rightarrow 0} \frac{\int_C \langle F, T \rangle d\ell}{A(D)}.$$

És a dir, *la component de  $\text{rot } F$  en la direcció  $N$  és igual a la circulació de  $F$  per unitat d'àrea en  $p$ , en una superfície ortogonal a  $N$ .*

Observem que en el raonament anterior, el fet que  $D$  sigui un disc, no és essencial i que, per tant, podem prendre com a  $D$  qualsevol regió simplement connexa que envolti  $p$  i sigui ortogonal a  $N$ .

Per interpretar físicament la fórmula que hem obtingut, suposem que  $F$  és el camp de velocitats d'un fluid. Aleshores,  $\langle \text{rot } F, N \rangle$  expressa la turbulència de  $F$  en la direcció  $N$ . En efecte, suposem, per simplificar, que  $F = (P, Q, 0)$  és un camp pla, de manera que

$$\text{rot } F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

i prenem  $N = \mathbf{k}$ . Colloquem una petita circumferència  $C$  en un punt del fluid i analitzem com es desplaça al llarg de la línia de corrent, (vegeu la figura 6.15).

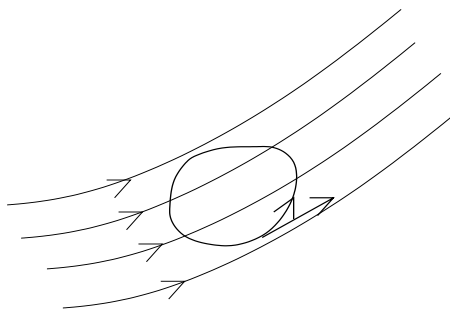


Figura 6.15: Interpretació del rotacional

Si  $F$  té component tangencial no nul·la, és a dir, la circulació de  $F$  per  $C$  és diferent de zero, aleshores de 6.2.4 se segueix que  $\langle \text{rot } F, N \rangle \neq 0$ . És a dir, si al desplaçar-nos per una línia de corrent el camp de velocitats  $F$  fa girar la corba  $C$ , i provoca una turbulència, aleshores  $\text{rot } F \neq 0$ .

La direcció

$$\frac{\text{rot } F}{\|\text{rot } F\|}$$

és la direcció en la qual la turbulència és màxima. A aquest vector se l'anomena el *vector vorticitat* de  $F$ .

### 6.2.5 Exemples

1. És important assenyalar que la turbulència a la qual ens referim al considerar el rotacional d'un camp vectorial és infinitesimal. És a dir, el rotacional d'un camp mesura la rotació infinitesimal a l'entorn d'un punt. Els dos exemples següents precisen aquest comentari.

Considerem els camps vectorials plans

$$F = (-y, x), \quad G = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

el segon dels quals no està definit a l'origen. Ambdós camps vectorials tenen línies de flux formades per circumferències centrades a l'origen, (vegeu la figura 6.16).

És a dir, en ambdós casos les trajectòries giren al voltant de l'origen. Ara bé, es té que

$$\text{rot } F = (0, 0, 2), \quad \text{i} \quad \text{rot } G = (0, 0, 0),$$

és a dir, mentre que  $F$  és un camp amb turbulència, no ho és  $G$ . Aquesta turbulència es pot il·lustrar col·locant una petita turbina en un punt del pla, (vegeu la figura 6.17). Seguint les línies de flux de  $F$  la turbina girarà sobre si mateixa (hi ha turbulència), mentre que no ho farà sota l'acció de  $G$ .

2. Observem que la fórmula de la proposició anterior expressa  $\text{rot } F$ , en la direcció  $N$ , com a límit d'un quocient en el qual no hi ha cap tipus de coordenades prefixat. De fet, es pot usar

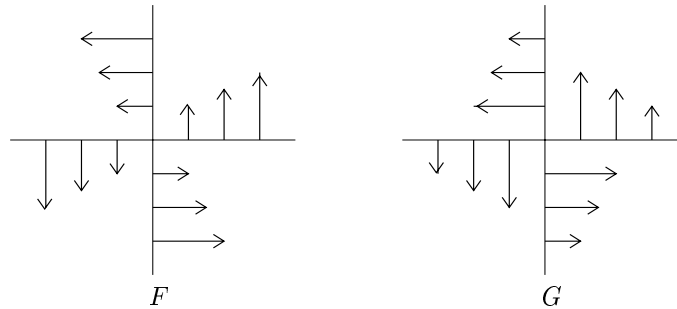


Figura 6.16: Camps amb rotacional nul i no nul

aquesta interpretació del rotacional per calcular  $\text{rot } F$  en sistemes de coordenades diferents al de les coordenades cartesianes. Això ho farem a la secció 6.4.

Avançant-nos a 6.4, comprovem com es pot deduir la fórmula amb què hem definit  $\text{rot } F$  a partir de 6.2.4. Calcularem la tercera component de  $\text{rot } F$ , les altres dues es calculen de forma similar.

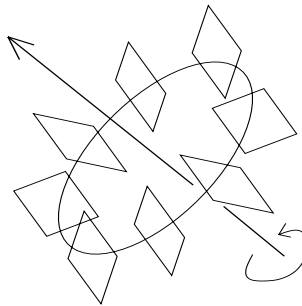


Figura 6.17: Turbina per detectar el rotacional

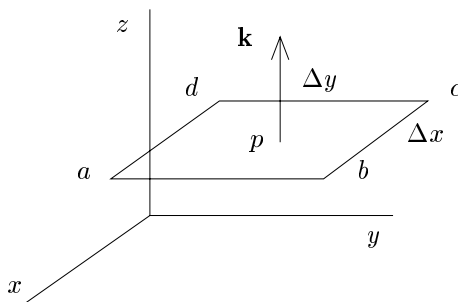
Prenem  $N = (0, 0, 1)$  i  $D$  un rectangle ortogonal a aquest vector centrat en un punt  $p$  i de costats  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , (vegeu la figura 6.18).

La vora de  $D$  està formada per quatre segments,  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{ad}$ , per la qual cosa la circulació d'un camp vectorial  $F = (P, Q, R)$  al llarg d'aquesta vora és igual a

$$\int_{\overline{ab}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{bc}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{cd}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{ad}} \langle F, T \rangle dl.$$

Podem calcular, de forma aproximada, cadascuna d'aquestes integrals usant el teorema del valor mig: en efecte, si  $p = (x, y, z)$ , el segment  $\overline{ab}$  és el segment donat per

$$\sigma(t) = \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t, z\right), \quad -\frac{\Delta y}{2} \leq t \leq \frac{\Delta y}{2},$$

Figura 6.18: Rectangle ortogonal a  $\mathbf{k}$ 

i, per tant,

$$\begin{aligned} \int_{ab} \langle F, T \rangle dl &= \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} Q\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t, z\right) dt \\ &= Q\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + t_0, z\right) \Delta y \\ &= \left(Q(x, y + t_0, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y + t_0, z) \Delta x\right) \Delta y. \end{aligned}$$

En la darrera igualtat hem utilitzat el teorema del valor mig del càlcul diferencial.

Raonant anàlogament amb els altres segments que formen la vora de  $D$  trobaríem les igualtats següents:

$$\begin{aligned} \int_{bc} \langle F, T \rangle dl &= -\left(P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x, \\ \int_{cd} \langle F, T \rangle dl &= -\left(Q - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y, \\ \int_{da} \langle F, T \rangle dl &= \left(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x, \end{aligned}$$

on cadascuna de les funcions que apareixen estan avaluades en un punt indeterminat del segment corresponent. Sumant ara la contribució dels quatre segments del perímetre de  $D$  en resulta

$$\int_{\partial D} \langle F, T \rangle dl = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y.$$

Així, la tercera component de  $\text{rot } F$  en  $p$  és igual a

$$\begin{aligned} \langle \text{rot } F, \mathbf{k} \rangle &= \lim_{A(D) \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial D} \langle F, T \rangle dl}{A(D)} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}$$

on aquestes derivades estan avaluades a  $p$ .

### Camps conservatius

Una de les aplicacions més importants del teorema de Stokes és la caracterització dels camps conservatius com aquells camps vectorials que són irrotacionals, sempre que se satisfacin certes condicions sobre la geometria de les regions on estan definits.

Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  un obert de l'espai. Direm que  $U$  és  *simplement connex*  si tota corba tancada  $C$  de  $U$  és la vora d'una superfície  $S \subseteq U$ , tota inclosa també a  $U$ . Per exemple, una bola, un cub de  $\mathbb{R}^3$ , o tot l'espai, són oberts simplement connexos, com també ho són els conjunts obtinguts a partir d'aquests traient un nombre finit de punts. Podem ara enunciar la caracterització dels camps conservatius que busquem.

**6.2.6 Teorema**  *Sigui  $F$  un camp vectorial definit a un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  que és simplement connex. Aleshores  $F$  és conservatiu a  $U$  si i només si  $\text{rot } F = 0$  a  $U$ .*

*Demostració.* Si  $F$  és conservatiu, aleshores  $F$  prové de potencial,  $F = \nabla f$ , i, per tant,  $\text{rot } F = \text{rot } \nabla f = 0$ .

Recíprocament, suposem que  $\text{rot } F = 0$  i provem que  $F$  és un camp conservatiu, és a dir, que la circulació de  $F$  per tota trajectòria tancada de  $U$  és zero. Com que  $U$  és simplement connex, si  $C$  és una corba tancada de  $U$ , hi ha una superfície  $S \subseteq U$  tal que  $C$  és la seva vora. Així, pel teorema de Stokes i la hipòtesi efectuada sobre  $F$ ,  $\text{rot } F = 0$ , resulta que

$$\int_C \langle F, T \rangle dl = \int_S \langle \text{rot } F, N \rangle dS = 0,$$

com volíem provar. ■

Aquest resultat completa la caracterització dels camps conservatius iniciada a 5.5.8. En definitiva, resumint 5.5.8 i 6.2.6, s'obté la caracterització següent:

**6.2.7 Teorema**  *Sigui  $U$  un domini obert simplement connex de  $\mathbb{R}^3$  i  $F$  un camp vectorial definit a  $U$ . Són equivalents:*

1.  $F$  és conservatiu.
2. La circulació de  $F$  per una corba tancada qualsevol de  $U$  és zero.
3.  $F$  prové de potencial,  $F = \nabla f$ .
4.  $\text{rot } F = 0$ . ■

### 6.2.8 Exemples

1. El camp vectorial  $F = (x^2, 2yz, y^2)$  és conservatiu a  $\mathbb{R}^3$  ja que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Una funció potencial està donada per

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x t^2 dt - \int_0^y 2zt dt + 0 + \int_0^z y^2 dt \\ &= \frac{x^3}{3} + y^2 z. \end{aligned}$$

2. El camp vectorial

$$F = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right),$$

està definit a tot l'espai llevat de l'eix  $z$ , és a dir, a  $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) / x = y = 0\}$ . Aquesta regió *no* és simplement connexa ja que, per exemple, no pot contenir cap superfície limitada per la circumferència  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ . Així, tot i que  $F$  és un camp irrotacional,  $\operatorname{rot} F = 0$ , no podem aplicar el resultat anterior i deduir que  $F$  és conservatiu a  $U$ . De fet,  $F$  no és conservatiu en aquest obert: en efecte, si calculem la circulació de  $F$  per la circumferència

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

trobem:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle F, T \rangle d\ell &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \end{aligned}$$

que és diferent de zero, per la qual cosa  $F$  no és conservatiu, 6.2.7.

3. Considerem ara el camp vectorial

$$G = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0 \right),$$

que està definit en el mateix recinte que el camp vectorial anterior, és a dir, a tot arreu llevat de l'eix  $z$ . Es comprova fàcilment que  $\operatorname{rot} G = 0$  i es planteja, com abans, la qüestió de si  $G$  és o no és conservatiu.

Integrant  $G$  al llarg de la circumferència  $\sigma$  trobem que

$$\int_{\sigma} \langle G, T \rangle d\ell = \int_0^{2\pi} \langle (\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = 0,$$

cosa que és compatible amb què  $G$  sigui conservatiu, però ho és realment? El teorema de Stokes ens permet completar el raonament de la forma següent: sigui  $\gamma$  una altra trajectòria tancada de  $U$ . Si  $\gamma$  no envolta l'eix  $z$ , aleshores serà la vora d'una superfície  $S \subseteq U$  i, per aplicació del teorema de Stokes, la circulació de  $G$  al llarg de  $\gamma$  serà zero. Si, en canvi,  $\gamma$  envolta una vegada l'eix  $z$ , podem considerar una superfície cilíndrica  $S$  que connecti  $\sigma$  amb  $\gamma$ , (vegeu la figura 6.19), i aplicant el teorema de Stokes a aquesta superfície es té que

$$\int_{\sigma} \langle G, T \rangle d\ell - \int_{\gamma} \langle G, T \rangle d\ell = \int_S \langle \operatorname{rot} G, N \rangle dS = 0,$$

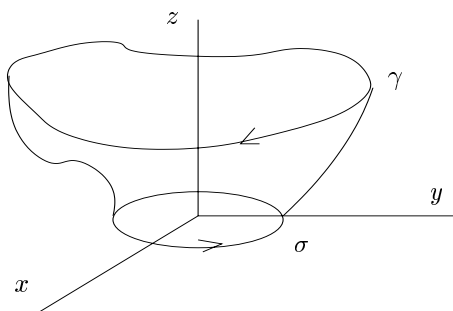


Figura 6.19: Connexió de  $\sigma$  i  $\gamma$  a través d'un cilindre

és a dir, que la circulació de  $G$  per  $\gamma$  és la mateixa que la circulació per  $\sigma$ , que és zero.

En definitiva, la circulació de  $G$  per qualsevol corba tancada de  $U$  és zero i, per tant,  $G$  és un camp conservatiu a  $U$ . De fet, és immediat comprovar que  $G$  és el gradient de la funció

$$g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2),$$

definida a  $U$ .

**6.2.9 Observació** A l'exemple 2 hem vist un camp vectorial que no és conservatiu a  $U$ , tot i que és irrotacional. Si  $W$  és una subregió simplement connexa de  $U$ , per exemple, si  $W$  és el semiespai  $y > 0$ , aleshores com que  $\operatorname{rot} F = 0$  a  $W$ , i d'acord amb el teorema 6.2.7, el camp  $F$  és conservatiu a  $W$ , és a dir, hi ha una funció  $f$  definida en aquesta regió  $W$  tal que  $F = \nabla f$ . De fet, per a  $y > 0$  es té que

$$F = \nabla \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

on  $\operatorname{arctg}$  és una determinació de l'arctangent entre 0 i  $\pi$ . Observeu, però, que aquesta funció no està ben definida a tot l'obert  $U$  i que, per tant, la igualtat anterior no és certa a tot  $U$ .

## 6.3 El teorema de la divergència de Gauss. Camps solenoïdals

En aquesta secció presentem el darrer dels teoremes integrals del càlcul vectorial, l'anomenat teorema de Gauss, de Gauss-Ostrogradsky o de la divergència, que relaciona una integral de volum amb una integral de superfície.

**6.3.1 Teorema de la divergència** *Sigui  $W$  una regió elemental de l'espai i  $S = \partial W$  la superfície tancada que l'envolta. Sigui  $F$  un camp vectorial definit a  $W$ . Aleshores,*

$$\int_W \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{S^+} \langle F, N \rangle dS,$$

on  $S$  està orientada pel camp normal sortint.

*Demostració.* Com hem fet en els altres teoremes integrals, demostrarem el teorema en una situació particular, que ilustra suficientment els elements que intervenen en la seva prova. Notem  $F = (P, Q, R)$ . El resultat és cert si ho és cadascuna de les tres igualtats següents:

$$\begin{aligned} \int_W \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \int_S \langle P \mathbf{i}, N \rangle dS, \\ \int_W \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \int_S \langle Q \mathbf{j}, N \rangle dS, \\ \int_W \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \int_S \langle R \mathbf{k}, N \rangle dS. \end{aligned}$$

Suposem que  $W$  admet una presentació de la forma

$$W : (x, y) \in D, \quad \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y),$$

on  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  és una regió elemental del pla i  $\varphi$  i  $\psi$  són dues funcions definides a  $D$ , (vegeu la figura 6.20). Provem, en aquesta situació, la tercera de les igualtats anteriors.

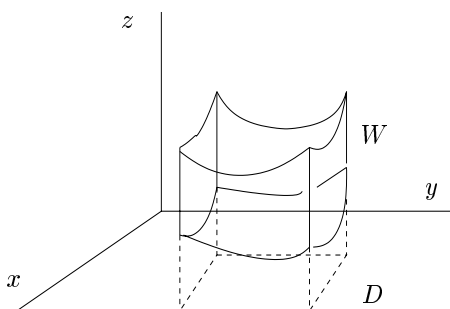


Figura 6.20: Una regió de la demostració del teorema de Gauss

La superfície que envolta  $W$  és un cilindre sobre  $D$  que està format per les tres superfícies següents:  $S_1$ , la cara inferior, d'equació  $z = \varphi(x, y)$ ;  $S_2$ , la cara superior, d'equació  $z = \psi(x, y)$ ; i la superfície cilíndrica lateral  $S_3$ .

Pel teorema de Fubini es té que

$$\int_W \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_D (R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))) dx dy.$$

D'altra banda, els camps normals exteriors a  $S_1$  i  $S_2$  són, respectivament,

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -(-\varphi_x, -\varphi_y, 1), \\ N_\psi &= (-\psi_x, -\psi_y, 1), \end{aligned}$$

mentre que el vector normal a  $S_3$  és paral·lel al pla  $x, y$  i, per tant, ortogonal a  $\mathbf{k}$ . Així, es té que

$$\begin{aligned} \int_{\partial W} \langle R\mathbf{k}, N \rangle dS &= \int_{S_1} \langle R\mathbf{k}, N \rangle dS + \int_{S_2} \langle R\mathbf{k}, N \rangle dS \\ &+ \int_{S_3} \langle R\mathbf{k}, N \rangle dS \\ &= - \int_D R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy + \int_D R(x, y, \psi(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

que coincideix amb el càlcul anterior.

Les altres dues fórmules es raonen de forma similar per a regions compreses entre gràfics de funcions de  $y, z$  i de  $x, z$ , respectivament. Aquests casos són suficients ja que, en els exemples que trobarem a la pràctica, sempre és possible subdividir una regió en un nombre finit de subregions en les quals podem aplicar el raonament anterior. ■

### 6.3.2 Exemples

1. Comprovem el teorema de la divergència en un exemple. Sigui  $W$  la bola de radi  $R$  centrada a l'origen i  $S$  l'esfera del mateix radi. Prenem  $F = (x, -y, z)$ . Aleshores podem calcular el flux sortint de  $F$  a través de  $S$  utilitzant coordenades esfèriques:

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, N \rangle dS &= \int_S \langle (x, -y, z), \frac{1}{R}(x, y, z) \rangle dS \\ &= \frac{1}{R} \int_S (x^2 - y^2 + z^2) dS \\ &= \frac{1}{R} \int_S z^2 dS \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos v \sin^2 v dv = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

D'altra banda, integrant la divergència de  $F$  sobre  $W$  trobem el mateix valor:

$$\int_W \operatorname{div} F dx dy dz = \int_W dx dy dz = \operatorname{vol}(W) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. *Càlcul d'un flux per una superfície oberta.* De vegades és convenient utilitzar el teorema de Gauss per calcular integrals de camps vectorials sobre superfícies obertes. Il·lustrem-ho amb un exemple: ens proposem calcular el flux sortint del camp  $F = (x, 0, z^2)$  a través del cilindre  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , que denotarem per  $S$ .

La superfície cilíndrica  $S$  que estem considerant no tanca cap volum, però si afegim *les tapes*  $S_0$ , (el disc  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ) i  $S_1$ , (el disc  $z = 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ), aleshores la superfície formada per  $S, S_0$  i  $S_1$  tanca el volum  $W$  definit per

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Denotem per  $N, N_0$  i  $N_1$  els vectors normals a  $S, S_0$  i  $S_1$ , respectivament. El teorema de la divergència dóna la igualtat

$$\int_W \operatorname{div} F dx dy dz = \int_S \langle F, N \rangle dS + \int_{S_0} \langle F, N_0 \rangle dS + \int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS,$$

i, per tant, el flux que hem de calcular és:

$$\int_S \langle F, N \rangle dS = \int_W \operatorname{div} F dx dy dz - \int_{S_0} \langle F, N_0 \rangle dS - \int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS.$$

Calculem cadascuna d'aquestes integrals per separat. El terme subintegral de la integral de volum és  $\operatorname{div} F = 1 + 2z$  i, per tant, calculant amb coordenades cilíndriques trobem:

$$\int_W \operatorname{div} F dx dy dz = \int_W (1 + 2z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 (1 + 2z) dz = \pi + \pi = 2\pi.$$

El vector normal exterior a  $S_0$  és el vector  $N_0 = (0, 0, -1)$  i, per tant,

$$\int_{S_0} \langle F, N_0 \rangle dS = - \int_{S_0} z^2 dS = 0,$$

ja que  $z = 0$  a  $S_0$ . Finalment, el flux sortint per  $S_1$  és:

$$\int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS = + \int_{S_1} z^2 dS = \pi,$$

ja que  $z = 1$  a  $S_1$ . En definitiva, el flux per  $S$  és igual a  $2\pi - 0 - \pi = \pi$ .

Observem que aquest valor coincideix, lògicament, amb el que resulta del càlcul directe del flux de  $F$  per  $S$ : parametrizem  $S$  segons  $\varphi(\theta, u) = (\cos \theta, \sin \theta, u)$ , i en resulta:

$$\int_S \langle F, N \rangle dS = \int_S x^2 dS = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 du = \pi.$$

3. El teorema de la divergència s'aplica, també, a volums limitats per més d'una superfície, com per exemple una corona esfèrica,  $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ .

En aquest cas, si denotem per  $S_a$  i  $S_b$  les esferes de radis  $a$  i  $b$ , respectivament, i per  $N_a, N_b$  els vectors normals sortint de  $W$ , el teorema estableix la igualtat

$$\int_W \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{S_a} \langle F, N_a \rangle dS + \int_{S_b} \langle F, N_b \rangle dS.$$

Observem que  $N_a$  assenyalava cap al centre de l'esfera  $S_a$ .

4. Les superfícies que envolten el volum  $W$  al qual apliquem el teorema de la divergència poden estar formades per diverses superfícies articulades al llarg de diferents corbes, com ha estat el cas de l'exemple 2. Hi ha situacions que apareixen a la pràctica i que no estan cobertes per aquests casos, com per exemple, el volum limitat per la superfície d'un con, que és una superfície singular, ja que en el vèrtex no hi ha definit l'espai tangent. Ens limitarem a assenyalat que el teorema de la divergència s'aplica, també, en aquesta situació. Comprovem-ho en un exemple: considerem el volum cònic donat per

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

i el camp vectorial  $F = (x, yz, z)$ . La divergència de  $F$  és  $2 + z$ , per la qual cosa, calculant amb coordenades cilíndriques, la integral de volum és:

$$\begin{aligned} \int_W (2 + z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 (2 + z) dz \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left[ 2z + \frac{z^2}{2} \right]_r^1 \\ &= 2\pi \int_0^1 r \left( 2 + \frac{1}{2} - 2r - \frac{r^2}{2} \right) dr \\ &= 2\pi \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{11}{12} \pi. \end{aligned}$$

La superfície que envolta  $W$  està formada pel disc  $S'$  d'equacions  $z = 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , i per la superfície cònica  $S$ , d'equacions  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , amb camps normals exteriors  $N' = (0, 0, 1)$  i  $N = (x, y, -z)$ , respectivament. Si parametrizem  $S$  per

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 2\pi,$$

de manera que

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-u \cos v, -u \sin v, u),$$

i tenim present que aquest camp normal és *entrant* al con, el flux sortint de  $F$  és:

$$\begin{aligned} \int_{S'} \langle F, N' \rangle dS + \int_S \langle F, N \rangle dS &= \int_{S'} z dS - \int_S \langle F, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle dudv \\ &= \int_{S'} dS - \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (-u^2 \cos^2 v - u^3 \sin^2 v + u^2) dudv \\ &= \pi - \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{3} \cos^2 v - \frac{1}{4} \sin^2 v + \frac{1}{3} \right) dv \\ &= \pi + \frac{7}{12} \pi - \frac{2}{3} \pi \\ &= \frac{11}{12} \pi. \end{aligned}$$

### **Volum d'una regió com una integral de superfície**

De forma anàloga a com el teorema de Green ens ha permès expressar l'àrea d'una regió del pla a través d'una integral de línia, el teorema de Gauss permet expressar el volum d'una regió acotada a través d'un flux. En efecte, si  $W$  és una regió de l'espai limitada per una superfície  $S$ , el seu volum és

$$\text{vol}(W) = \frac{1}{3} \int_S \langle (x, y, z), N \rangle dS.$$

En efecte, això és conseqüència immediata del teorema de la divergència:

$$\begin{aligned} \int_S \langle (x, y, z), N \rangle dS &= \int_W \text{div}(x, y, z) dx dy dz \\ &= 3 \int_W dx dy dz = 3 \text{vol}(W). \end{aligned}$$

### **Interpretació física de la divergència**

El teorema de Gauss permet donar una interpretació física de la divergència d'un camp vectorial que resulta de gran interès: sigui  $F$  un camp vectorial definit en un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  i  $p \in U$ , un punt d'aquest obert. Notem  $B_\varepsilon(p)$  la bola de radi  $\varepsilon$  centrada a  $p$ , que per a  $\varepsilon$  prou petit està inclosa a  $U$ , i sigui  $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon(p)$  l'esfera que l'envolta.

**6.3.3 Proposició** *Amb les notacions anteriors se satisfà que*

$$\text{div } F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} \langle F, N \rangle dS}{\text{vol}(B_\varepsilon(p))},$$

on  $N$  és el vector normal exterior a  $S_\varepsilon$ .

És a dir, la divergència de  $F$  en  $p$  és igual al flux sortint de  $F$  en  $p$  per unitat de volum.

Aquesta expressió de la divergència és conseqüència del teorema de la divergència de Gauss i del teorema del valor mig integral. En efecte, pel teorema de Gauss es té que

$$\int_{B_\varepsilon(p)} \text{div } F dx dy dz = \int_{S_\varepsilon} \langle F, N \rangle dS,$$

mentre que, pel teorema del valor mig, hi ha un punt  $q \in B_\varepsilon(p)$  tal que

$$\int_{B_\varepsilon(p)} \text{div } F dx dy dz = \text{div } F(q) \text{vol}(B_\varepsilon(p)).$$

Així, es té que

$$\text{div } F(q) = \frac{\int_{B_\varepsilon(p)} \text{div } F dx dy dz}{\text{vol}(B_\varepsilon(p))}.$$

Quan  $\varepsilon$  tendeix a zero, el punt  $q$  tendirà necessàriament a  $p$ , i, com que suposem que  $\operatorname{div} F$  és contínua, trobem la igualtat de l'enunciat. ■

Hem establert la fórmula anterior envoltant el punt  $p$  per una petita bola de radi  $\varepsilon$ . És clar que podríem haver utilitzat una altra mena de volums, com per exemple un cub de costat  $\varepsilon$  centrat a  $p$ , o, fins i tot, altres volums més irregulars.

Observem que segons 6.3.3 el signe de la divergència d'un camp  $F$  en un punt  $p$  és el mateix que el del flux sortint a través d'una petita superfície que envolti  $p$ . Si  $\operatorname{div} F(p) > 0$ , aleshores el flux sortint és positiu, mentre que si  $\operatorname{div} F(p) < 0$ , aleshores el flux sortint és negatiu, és a dir, és positiu el flux *entrant*. És per això que en el primer cas,  $\operatorname{div} F(p) > 0$ , es diu que  $p$  és una *font* del camp  $F$ , i en el segon,  $\operatorname{div} F(p) < 0$ , es diu que  $p$  és un *pou* del camp vectorial  $F$ . A la figura 6.21 veiem una representació dels camps plans  $F = (x, y)$  i  $G = (-x, -y)$ , que presenten una font i un pou a l'origen, respectivament.

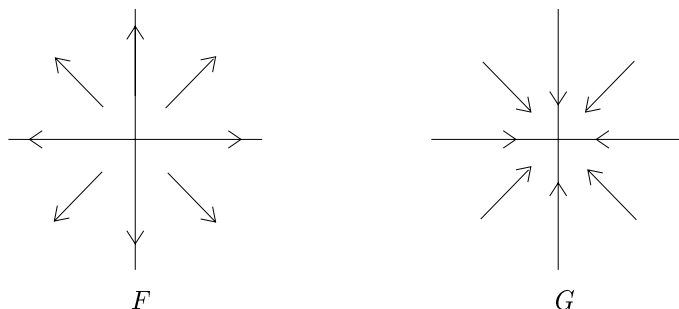


Figura 6.21: Els camps  $F$  i  $G$

Els termes *font* i *pou* descriuen molt gràficament la situació que es té per als camps  $F$  i  $G$  anteriors. No sempre és tan evident la presència de fonts i pous. Considerem, per exemple, el camp vectorial pla

$$F = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Aquest és un camp unitari definit a  $\mathbb{R}^2 - 0$ , les línies de corrent del qual són hipèrboles  $xy = cnt$ , (en efecte, observeu que si  $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$  és una línia de flux, aleshores

$$\begin{aligned} (xy)' &= (\sigma_1(t)\sigma_2(t))' = \sigma_1\sigma_2' + \sigma_1'\sigma_2 \\ &= \sigma_1 \frac{-\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \sigma_2 \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0, \end{aligned}$$

és a dir, que se satisfà que  $\sigma_1\sigma_2 = cnt$ ).

Un senzill càlcul mostra que es té

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Així,  $\operatorname{div} F$  és positiva per als punts amb  $|y| > |x|$  i negativa per als que  $|y| < |x|$ . És a dir,  $F$  té fonts en tots els punts en els quals  $|y| > |x|$  i pous en tots els punts en els quals  $|y| < |x|$ .

**6.3.4 Exemple** Anàlogament a com succeïa amb la interpretació física del rotacional, un avançatge important de l'expressió de la divergència que hem trobat respecte de la definició que havíem donat en el capítol anterior, és que la nova fórmula expressa la divergència com un quocient d'un flux per un volum, sense fer referència explícita a un sistema de coordenades determinat. Això ens permetrà, en la propera secció, trobar la divergència d'un camp vectorial en coordenades cilíndriques i esfèriques.

Com a mostra immediata de l'interès d'aquesta observació, anem a veure com 6.3.3 permet recuperar la definició de la divergència en termes de les coordenades cartesianes.

Donat un camp vectorial  $F$  definit a  $p = (x, y, z)$ , prenem un petit cub centrat a  $p$  de costats  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , (vegeu la figura 6.22).

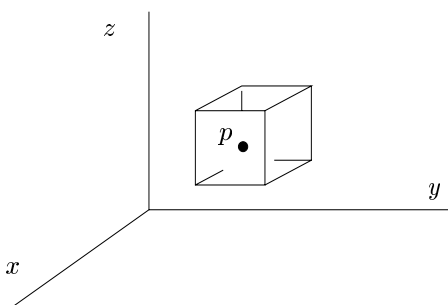


Figura 6.22: Un cub al voltant de  $p$

Si fem el teorema del valor mig, el flux de  $F$  per les cares  $x + \Delta x/2$  i  $x - \Delta x/2$  és, aproximadament, igual a

$$P\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z - P\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z,$$

i, per tant, la primera component de  $F$ ,  $P_i$ , té divergència:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_{\Sigma} \langle F, N \rangle dS}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{P\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z - P\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - P\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned}$$

Raonant de forma similar amb les altres dues components, recuperem la fórmula amb la qual hem definit la divergència,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

### Camps solenoïdals

Si  $F$  és un camp vectorial tal que hi ha un altre camp,  $G$ , amb  $F = \operatorname{rot} G$  es diu que  $F$  prové de *potencial vector*. En aquest cas, es té que

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} \operatorname{rot} G = 0.$$

És a dir, un camp vectorial que admet un potencial vector té divergència nul·la. El teorema de la divergència ens permetrà ara establir condicions suficients per tal que sigui cert el recíproc, i respondre així a la pregunta: donat un camp vectorial  $F$  tal que  $\operatorname{div} F = 0$ , admet potencial vector?

Direm que  $F$  és un *camp solenoïdal* a  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  si  $\operatorname{div} F = 0$  en tots els punts de  $U$ . El terme *solenoïdal* deriva de la paraula grega  $\sigma\omega\lambda\eta\nu$ , (tub), i s'aplica a aquesta situació perquè aquests camps satisfan el que s'anomena *la llei de conservació de la intensitat d'un tub*, que tot seguit deduïm.

Considerem un tub d'un camp solenoïdal  $F$  format per dues seccions arbitràries,  $S_1$  i  $S_2$ , entre les línies de corrent de  $F$ , (vegeu la figura 6.23).

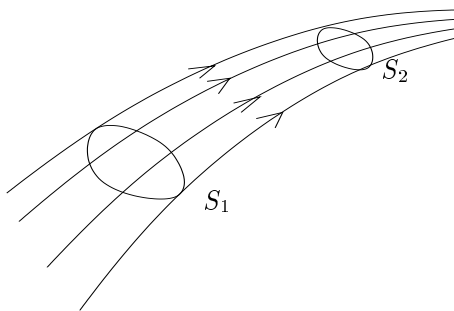


Figura 6.23: Tub de línies de flux

Com que  $F$  és solenoïdal resulta, del teorema de Gauss, que el flux sortint d'aquest tub de  $F$  és nul. Ara bé, la superfície cilíndrica lateral segueix les línies de corrent i, per tant, el flux que hi passa a través és zero. Així, en resulta que

$$\int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS = \int_{S_2} \langle F, N_2 \rangle dS,$$

on  $N_1$  i  $N_2$  són els vectors normals a  $S_1$  i  $S_2$ , respectivament, en la direcció del flux. És a dir, se satisfà:

**6.3.5 Proposició** *Sigui  $F$  un camp solenoïdal. El flux de  $F$  per una secció qualsevol d'un tub de corrent és constant.* ■

Així, si interpretem  $F$  com el camp de velocitats d'un fluid, aquest resultat estableix que la quantitat de fluid que travessa una secció del tub de flux és la mateixa per a totes les seccions del tub.

Per tal de relacionar els camps solenoïdals i els que admeten potencial vector hem d'introduir la noció de conjunt estrellat. Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  un obert de l'espai ordinari i  $p$  un punt de  $U$ . Direm que  $U$  és *estrellat respecte de  $p$*  si per a qualsevol punt  $q \in U$  el segment de l'espai que uneix  $p$  i  $q$ ,  $\overline{pq}$ , està tot inclòs a  $U$ . Per exemple, una bola o tot l'espai són conjunts estrellats respecte de l'origen i, de fet, respecte de qualsevol punt, (a la figura 6.24 es poden veure alguns conjunts estrellats).



Figura 6.24: Conjunts estrellats

**6.3.6 Teorema** *Sigui  $U$  un obert estrellat respecte de  $p$  i  $F$  un camp vectorial definit a  $U$ . Són equivalents:*

1.  $F$  admet un potencial vector,  $F = \text{rot } G$ .
2. El flux de  $F$  per a tota superfície tancada de  $U$  és nul.
3. Donada una corba tancada  $C$  a  $U$ , el flux de  $F$  per a qualsevol superfície  $S$  de  $U$  limitada per  $C$  és independent de la superfície, només depèn de  $C$ .
4.  $F$  és solenoïdal,  $\text{div } F = 0$ .

*Demostració.* 1)  $\implies$  2). Si  $F = \text{rot } G$  i  $S$  és una superfície tancada de  $U$ , com que el volum tancat per  $S$  també està inclòs a  $U$ , podem aplicar el teorema de la divergència i deduir

$$\int_S \langle F, N \rangle dS = \int_V \text{div } F dx dy dz = \int_V \text{div } \text{rot } G dx dy dz = 0.$$

2)  $\iff$  3). Siguin  $S_1$  i  $S_2$  dues superfícies de  $U$  amb la mateixa vora,  $C$ , (vegeu la figura 6.25).

La unió  $S = S_1 \cup S_2$  és una superfície tancada i, per hipòtesi, el flux sortint de  $F$  per  $S$  és nul. És a dir, si denotem per  $N_1$  i  $-N_2$  els vectors normals sortints de  $S_1$  i  $S_2$ , respectivament, es té que

$$\int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS + \int_{S_2} \langle F, -N_2 \rangle dS = 0,$$

o, equivalentment,

$$\int_{S_1} \langle F, N_1 \rangle dS = \int_{S_2} \langle F, N_2 \rangle dS.$$

Observem que els vectors  $N_1$  i  $N_2$  indueixen la mateixa orientació a  $C$ .

Aquest raonament és reversible i prova, també, que 3)  $\implies$  2).

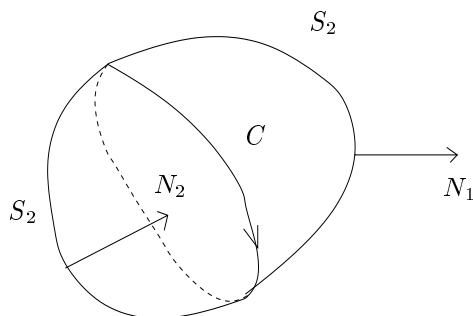


Figura 6.25: Dues superfícies amb la mateixa vora  $C$

2)  $\iff$  4). Si la divergència de  $F$  és zero, aleshores  $F$  satisfà 2), per aplicació directa del teorema de Gauss.

D'altra banda, si el flux per una superfície tancada és sempre nul, aleshores,

$$\operatorname{div} F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} \langle F, N \rangle dS}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)} = 0,$$

és a dir, se satisfà 4).

Finalment queda per veure que 4)  $\implies$  1), és a dir, que si  $\operatorname{div} F = 0$ , aleshores  $F$  admet un potencial vector,  $F = \operatorname{rot} G$ . Ho farem construint explícitament el camp  $G$ . És aquí on intervé la hipòtesi que  $U$  és un obert estrellat i, per tal de simplificar les notacions, suposarem que  $U$  és un conjunt estrellat respecte de l'origen de coordenades. Sigui  $F = (P, Q, R)$ ; com que el segment entre 0 i un punt  $(x, y, z)$  de  $U$ , (és a dir, els punts de la forma  $(tx, ty, tz)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ), està inclòs a  $U$ , el camp vectorial

$$G = \left( \int_0^1 tP(tx, ty, tz) dt, \int_0^1 tQ(tx, ty, tz) dt, \int_0^1 tR(tx, ty, tz) dt \right) \wedge (x, y, z),$$

està ben definit per a tots els punts de  $U$ . Aquest és el potencial vector buscat, és a dir,  $\operatorname{rot} G = F$ . No farem la comprovació d'aquest fet en general. A més, en l'observació que segueix veurem altres formes de calcular el potencial vector per a camps vectorials definits a tot l'espai. ■

### 6.3.7 Observació

1. Sigui  $F$  un camp vectorial que prové de potencial vector i  $G$  un d'aquests potencials,  $\text{rot } G = F$ . Donada una funció qualsevol  $f$ , el camp  $G + \nabla f$  també és un potencial vector de  $F$ :

$$\text{rot } (G + \nabla f) = \text{rot } G + \text{rot } \nabla f = F.$$

És a dir, el potencial vector d'un camp està determinat llevat de camps gradients.

Podem aprofitar aquest fet per calcular un potencial vector  $G = (X, Y, Z)$  de forma simple: en efecte, el càlcul de  $G$  a partir de  $F$  correspon a resoldre el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= P, \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= Q, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= R.\end{aligned}$$

Com que  $G$  està determinat llevat de gradients, podem suposar que  $X = 0$ . Les dues darreres equacions del sistema es transformen, aleshores, en les equacions

$$\begin{aligned}-\frac{\partial Z}{\partial x} &= Q, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= R.\end{aligned}$$

Si  $(x_0, y_0, z_0)$  és un punt de  $U$ , integrant des d'aquest punt trobem que

$$\begin{aligned}Z &= -\int_{x_0}^x Q dx + \varphi(y, z), \\ Y &= \int_{x_0}^x R dx + \psi(y, z),\end{aligned}$$

on  $\varphi$  i  $\psi$  són funcions que haurem de determinar. Per fer-ho imposem que les funcions  $Y$  i  $Z$  satisfacin la primera equació del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial y} dx - \int_{x_0}^x \frac{\partial R}{\partial z} dx - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} - \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + P(x, y, z) - P(x_0, y, z) = P(x, y, z).\end{aligned}$$

(En la tercera igualtat hem utilitzat que la divergència de  $F$  és zero.) Així, la primera equació del sistema es redueix a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = P(x_0, y, z).$$

Imposem ara que  $\psi = 0$  i, aleshores, trobem que

$$\varphi(y, z) = \int_{y_0}^y P(x_0, y, x) dy.$$

En definitiva, un potencial vector de  $F$  està donat per

$$\boxed{\begin{aligned} X &= 0, & Y &= \int_{x_0}^x R(x, y, z) dx, \\ Z &= - \int_{x_0}^x Q(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y P(x_0, y, z) dy. \end{aligned}}$$

En aquesta expressió del potencial vector, les integrals es fan al llarg de camins paral·lels als eixos, des de  $x_0$  fins a  $x$  o des de  $y_0$  fins a  $y$ , per la qual cosa la regió  $U$  on està definit el camp vectorial ha de contenir aquests camins. Així s'aplicarà, per exemple, a un cub o a tot l'espai.

2. Hem enunciat el teorema anterior per a regions estrellades de l'espai, tot i que el resultat és cert per a regions més generals, les regions  *simplement connexes i sense forats* . Ja hem esmentat anteriorment què significa que un obert  $U$  sigui simplement connex (donada una corba tancada  $C$  de  $U$  hi ha una superfície  $S$  de  $U$  limitada per  $C$ ). Direm que  $U$  és  *sense forats*  si donada una superfície tancada  $S$  de  $U$ , l'obert  $U$  conté també tot el volum limitat per  $S$ . Per exemple, si  $U$  és tot l'espai, una bola o un cub, aleshores és una regió sense forats, mentre que si  $U = \mathbb{R}^3 - 0$ , aleshores  $U$  té un forat a l'origen: l'esfera unitat  $S$  és una superfície tancada continguda a  $U$  però el volum tancat per  $S$  conté l'origen i, per tant, no està contingut a  $U$ .

**6.3.8 Exemple** El camp  $F = (2xz, z, y - z^2)$  és solenoïdal, ja que

$$\operatorname{div} F = 2z + 0 - 2z = 0,$$

i com que està definit a tot l'espai,  $F$  és un camp que prové de potencial vector. Prenent  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ , i utilitzant la formulació anterior, trobem un potencial vector:

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= \int_0^x R dx = \int_0^x (y - z^2) dx = yx - z^2x, \\ Z &= - \int_0^x Q dx + \int_0^y P(0, y, z) dy = - \int_0^x z dx = -xz. \end{aligned}$$

És a dir, trobem el camp  $G = (0, xy - xz^2, -xz)$ . Si utilitzem la fórmula que hem donat en la demostració del teorema trobem:

$$\begin{aligned} G' &= \left( \int_0^1 t \cdot 2t^2 xz dt, \int_0^1 t \cdot tz dt, \int_0^1 t \cdot (ty - t^2 z^2) dt \right) \wedge (x, y, z) \\ &= \left( \frac{xz}{2}, \frac{z}{3}, \frac{y}{3} - \frac{z^2}{4} \right) \wedge (x, y, z) \\ &= \left( \frac{z^2}{3} - \frac{y^2}{3} + \frac{yz^2}{4}, \frac{xy}{3} - \frac{3xz^2}{4}, \frac{xyz}{2} - \frac{xz}{3} \right). \end{aligned}$$

Observem que, tal com és d'esperar, la diferència  $G' - G$  és un camp conservatiu. De fet, es comprova immediatament que  $G' - G = \nabla g$ , on  $g$  és la funció

$$g(x, y, z) = \frac{xz^2}{3} - \frac{xy^2}{3} + \frac{xyz^2}{4}.$$

**6.3.9 Exemple** Considerem el camp vectorial

$$F = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

El camp  $F$  està definit a tot l'espai llevat de l'origen i en aquesta regió  $F$  és solenoïdal:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &\quad + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ara bé, com que la regió de definició de  $F$  no és un obert estrellat (ni sense forats), no podem aplicar el teorema anterior i assegurar que aquest camp admet un potencial vector. De fet,  $F$  no admet un potencial vector a tota la regió ja que, si aquest fos el cas, el flux per qualsevol superfície tancada seria nul, mentre que si calculem el flux de  $F$  per l'esfera unitat trobem que

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, N \rangle dS &= \int_S \left\langle \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right), (x, y, z) \right\rangle dS \\ &= \int_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dS \\ &= \int_S dS = 4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Aquí podríem fer una observació anàloga a la que hem fet a 6.2.9 quan hem caracteritzat els camps conservatius amb l'ajut del rotacional: el camp  $F$  d'aquest exemple és solenoïdal i, per tant, prové de potencial vector en qualsevol regió simplement connexa i sense forats. Per exemple,  $F$  prové de potencial vector en el semiespai  $z > 0$ . Aquest potencial vector no pot, però, estar ben definit a tot l'espai llevat de l'origen, ja que en aquest cas la integral anterior hauria de ser igual a zero.

**6.3.10 Exemple** *El potencial magnètic.* Si  $J$  és el camp de densitat de corrent en un volum  $W$ , hem definit el camp d'inducció magnètica a través de la integral vectorial

$$B(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz,$$

on  $\vec{r} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$ .

Com que el camp  $\vec{r}/r^3$  és conservatiu, el camp  $B$  és solenoïdal:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \operatorname{div} \left( J \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) dx dy dz \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \wedge \operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

(En el càlcul anterior hem de tenir present que derivem respecte de les variables  $x_1, y_1, z_1$ , per la qual cosa la derivada de  $J$ , que depèn de les variables  $x, y, z$  del volum  $W$ , és zero.)

L'equació  $\operatorname{div} B = 0$ , que algunes vegades s'anomena *la llei de Gauss del camp magnètic*, indica que el camp magnètic no té fonts ni pous, és a dir, que no hi ha càrregues magnètiques. El camp  $B$  prové de potencial vector; en efecte, si definim

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \frac{J}{r} dx dy dz,$$

aleshores es té que

$$\operatorname{rot} A = B.$$

## 6.4 Els operadors diferencials en coordenades ortogonals

En diverses aplicacions del càlcul vectorial és convenient disposar de les expressions dels operadors diferencials, gradient, rotacional i divergència, no solament en coordenades cartesianes sinó, també, en sistemes de coordenades adaptats al problema que s'estudia. Així, per exemple, si treballem amb un camp escalar que depèn únicament de la distància a l'origen és clar que l'ús de les coordenades esfèriques resultarà molt convenient i, en particular, ens interessarà calcular el gradient usant aquestes coordenades. Els sistemes de coordenades més importants són el de les coordenades cilíndriques i el de les coordenades esfèriques. Ambdós sistemes comparteixen el fet de ser sistemes de coordenades ortogonals, és a dir, tals que les corbes coordenades són ortogonals entre si. En aquesta secció presentem el càlcul dels operadors diferencials en sistemes de coordenades ortogonals.

### Sistemes de coordenades ortogonals

Recordem que un sistema de coordenades en un obert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  és una aplicació bijectiva  $\varphi : W \rightarrow U$ , on  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  és també un obert, que és  $\mathcal{C}^1$  i amb inversa  $\mathcal{C}^1$ . És a dir, per a tot  $(u, v, w) \in W$  hi ha un únic  $(x, y, z) \in U$  tal que

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v, w), \\ y &= \varphi_2(u, v, w), \\ z &= \varphi_3(u, v, w), \end{aligned}$$

i aquesta correspondència és derivable amb continuïtat.

**6.4.1 Definició** Amb les notacions anteriors, direm que el sistema  $\varphi$  és un sistema ortogonal de coordenades si les corbes coordenades són ortogonals dos a dos, és a dir, si se satisfan les igualtats

$$\begin{aligned}\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle &= 0, \\ \langle \varphi_u, \varphi_w \rangle &= 0, \\ \langle \varphi_v, \varphi_w \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Un sistema de coordenades  $\varphi(u, v, w)$  associa a cada punt de l'espai, de forma natural, un trièdre de vectors que formen base. En efecte, els vectors  $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w$ , que són els vectors tangents a les corbes coordenades, són linealment independents. En general, aquests vectors no són unitaris. Escriurem

$$h_1 = |\varphi_u|, \quad h_2 = |\varphi_v|, \quad h_3 = |\varphi_w|,$$

i els anomenarem *coeficients de dilatació*. Denotarem el trièdre unitari corresponent per

$$e_u = \frac{1}{h_1} \varphi_u, \quad e_v = \frac{1}{h_2} \varphi_v, \quad e_w = \frac{1}{h_3} \varphi_w.$$

Quan expressem un camp vectorial en el sistema de coordenades  $(u, v, w)$  ho farem a través de les seves components en la base  $e_u, e_v, e_w$ :

$$F = F_u e_u + F_v e_v + F_w e_w,$$

(on ara el subíndex no representa derivar respecte de la variable, sinó que és la component corresponent a aquesta variable).

### 6.4.2 Exemples

1. Considerem les coordenades cilíndriques

$$\varphi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

És un sistema ortogonal amb

$$\begin{aligned}\varphi_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ \varphi_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \\ \varphi_z &= (0, 0, 1),\end{aligned}$$

i, per tant,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  i  $h_3 = 1$ , amb la qual cosa el trièdre unitari associat és

$$\begin{aligned}e_r &= \varphi_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ e_\theta &= \frac{1}{r} \varphi_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ e_z &= \varphi_z = (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Així, per exemple, el camp vectorial  $F = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2), z^2)$  s'expressa, en el trièdre de coordenades cilíndriques, per  $F = r^3 e_r + z^2 e_z$ .

2. Les coordenades esfèriques formen també un sistema ortogonal: el sistema està determinat per

$$\varphi(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi),$$

i, per tant,

$$\begin{aligned}\varphi_r &= (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi), \\ \varphi_\theta &= (-r \sin \theta \cos \phi, r \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \varphi_\phi &= (-r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi),\end{aligned}$$

amb la qual cosa els coeficients de dilatació resulten

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \cos \phi, \quad h_3 = r,$$

i el trípode associat és:

$$\begin{aligned}e_r &= \varphi_r = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi), \\ e_\theta &= \frac{1}{r \cos \phi} \varphi_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \\ e_\phi &= \frac{1}{r} \varphi_\phi = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, \cos \phi).\end{aligned}$$

3. Tot i que les coordenades cilíndriques i les esfèriques formen els sistemes de coordenades ortogonals més utilitzats (a més, lògicament, de les coordenades cartesianes), hi ha molts altres sistemes de coordenades ortogonals d'utilitat. A títol d'exemple, considerem el sistema de coordenades *cilíndriques el·líptiques*, que és el sistema definit per les equacions

$$\begin{aligned}x &= \cos u \cosh v, \\ y &= \sin u \sinh v, \\ z &= z,\end{aligned}$$

amb  $0 < u < 2\pi$ ,  $v > 0$ , i  $-\infty < z < \infty$ . Com que són coordenades de tipus cilíndric, (amb la tercera variable,  $z$ , lliure), és suficient estudiar les corbes coordenades  $u = cnt$  i  $v = cnt$  en el pla  $z = 0$ . Si  $u = u_0$ , aleshores  $v$  descriu una hipèrbola, ja que es té que

$$\frac{x^2}{\cos^2 u_0} - \frac{y^2}{\sin^2 u_0} = \frac{\cos^2 u_0 \cosh^2 v}{\cos^2 u_0} - \frac{\sin^2 u_0 \sinh^2 v}{\sin^2 u_0} = \cosh^2 v - \sinh^2 v = 1.$$

D'altra banda, les corbes  $v = v_0$  són el·lipses:

$$\frac{x^2}{\cosh^2 v_0} + \frac{y^2}{\sinh^2 v_0} = \frac{\cos^2 u \cosh^2 v_0}{\cosh^2 v_0} + \frac{\sin^2 u \sinh^2 v_0}{\sinh^2 v_0} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

El sistema és ortogonal amb coeficients de dilatació:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\sinh^2 v + \sin^2 u}, \quad h_3 = 1.$$

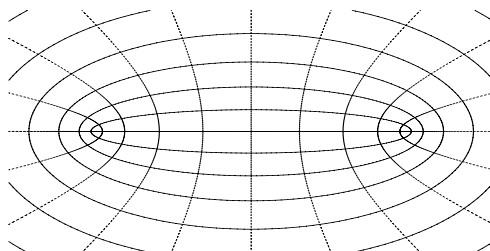


Figura 6.26: Coordenades cilíndriques el·líptiques

### Gradient en coordenades ortogonals

Sigui  $f(u, v, w)$  un camp escalar. El gradient de  $f$  s'expressarà, en les coordenades  $(u, v, w)$ , de la forma

$$\nabla f = F_u e_u + F_v e_v + F_w e_w.$$

Ens proposem calcular les components  $F_u, F_v$  i  $F_w$ .

Com que el tríedre  $e_u, e_v, e_w$  és orthonormal, la component  $F_u$  de  $\nabla f$  en  $e_u$  es calcula projectant  $\nabla f$  sobre  $e_u$ :

$$\begin{aligned} F_u &= \langle \nabla f, e_u \rangle \\ &= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u}, \end{aligned}$$

on la darrera igualtat és conseqüència de la regla de la cadena. Anàlogament, per a les altres variables trobem que

$$F_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad F_w = \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w}.$$

En definitiva, el gradient de  $f$  en coordenades ortogonals està donat per:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} e_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} e_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} e_w.$$

En particular, per a les coordenades cilíndriques trobem

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z,$$

i per a les coordenades esfèriques,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi.$$

**6.4.3 Exemple** El camp escalar  $f(r, \theta, z) = r^2\theta$  està expressat en coordenades cilíndriques. El seu gradient és

$$\nabla f = 2r\theta e_r + r e_\theta.$$

### Divergència en coordenades ortogonals

Signi  $F = F_u e_u + F_v e_v + F_w e_w$  un camp vectorial expressat en un sistema ortogonal de coordenades  $(u, v, w)$ . Per calcular la divergència de  $F$  utilitzarem la proposició 6.3.3 de manera anàloga a com ho hem fet a la secció 5.3 per a les coordenades cartesianes.

Donat un punt  $p = \varphi(u, v, w)$ , considerem un volum coordinat centrat en aquest punt i de costats  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ , (vegeu la figura 6.27), que és el volum imatge per  $\varphi$  del cub centrat a  $(u, v, w)$  i de costats  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ .

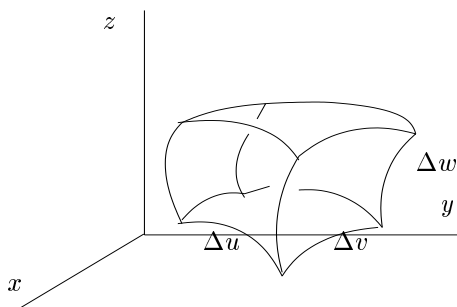


Figura 6.27: Cub curvilini al voltant de  $p$

Com que el sistema de coordenades és ortogonal, les cares d'aquest cub curvilini són ortogonals entre si i l'àrea de cadascuna és, simplement, el producte de les seves longituds. Així, l'àrea de la cara corresponent a  $u + \Delta u/2$  serà

$$h_2 \Delta v \cdot h_3 \Delta w = h_2 h_3 \Delta v \Delta w.$$

El vector normal a aquesta mateixa cara és el vector  $e_u$  i, per tant, el flux de  $F$  per aquesta cara és aproximadament igual a

$$\langle F, e_u \rangle h_2 h_3 \Delta v \Delta w = F_u(u + \frac{\Delta u}{2}, v, w) h_2 h_3 \Delta v \Delta w.$$

Raonant anàlogament per la cara  $u - \Delta u/2$  i tenint present que en aquest cas el vector normal corresponent és  $-e_u$ , obtenim que el flux corresponent és

$$-F_u(u - \frac{\Delta u}{2}, v, w) h_2 h_3 \Delta v \Delta w.$$

Així, tenint present el teorema del valor mig, podem calcular el flux sortint per aquestes dues cares de la forma:

$$F_u(u + \frac{\Delta u}{2}, v, w) h_2 h_3 \Delta v \Delta w - F_u(u - \frac{\Delta u}{2}, v, w) h_2 h_3 \Delta v \Delta w = \left( \frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} \right) \Delta u \Delta v \Delta w,$$

on la derivada està calculada en un cert punt del segment. La contribució d'aquest flux a la divergència de  $F$  és, per tant,

$$\lim_{\text{vol} \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} \right) \Delta u \Delta v \Delta w}{h_1 h_2 h_3 \Delta u \Delta v \Delta w} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_2 h_3),$$

on ara la derivada està avaluada a  $p$ . Raonant de forma anàloga per a les altres variables trobem, finalment, la fórmula de la divergència en coordenades ortogonals:

$$\boxed{\text{div } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(F_u h_2 h_3)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_1 h_3)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_1 h_2)}{\partial w} \right)}.$$

En particular, en coordenades cilíndriques trobem que

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(r F_z)}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

i, en coordenades esfèriques,

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left( \frac{\partial(r^2 \cos \phi F_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \cos \phi F_\phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial(\cos \phi F_\phi)}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

**6.4.4 Exemple** Considerem el camp vectorial donat en coordenades esfèriques per  $F = r e_r$ . Aleshores  $F$  té divergència:

$$\text{div } F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot r)}{\partial r} = 3.$$

Observem que, lògicament, el resultat d'aquest càlcul és el mateix que el que en resulta usant coordenades cartesianes. Comprovem-ho: en coordenades cartesianes,  $F$  està donat per

$$F = r e_r = r(\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi) = (x, y, z),$$

i, per tant,

$$\text{div } F = 1 + 1 + 1 = 3.$$

### ***El rotacional en coordenades ortogonals***

Partim un cop més d'un camp vectorial  $F = F_u e_u + F_v e_v + F_w e_w$  i volem calcular-ne el rotacional utilitzant la fórmula

$$\langle \text{rot } F, N \rangle = \lim_{A(D) \rightarrow 0} \frac{\int_C \langle F, T \rangle d\ell}{A(D)},$$

establerta a la proposició 6.2.4.

Com que  $\text{rot } F$  és un camp vectorial hem de trobar les seves components en una base de l'espai, en aquest cas en el tríedre  $e_u, e_v, e_w$ . Calculem la primera d'aquestes components, ja que les altres dues es fan de la mateixa forma. Escollim, per tant, la direcció  $N = e_u$  i, com a superfície  $D$ , escollim un rectangle curvilini centrat en el punt  $p$ , de costats  $\Delta v, \Delta w$ , ortogonal a  $e_u$ , (vegeu la figura 6.28).

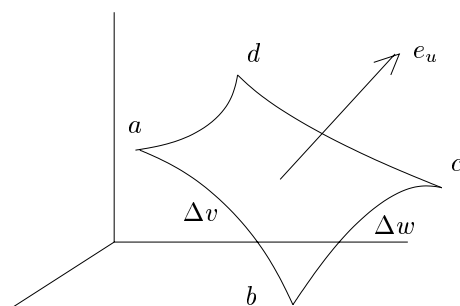


Figura 6.28: Rectangle curvilini ortogonal a  $e_u$

La circulació de  $F$  per la vora d'aquesta regió consta de quatre parts:

$$\int_{\partial D} \langle F, T \rangle dl = \int_{\overline{ab}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{bc}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{cd}} \langle F, T \rangle dl + \int_{\overline{da}} \langle F, T \rangle dl.$$

Calculem la circulació de  $F$  per  $\overline{ab}$  i per  $\overline{cd}$ : pel teorema del valor mig, aquesta integral és, aproximadament:

$$\int_{\overline{ab}} \langle F, T \rangle dl = \int_{\overline{ab}} \langle F, e_v \rangle dl = F_v(q) h_2 \Delta v,$$

on  $q$  és un punt del segment  $\overline{ab}$ , i anàlogament es té que

$$\int_{\overline{cd}} \langle F, T \rangle dl = -F_v(q') h_2 \Delta v.$$

Així, la contribució d'aquests dos segments curvilinis a la circulació de  $F$  per  $\partial D$  és:

$$(F_v(q) - F_v(q')) h_2 \Delta v = \frac{\partial}{\partial w} (F_v h_2) \Delta w \Delta v,$$

on la derivada parcial està calculada en un punt intermig, l'existència del qual es dona pel teorema del valor mig diferencial.

La contribució dels segments  $\overline{bc}$  i  $\overline{da}$  es calcula anàlogament i resulta ser

$$(F_w(q) - F_w(q')) h_3 \Delta w = \frac{\partial}{\partial v} (F_w h_3) \Delta v \Delta w.$$

En definitiva, la circulació de  $F$  per  $\partial D$  és

$$\frac{\partial}{\partial w} (h_2 F_v) \Delta v \Delta w - \frac{\partial}{\partial v} (h_3 F_w) \Delta v \Delta w,$$

i dividint per l'àrea  $h_2 h_3 \Delta v \Delta w$  i passant al límit, trobem que

$$\langle \text{rot } F, e_u \rangle = \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial v} (h_3 F_w) \right) - \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial w} (h_2 F_v) \right).$$

Tenint presents els valors de les altres coordenades, veiem que, en general, la fórmula del rotacional en coordenades ortogonals es dona pel següent determinant:

$$\text{rot } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_u & h_2 e_v & h_3 e_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

En particular, per a les coordenades cilíndriques trobem que

$$\text{rot } F = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & r F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_3}{\partial \theta} - \frac{\partial (r F_2)}{\partial z} \right) e_r + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r F_2)}{\partial r} - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) e_z,$$

i, per a les coordenades esfèriques, trobem que

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \frac{1}{r^2 \cos \phi} \begin{vmatrix} e_r & r \cos \phi e_\theta & r e_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_1 & r \cos \phi F_2 & r F_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial F_3}{\partial \theta} - \frac{\partial (F_2 \cos \phi)}{\partial \phi} \right) e_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_3)}{\partial r} \right) e_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial (r \cos \phi F_2)}{\partial r} - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) e_\phi. \end{aligned}$$

**6.4.5 Exemple** En coordenades cilíndriques, el rotacional del camp vectorial  $F = \theta e_r + r z e_z$  és  $\text{rot } F = -z e_\theta$ .

### Laplaciana en coordenades ortogonals

Un cop calculats el gradient i la divergència en coordenades ortogonals és fàcil calcular l'expressió de la laplaciana:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div } \nabla f \\ &= \text{div} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} e_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} e_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} e_w \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} h_1 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} h_1 h_2 \right) \right). \end{aligned}$$

En definitiva, trobem:

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right).$$

En particular, per a les coordenades cilíndriques trobem que

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

i per a les coordenades esfèriques trobem que

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

#### 6.4.6 Exemples

1. El càlcul de la laplaciana en coordenades esfèriques permet trobar fàcilment totes les funcions  $f(r)$  que només depenen de  $r$  i que satisfan  $\Delta f = 0$ . En efecte, la laplaciana de  $f$  és igual a

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right),$$

i imposant que  $\Delta f = 0$  trobem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 &\implies \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \\ &\implies r^2 \frac{\partial f}{\partial r} = cnt \\ &\implies \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{cnt}{r^2} \\ &\implies f(r) = \frac{a}{r} + b, \end{aligned}$$

on  $a$  i  $b$  són constants. És a dir, llevat de constants, la funció  $1/r$  és l'única funció que satisfà els requeriments imposats.

2. Anàlogament, si utilitzem coordenades cilíndriques i cerquem les funcions amb laplaciana zero i que només depenen del radi trobem

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \implies f(r) = a \ln r + b.$$

A la funció  $\ln r$  se l'anomena el *potencial logarítmic*.

## 6.5 Camps newtonians

En aquesta secció establim la llei de Gauss per als camps newtonians i derivem les equacions de Laplace i de Poisson que satisfan els potencials newtonians.

Anomenarem *camp newtonià* tot camp vectorial definit per una distribució de massa de densitat  $\rho$  segons la llei de gravitació de Newton. Un camp newtonià pot estar definit per una massa puntual o per una integral vectorial,

$$F(x_1, y_1, z_1) = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\mathcal{V},$$

on  $\vec{r} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$  i la integral s'estén a una regió “ $\mathcal{V}$ ” que pot ser una corba, una superfície o un volum, i indica aleshores  $d\mathcal{V}$  l'element de línia, de superfície o de volum. Per comoditat de l'exposició ens limitarem a tractar el cas puntual i el d'un camp creat per una distribució de massa volumètrica.

Els camps newtonians són conservatius. De fet, deriven de potencial, ja que és immediat comprovar que  $\nabla(1/r) = -\vec{r}/r^3$  i que, en el cas volumètric, si definim

$$V = \int_W \frac{\rho}{r} dx dy dz,$$

aleshores,

$$F = -\nabla V.$$

A  $V$  l'anomenarem el *potencial newtonià*, (2.6).

### La llei de Gauss

Si  $F$  és un camp newtonià, aleshores  $\text{rot } F = 0$ , ja que deriva de potencial. Respecte de la divergència de  $F$  tenim:

**6.5.1 Proposició** *Si  $F$  és un camp newtonià, aleshores  $F$  és solenoïdal fora de les masses, és a dir,  $\text{div } F = 0$  en tot punt exterior a la massa.*

*Demostració.* En el cas puntual el resultat a provar és

$$\text{div } \nabla \frac{1}{r} = \Delta \frac{1}{r} = 0,$$

resultat que ja hem comprovat a la secció anterior.

En el cas d'un volum  $W$  de densitat de massa  $\rho$ , el càlcul és similar, ja que es té que

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \int_W \rho \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1 - x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{y_1 - y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{z_1 - z}{r^3} \right) \right) dx dy dz \\ &= \int_W \rho \left( -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \right) dx dy dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Per estudiar com és la divergència de  $F$  en els punts de  $W$  resulta fonamental el resultat següent, de gran interès en les aplicacions.

**6.5.2 Teorema** [Llei de Gauss.] *Sigui  $W$  una regió elemental de l'espai i  $S = \partial W$  la superfície que l'envolta. Suposem que  $0 \notin S$  i sigui  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Aleshores,*

$$\int_S \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } 0 \in W, \\ 0, & \text{si } 0 \notin W. \end{cases}$$

*Demostració.* Com hem assenyalat en la proposició anterior, el camp  $\vec{r}/r^3$  és solenoïdal allà on està definit. Si  $0 \notin W$ , el camp està definit a tots els punts de  $W$  i, aplicant el teorema de la divergència, resulta que

$$\int_S \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS = \int_W \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz = 0.$$

D'altra banda, si  $0 \in W$ , no podem aplicar directament el teorema de Gauss. Tot i això, podem utilitzar aquest resultat per reduir la prova del teorema al cas en què  $S$  és una esfera: en efecte, sigui  $\varepsilon > 0$  un nombre real prou petit per tal que la bola de centre 0 i radi  $\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon$ , estigui tota continguda a  $W$ . Fixem les notacions següents:  $W_\varepsilon = W - B_\varepsilon$ ;  $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ , l'esfera de radi  $\varepsilon$ , (vegeu la figura 6.29).

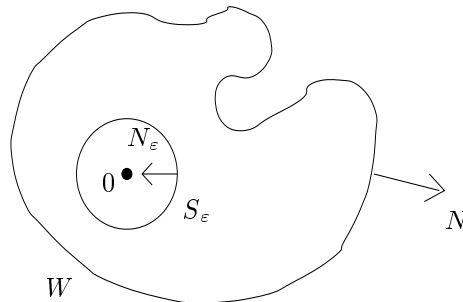


Figura 6.29: Secció del volum  $W_\varepsilon$

Per definició de  $W_\varepsilon$  es té que  $0 \notin W_\varepsilon$  i podem aplicar el teorema de la divergència per deduir que

$$\int_{\partial W_\varepsilon} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS = \int_S \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS + \int_{S_\varepsilon} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N'_\varepsilon \right\rangle dS = 0,$$

on  $N'_\varepsilon$  és el vector normal a l'esfera que surt de  $W_\varepsilon$ , és a dir, que entra a la bola  $B_\varepsilon$ . Així, si  $N_\varepsilon = -N'_\varepsilon$  és el vector normal exterior a l'esfera  $S_\varepsilon$ , la igualtat anterior implica que

$$\begin{aligned} \int_S \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS &= - \int_{S_\varepsilon} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N'_\varepsilon \right\rangle dS \\ &= \int_{S_\varepsilon} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N_\varepsilon \right\rangle dS. \end{aligned}$$

Ara el càlcul és elemental ja que sobre l'esfera de radi  $\varepsilon$  es té que  $N_\varepsilon = \vec{r}/\varepsilon$  i se satisfà que

$$\left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{r}}{\varepsilon} \right\rangle \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{r^2}{\varepsilon^4} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

i, en definitiva, el flux és

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N_\varepsilon \right\rangle dS &= \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} dS \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Àrea}(S_\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**6.5.3 Observació** Hem enunciat la llei de Gauss en els casos en què 0 està inclòs a  $W$  o és exterior a aquest volum i hem deixat de banda el cas en què 0 és un punt de la superfície  $\partial W$ . Es pot veure que, en aquest cas, el valor de la integral de la llei de Gauss és  $2\pi$ , tot i que no ho provarem, ja que és un càlcul que no utilitzarem en aquest text.

El resultat és cert, també, per a una distribució de volum:

**6.5.4 Proposició** *Sigui  $\rho$  una funció de densitat definida en un volum elemental  $W$ ,  $M$  la massa total de  $W$  i  $F$  el camp newtonià associat. Sigui  $S$  una superfície tancada amb intersecció buida amb  $W$ . Aleshores, el flux sortint de  $F$  per  $S$  és igual a  $-4\pi M$ , si  $S$  envolta  $W$ , i zero, en cas contrari.*

*Demostració.* El resultat se segueix de la llei de Gauss establerta anteriorment i de la possibilitat de canviar l'ordre d'integració en una integral múltiple:

$$\begin{aligned} \int_S \langle F, N \rangle dS &= - \int_S \int_W \left\langle \rho \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dx dy dz dS \\ &= - \int_W \rho dx dy dz \int_S \left\langle \frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dS \\ &= -4\pi \int_W \rho dx dy dz = -4\pi M. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**6.5.5 Observació** La llei de Gauss s'aplica, també, al camp elèctric. En aquest cas diu: *el flux per una superfície tancada  $S$  del camp elèctric creat per una distribució de càrrega  $\rho$  és  $4\pi$  per la càrrega total envoltada per  $S$ .*

Com a conseqüència de la llei de Gauss, deduïm ara l'equació de Poisson dels potencials newtonians volumètrics.

**6.5.6 Teorema** *Sigui  $V$  el potencial newtonià corresponent a una funció de densitat  $\rho$  definida en un volum  $W$ . Aleshores, en els punts interiors de  $W$  se satisfà:*

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

*Demostració.* Sigui  $p$  un punt interior de  $W$ . Per a tot volum  $W'$  contingut a  $W$  i que conté  $p$  en el seu interior se satisfà, segons la llei de Gauss, la igualtat

$$\int_{S'} \langle F, N \rangle dS = -4\pi M',$$

on  $M'$  és la massa de  $W'$  i  $S' = \partial W'$ . Així, pel teorema de la divergència, es té que

$$\int_{W'} \operatorname{div} F dx dy dz = -4\pi \int_{W'} \rho dx dy dz.$$

Però,  $\operatorname{div} F = \operatorname{div} \nabla V = \Delta V$  i, per tant, aquesta igualtat s'escriu de la forma

$$\int_{W'} \Delta V dx dy dz = -4\pi \int_{W'} \rho dx dy dz.$$

Com que el volum  $W'$  és arbitrari, podem concloure que se satisfà l'equació

$$\Delta V = -4\pi\rho. \quad \blacksquare$$

**6.5.7 Observació** La demostració anterior no és correcta tal com s'ha presentat. En efecte, la superfície  $S'$  que envolta el volum  $W'$  està tota continguda a  $W$  i, per tant, conté part de la distribució de massa, cas que havíem exclòs de la llei de Gauss. No obstant, hem presentat aquest raonament perquè, amb hipòtesis adequades, es pot provar que la demostració és essencialment correcta.

Així doncs, un potencial newtonià creat per una funció de densitat  $\rho$  satisfà les equacions

Laplace	$\Delta V = 0,$	a l'exterior de $W$
Poisson	$\Delta V = -4\pi\rho,$	a l'interior de $W$

## 6.6 Les fórmules de Green. Teoria del potencial

En la secció anterior hem vist que el potencial newtonià  $V$  satisfà l'equació de Laplace  $\Delta V = 0$  fora de la massa que el defineix. En general, les funcions  $f(x, y, z)$  que són  $\mathcal{C}^2$  i que satisfan l'equació

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

s'anomenen *funcions harmòniques*. En aquesta secció presentem les fórmules de Green, que són conseqüència del teorema de la divergència, i les apliquem a l'estudi de les funcions harmòniques i els problemes de contorn associats.

### Les fórmules de Green

Les dues primeres fórmules de Green són conseqüència immediata del teorema de la divergència.

**6.6.1 Teorema** [1a fórmula de Green.] *Siguin  $f, g$  dues funcions derivables amb continuïtat en un volum elemental  $W$ ; denotem per  $S$  la superfície que envolta  $W$  i per  $N$  el camp normal a  $S$  sortint de  $W$ . Se satisfà que*

$$\int_W (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) dx dy dz = \int_S f \frac{\partial g}{\partial N} dS,$$

on  $\partial g / \partial N = \langle \nabla g, N \rangle$  és la derivada direccional de  $g$  respecte de  $N$ .

*Demostració.* La fórmula de l'enunciat és conseqüència d'aplicar el teorema de la divergència al camp vectorial  $f \nabla g$  ja que, segons la regla de derivació de Leibniz, es té que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f \nabla g &= \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \operatorname{div} \nabla g \\ &= \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

En particular, si  $f$  és la funció constant igual a 1 i  $g$  és una funció harmònica, trobem:

**6.6.2 Corollari** Si  $f$  és una funció harmònica definida en un volum elemental  $W$ , aleshores

$$\int_{\partial W} \frac{\partial f}{\partial N} dS = 0. \quad \blacksquare$$

Un altre cas particular de la primera fórmula de Green que ens serà d'utilitat més endavant és aquell en el qual  $f = g$ .

**6.6.3 Corollari** Si  $f$  és una funció harmònica definida en un volum elemental  $W$ , aleshores

$$\int_{\partial W} f \frac{\partial f}{\partial N} dS = \int_W \|\nabla f\|^2 dx dy dz. \quad \blacksquare$$

La segona fórmula de Green s'obté simetritzant la primera, en el sentit que s'obté aplicant la primera fórmula al parell  $(f, g)$  i al parell  $(g, f)$  i restant les expressions corresponents.

**6.6.4 Teorema** [2a fórmula de Green.] *Amb les notacions de 6.6.1, es té que*

$$\int_W (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \int_S \left( f \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial f}{\partial N} \right) dS. \quad \blacksquare$$

**6.6.5 Corollari** Si  $f$  i  $g$  són funcions harmòniques definides en un volum elemental  $W$ , aleshores se satisfà que

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial N} dS = \int_S g \frac{\partial f}{\partial N} dS. \quad \blacksquare$$

Finalment, la tercera fórmula de Green expressa el valor d'una funció definida a  $W$  a partir dels valors de  $f$  i de  $\partial f / \partial N$  sobre  $S = \partial W$  i de  $\Delta f$ .

**6.6.6 Teorema** [3a fórmula de Green.] *Sigui  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in W - \partial W$  i  $f$  una funció  $C^2$  definida a  $W$ . Aleshores,*

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} - f \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} \right) dS + \int_W \frac{1}{r} \Delta f dx dy dz \right],$$

on  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ .

*Demostració.* Per provar la fórmula de l'enunciat integrarem la funció  $\Delta f/r$  sobre  $W$ . Com que es tracta d'una integral impròpia hem de realitzar un pas al límit,

$$\int_W \frac{1}{r} \Delta f dx dy dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{W_\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta f dx dy dz,$$

on  $W_\varepsilon = W - B_\varepsilon$ , essent  $B_\varepsilon$  una bola de radi  $\varepsilon$  centrada a  $p_0$ , tota continguda a  $W$ . Analitzem la integral sobre  $W_\varepsilon$ : la vora de  $W_\varepsilon$  està formada per dues superfícies,  $S$  i  $S_\varepsilon$ , l'esfera de radi  $\varepsilon$  que envolta  $B_\varepsilon$ . Si apliquem la segona fórmula de Green a les funcions  $1/r$  i  $f$  sobre  $W_\varepsilon$ , i tenim present que la funció  $1/r$  és harmònica, trobem la igualtat

$$\begin{aligned} \int_{W_\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta f dx dy dz &= \int_W \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} - f \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} \right) dS \\ &+ \int_{S_\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N_\varepsilon} - f \frac{\partial}{\partial N_\varepsilon} \frac{1}{r} \right) dS, \end{aligned}$$

on  $N_\varepsilon$  és el vector *interior* a  $S_\varepsilon$ .

Analitzem la integral sobre  $S_\varepsilon$ : la derivada direccional de  $1/r$  respecte de  $N_\varepsilon = -\vec{r}'/\varepsilon$  és

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N_\varepsilon} \frac{1}{r} &= \left\langle \nabla \frac{1}{r}, -\frac{\vec{r}'}{\varepsilon} \right\rangle \Big|_{r=\varepsilon} \\ &= \left\langle -\frac{\vec{r}'}{r^3}, -\frac{\vec{r}'}{\varepsilon} \right\rangle \Big|_{r=\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

i, per tant, el primer terme de la integral sobre  $S_\varepsilon$  és, en el límit,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} f \frac{\partial}{\partial N_\varepsilon} \frac{1}{r} dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} f dS \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 f(p_0) \\ &= 4\pi f(p_0). \end{aligned}$$

L'altre terme de la integral tendeix a zero ja que, com que  $\partial f/\partial N$  és contínua sobre el compacte  $S_\varepsilon$ , hi ha una constant  $K$  amb  $|\partial f/\partial N| < K$  a tots els punts de  $S_\varepsilon$  i, per tant, es té la desigualtat

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N_\varepsilon} \right| < \frac{K}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} dS = \frac{K}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi K\varepsilon,$$

que tendeix a zero amb  $\varepsilon$ . ■

Especialitzant la tercera fórmula de Green per a les funcions harmòniques, obtenim la representació integral de les funcions harmòniques:

**6.6.7 Corollari** Sigui  $f$  una funció harmònica definida en un volum elemental  $W$ . Aleshores, es té que

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial W} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} - f \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} \right) dS,$$

per a qualsevol punt  $p_0$  de l'interior de  $W$ . ■

És a dir, els valors de la funció (harmònica)  $f$  a l'interior de  $W$  queden determinats pels valors d'aquesta funció i de  $\partial f/\partial N$  sobre la frontera  $\partial W$  de  $W$ . Assenyalarem que els valors de la derivada direccional  $\partial f/\partial N$  sobre  $S$  no poden ser arbitraris ja que, segons 6.6.2, s'ha de satisfer la igualtat

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial N} dS = 0.$$

**6.6.8 Observació** La fórmula de Green que hem establert a 6.6.7 per a funcions harmòniques de tres variables és vàlida també, amb les modificacions oportunes, per a funcions de diverses variables. Per a funcions harmòniques de dues variables la fórmula de Green corresponent utilitza el potencial logarítmic,  $\ln r$ , en lloc de la funció  $1/r$ . Més concretament, si  $D$  és una regió del pla de vora  $C$ , una corba tancada, i  $f(x, y)$  és una funció harmònica a l'interior de  $D$  i contínua a  $\overline{D}$ , aleshores es té que

$$f(p_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left( \ln r \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) dl,$$

on  $n$  és el vector normal a  $C$  sortint de  $D$ .

L'estudi de les funcions harmòniques de dues variables està estretament lligat a l'estudi de les funcions de variable complexa, que no tractarem aquí.

### ***Els problemes de contorn***

Els resultats anteriors són especialment útils per establir teoremes d'unicitat per als problemes de contorn clàssics associats a l'equació de Laplace i a l'equació de Poisson. Ens centrarem en l'equació de Laplace, ja que les solucions de l'equació de Poisson s'obtenen com a suma d'una solució particular d'aquesta equació i una solució general de l'equació de Laplace. En tot el que segueix,  $W$  és un volum elemental de vora  $S = \partial W$ .

**Problema de Dirichlet.** *Donada una funció contínua  $f$  sobre  $S$ , hi ha una funció contínua  $u$  sobre tot el domini  $\overline{W}$  tal que coincideixi amb  $f$  en els punts de  $S$  i sigui harmònica a l'interior de  $W$ ? En cas afirmatiu, quantes n'hi ha?*

Indiquem l'interès d'aquest problema amb un exemple: imaginem que  $W$  és una regió de l'espai de la qual volem conèixer la distribució de temperatura  $T$ . Suposem que hem mesurat la temperatura a la superfície  $S$ , i n'ha resultat una funció  $f$ . Si el procés és estacionari (és a dir, que no varia amb el temps) la temperatura a  $W$  ha de satisfer l'equació de Laplace a l'interior de la regió (vegeu la secció 6.8) i, per tant, ha de ser solució del problema de Dirichlet associat a la mesura  $f$ . En un cas com aquest, l'existència de la solució està determinada per la física del problema, (alguna distribució de temperatures hi haurà a  $W$ ), i la part que esdevé més important és saber si la mesura  $f$  efectuada a  $S$  determina unívocament la solució, és a dir, la qüestió és saber si hi ha una única solució a l'equació de Laplace tal que sobre  $S$  coincideix amb  $f$ .

Com en l'exemple que hem assenyalat, sovint l'existència de solucions al problema de Dirichlet està assegurada per les condicions físiques del problema, (des del punt de vista matemàtic, els

teoremes d'existència estan fora de l'abast d'aquest curs). La unicitat resulta de les fórmules de Green, com tot seguit comprovem.

**6.6.9 Teorema** *Sigui  $W$  un volum elemental connex i  $f$  una funció contínua a  $S$ . Si el problema de Dirichlet per a  $f$  a  $W$  té solució, aleshores la solució és única.*

*Demostració.* Suposem que hi ha dues solucions  $u$  i  $v$  al problema de Dirichlet per a  $f$  a  $W$ . Això vol dir que se satisfà

$$u|_S = f = v|_S,$$

i que les dues funcions són harmòniques a l'interior de  $W$ . Així, la diferència  $w = u - v$  satisfà les igualtats

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u - \Delta v = 0, \\ w|_S &= u|_S - v|_S = f - f = 0,\end{aligned}$$

és a dir,  $w$  és una solució al problema de Dirichlet per a la funció constant igual a 0. Com que  $w$  és harmònica, se satisfà que

$$\int_W \|\nabla w\|^2 dx dy dz = 0,$$

segons 6.6.3 i, com que  $\|\nabla w\|^2$  és una funció contínua i positiva, en resulta que

$$\|\nabla w\| = 0.$$

És a dir, com que  $W$  és connex, la funció  $w$  és una funció constant. Però, sobre  $S$  és igual a zero, per la qual cosa, en definitiva,  $w = 0$ , o, equivalentment,  $u = v$ . ■

**6.6.10 Exemple** Una aplicació immediata de la unicitat de la solució del problema de Dirichlet és que el camp elèctric a l'interior d'una esfera buida  $S$  carregada uniformement és zero.

En efecte, com que a l'interior de l'esfera no hi ha càrrega, el potencial elèctric  $V$  satisfà l'equació de Laplace en aquests punts, és a dir, és una funció harmònica. Considerem una esfera  $S'$  concèntrica amb  $S$  i de radi menor que el de  $S$ . Per simetria, el potencial  $V$  serà constant sobre  $S'$  i, per la unicitat de la solució del problema de Dirichlet,  $V$  serà constant a l'interior de  $S'$ . Fent tendir el radi de  $S'$  al radi de  $S$ , deduïm que  $V$  és constant a l'interior de l'esfera  $S$ , però aleshores el camp elèctric corresponent és  $E = \nabla V = 0$ .

Un altre problema de contorn associat a l'equació de Laplace de gran interès en les aplicacions és el problema de Neumann.

**Problema de Neumann.** *Donada una funció contínua  $f$  sobre  $S$ , hi ha una funció contínua  $u$  sobre tot el domini  $W$  tal que coincideixi amb  $\partial f / \partial N$  en els punts de  $S$  i sigui harmònica a l'interior de  $W$ ? En cas afirmatiu, quantes n'hi ha?*

Una vegada més, les fórmules de Green permeten establir un resultat d'unicitat de les solucions.

**6.6.11 Teorema** *Sigui  $W$  un volum elemental connex i  $f$  una funció contínua a  $S$ . Si el problema de Neumann per a  $f$  a  $W$  té solució, aleshores la solució és única llevat de constants.*

*Demostració.* La deducció d'aquest teorema d'unicitat és anàloga a la de 6.6.9. En aquest cas, però, de l'equació  $\nabla w = 0$  (notacions de la demostració de 6.6.9) no podem deduir que  $w = 0$ , ja que ara no coneixem els valors de  $w$  sobre la vora  $\partial W$  i, per tant, només podem afirmar que  $w$  és constant. ■

A la pràctica són importants, també, els anomenats problemes externs de Dirichlet i de Neumann. Abans de presentar aquests problemes estudiem algunes propietats de les funcions harmòniques, en particular el principi del màxim, que ens permetran establir els resultats d'unicitat de solucions adequats.

### **Funcions harmòniques: el principi del màxim**

El principi del màxim que volem establir per a les funcions harmòniques és conseqüència dels teoremes del valor mig per a aquestes funcions.

**6.6.12 Teorema** [1er teorema del valor mig.] *Sigui  $f$  una funció harmònica a la bola  $B_R(p)$ , i sigui  $S_R = \partial B_R(p)$ . Aleshores,*

$$f(p) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} f dS,$$

*és a dir, el valor d'una funció harmònica  $f$  en un punt  $p$  és el valor mig de  $f$  sobre una esfera,  $S_R$ , centrada a  $p$ .*

*Demostració.* Per la tercera fórmula de Green, 6.6.7, es té que

$$f(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} - f \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} \right) dS,$$

però, com que  $f$  és harmònica, se satisfà que (6.6.2)

$$\int_{S_R} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial N} dS = \frac{1}{R} \int_{S_R} \frac{\partial f}{\partial N} dS = 0.$$

Conjugant aquestes dues igualtats deduïm la fórmula del valor mig:

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_R} -f \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_R} f \left\langle \nabla \frac{1}{r}, \frac{\vec{r}}{R} \right\rangle dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_R} f \left\langle -\frac{\vec{r}}{R^3}, \frac{\vec{r}}{R} \right\rangle dS \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} f dS. \end{aligned}$$

■

**6.6.13 Corollari** [2n teorema del valor mig.] Amb les notacions del teorema anterior, se satisfà que

$$f(p) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{B_R(p)} f dx dy dz.$$

*Demostració.* Pel primer teorema del valor mig, per a tot  $0 < r \leq R$  se satisfà que

$$4\pi r^2 f(p) = \int_{S_r} f dS.$$

Integrant entre 0 i  $R$ , respecte de  $r$ , s'obté que

$$\frac{4\pi R^3}{3} f(p) = \int_{B_R} f dx dy dz,$$

d'on se segueix el resultat. ■

Podem ara establir el principi del màxim per a les funcions harmòniques.

**6.6.14 Teorema** [Principi del màxim.] *Sigui  $f$  una funció contínua a  $W$  i harmònica en els punts interiors de  $W$  i suposem que  $W$  és connex. Aleshores,  $f$  atansa els seus valors extrems en punts de la frontera  $\partial W$ .*

*Demostració.* Si  $f$  té un màxim a la frontera no hi ha res per demostrar. Suposem que  $f$  té un valor màxim en un punt  $p$  de l'interior de  $W$ . Anem a veure que, en aquest cas, la funció és constant i que, per tant, atansa aquest valor màxim també en els punts de la frontera.

Com que  $p$  és un punt interior a  $W$  podem escollir un  $\varepsilon > 0$  prou petit per tal que  $B_\varepsilon(p) \subseteq W$ . El teorema del valor mig i el fet que el valor de  $f(p)$  és màxim permeten establir la desigualtat

$$f(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} f dS \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} f(p) dS = f(p).$$

Com que en resulta una igualtat, els valors de  $f$  sobre  $S_\varepsilon$  no poden ser menors que  $f(p)$ , és a dir,  $f$  és constant en un petit entorn de  $p$ . Per la connexió de  $W$  i l'arbitrarietat del punt interior  $p$ ,  $f$  és constant, com volíem provar. ■

Podem expressar el principi del màxim a través de la desigualtat

$$\max_{x \in W} |f(x)| \leq \max_{x \in \partial W} |f(x)|.$$

### **Problemes de contorn externs**

Enunciem tot seguit el problema de contorn extern de Dirichlet i provem un resultat d'unicitat de les solucions.

**Problema extern de Dirichlet.** *Sigui  $W$  un volum elemental i  $f$  una funció contínua sobre  $S$ . Hi ha una funció contínua a  $\mathbb{R}^3 - W^\circ$  que coincideixi amb  $f$  sobre  $S$  i que sigui harmònica en els punts de  $\mathbb{R}^3 - W$ ? En cas afirmatiu, quantes n'hi ha?*

En aquest cas, el teorema d'unicitat de les solucions no s'aplica de forma immediata ja que  $\mathbb{R}^3 - W$  no és compacte, hipòtesi que hem utilitzat per establir els teoremes d'unicitat en el cas acotat. Per exemple, la funció  $1/r$  és harmònica a  $\mathbb{R}^3 - B_1(0)$  i sobre l'esfera de radi 1 és constant i igual a 1, sense ser constant ella mateixa.

En el context dels problemes de contorn externs, s'han de fixar les condicions de creixement de les funcions a l'infinit per tal d'obtenir resultats d'unicitat. El resultat següent n'és un exemple.

**6.6.15 Teorema** [Unicitat Dirichlet exterior.] *Sigui  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  un obert no acotat amb frontera  $S = \partial U$ , i sigui  $g$  una funció definida a  $\mathbb{R}^3 - B_r(0)$ , per a algun  $r > 0$ . Si  $u$  és solució al problema de Dirichlet exterior a  $U$ , amb  $u|_S = f$  i satisfà que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u(x) - g(x)| = 0,$$

*aleshores  $u$  és única.*

*Demostració.* Suposem que  $u, v$  són dues funcions contínues a  $\overline{U}$ , harmòniques a  $U$  i que coincideixen amb  $f$  sobre la frontera  $S$  i suposem, a més, que ambdues funcions tenen el mateix creixement a l'infinit que la funció  $g$ . Volem veure que  $u = v$ .

El resultat és conseqüència del principi del màxim: en efecte, observem que provar la igualtat  $u = v$  és equivalent a provar que per a qualsevol  $x \in U$  i qualsevol  $\varepsilon > 0$  se satisfà la desigualtat

$$|u(x) - v(x)| < \varepsilon.$$

Fixem  $x \in U$  i  $\varepsilon > 0$ . Per hipòtesi es té que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |u(y) - g(y)| = \lim_{y \rightarrow \infty} |v(y) - g(y)| = 0,$$

i, per tant, hi ha un radi prou gran  $R > 0$  tal que  $|x| < R$  i tal que, per a tot  $|y| > R$  se satisfan les desigualtats

$$\begin{aligned} |u(y) - g(y)| &< \varepsilon/2, \\ |v(y) - g(y)| &< \varepsilon/2, \end{aligned}$$

amb la qual cosa, per a tot  $|y| > R$  es té que

$$|u(y) - v(y)| \leq |u(y) - g(y)| + |g(y) - v(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad (6.1)$$

Sigui  $B_R$  la bola centrada a l'origen i de radi  $R$ , que conté el punt  $x$  per l'elecció de  $R$ , i considerem el conjunt compacte  $K = \overline{U} \cap B_R$ . La frontera de  $K$  és

$$\partial K = (\partial U \cap B_R) \cup (\overline{U} \cap \partial B_R),$$

i, com que  $u = v = f$  sobre  $S = \partial U$  i que se satisfà 6.1 sobre  $\partial B_R$ , en resulta que

$$\max_{\partial K} |u(y) - v(y)| < \varepsilon.$$

Però, pel principi del màxim,

$$|u(x) - v(x)| \leq \max_{\partial K} |u(y) - v(y)| < \varepsilon,$$

fet que acaba la prova. ■

**6.6.16 Observació** El teorema d'unicitat anterior admet diverses versions segons el tipus de condició de creixement a l'infinit que imposem. Un enunciat habitual correspon a aquell que imposa la regularitat de la solució: una funció harmònica  $u$  en un obert  $U$  no acotat es diu que és *regular a l'infinit* si hi ha una constant  $k$  i un radi  $r_0$  tals que

$$\|u\| < \frac{k}{r}, \quad \|\nabla u\| < \frac{k}{r^2},$$

per a tot  $r > r_0$ . Es pot provar, per exemple, que una funció harmònica definida a  $U$  i que tendeix a zero uniformement a l'infinit és una funció harmònica regular (aquesta és la situació de la diferència  $u - v$  de la demostració anterior). El teorema 6.6.15 és una cas particular de l'enunciat següent: *si  $u$  és una funció harmònica en un obert no acotat  $U$  que és regular a l'infinit i satisfà  $u|_S = 0$ , aleshores  $u = 0$ .*

El problema exterior de Neumann s'enuncia de forma similar i, amb condicions de comportament a l'infinit adequades, admet el teorema d'unicitat, llevat de constants, corresponent.

## 6.7 Descomposició de Helmholtz

En aquest apartat apliquem algunes de les propietats establertes per als potencials newtonians i per a les funcions harmòniques per descompondre un camp vectorial com a suma d'un camp conservatiu i un camp solenoïdal. Aquesta descomposició apareix també quan s'intenta recuperar un camp vectorial a partir de la seva divergència i del seu rotacional, és a dir, de les seves fonts i de la seva vorticitat.

En general, no podem esperar recuperar un camp vectorial únicament a partir de la divergència i del rotacional.

**6.7.1 Exemple** El camp vectorial  $F = (x, -2y, z)$  té divergència i rotacional nuls:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= 1 - 2 + 1 = 0, \\ \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -2y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

però no és el camp constant zero.

Comencem tractant el cas acotat: sigui  $W$  un domini elemental simplement connex i sense forats amb frontera  $S = \partial W$ , i denotem per  $N$  el camp normal a  $S$  exterior a  $W$ . La divergència i el rotacional d'un camp el determinen si fixem la component normal sobre  $S$ , com prova el resultat següent.

**6.7.2 Proposició** *Amb les hipòtesis anteriors, siguin  $F, G$  dos camps vectorials definits a  $\overline{W}$  tals que*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F &= \operatorname{div} G, \\ \operatorname{rot} F &= \operatorname{rot} G,\end{aligned}$$

*i suposem que es té que  $\langle F, N \rangle = \langle G, N \rangle$ . Aleshores,  $F = G$ .*

*Demostració.* Si  $H = F - G$ , aleshores  $H$  satisfà les igualtats

$$\begin{aligned}\operatorname{div} H &= \operatorname{div} F - \operatorname{div} G = 0, \\ \operatorname{rot} H &= \operatorname{rot} F - \operatorname{rot} G = 0, \\ \langle H, N \rangle &= \langle F, N \rangle - \langle G, N \rangle = 0.\end{aligned}$$

Hem de provar que  $H = 0$ . Com que  $H$  és irrotacional,  $\operatorname{rot} H = 0$ , i  $W$  és simplement connex, el camp  $H$  és conservatiu, per la qual cosa hi ha una funció  $h \in \mathcal{C}^2(W)$  amb  $H = \nabla h$ . Però, aleshores

$$\Delta h = \operatorname{div} \nabla h = \operatorname{div} H = 0,$$

és a dir,  $h$  és una funció harmònica. Així, tenint present que la component normal de  $H$  és nul·la,  $\langle H, N \rangle = 0$ , de 6.6.3 se segueix que

$$\int_W \|\nabla h\|^2 dx dy dz = 0,$$

i, per tant, que  $H = \nabla h = 0$ . ■

Analitzem ara el cas d'un domini no acotat. En aquest cas hem d'imposar condicions de creixement a l'infinit si volem obtenir un resultat d'unicitat. Fixem les notacions següents: siguin  $F$  i  $G$  dos camps vectorials definits a tot l'espai que tenen el mateix rotacional,  $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} G$ . Com que  $\operatorname{rot}(F - G) = 0$ , hi ha una funció  $h$  tal que  $F - G = \nabla h$ .

**6.7.3 Proposició** *Siguin  $F$  i  $G$  dos camps vectorials definits a tot l'espai amb la mateixa divergència i el mateix rotacional, i sigui  $h$  una funció potencial de  $F - G$ . Si  $h$  és regular a l'infinit, aleshores  $F = G$ .*

*Demostració.* El potencial  $h$  és una funció harmònica i per això, per 6.6.3, per a una bola  $B$  centrada a l'origen de radi  $R$  es té que

$$\int_{\partial B} h \frac{\partial h}{\partial N} dS = \int_B \|\nabla h\|^2 dx dy dz.$$

Però si el radi  $R$  és prou gran, el terme  $h \frac{\partial h}{\partial N}$  és d'ordre  $1/R^3$ , i així  $h$  és regular, mentre que l'àrea de l'esfera és d'ordre  $R^2$ . Per tant, la integral de l'esquerra tendeix a zero quan  $R \rightarrow \infty$ . Així,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla h\|^2 dx dy dz = 0,$$

i, com que es tracta de la integral d'una funció positiva, en resulta que  $\nabla h = 0$ , és a dir,  $F = G$ . ■

**6.7.4 Proposició** [Descomposició de Helmholtz.] *Sigui  $F$  un camp vectorial  $C^1$  amb divergència acotada a tot l'espai. Aleshores,  $F$  admet una descomposició*

$$F = G + H,$$

tal que  $G$  és conservatiu i  $H$  és solenoïdal, és a dir, tals que

$$\operatorname{rot} G = 0, \quad \operatorname{div} H = 0.$$

*Demostració.* Suposem que  $F$  admet una descomposició  $F = G + H$  com la de l'enunciat i vegem com això ens permet trobar els camps  $G$  i  $H$ . Com que  $G$  és un camp conservatiu hi haurà una funció potencial  $g$ ,  $G = \nabla g$ . Determinem aquest potencial: com que hem suposat que  $\operatorname{div} H = 0$ , la divergència de  $F$  és:

$$\operatorname{div} F = \Delta g + \operatorname{div} H = \Delta g.$$

Així,  $g$  és solució de l'equació de Poisson

$$\Delta g = 4\pi \cdot \frac{\operatorname{div} F}{4\pi}.$$

Sabem que aquesta equació té per solució el potencial newtonià de densitat  $-\operatorname{div} F/4\pi$ , és a dir, que es té que

$$g = - \int_{\mathcal{W}} \frac{\rho}{r} dx dy dz = - \int_{\mathcal{W}} \frac{\operatorname{div} F}{4\pi r} dx dy dz.$$

Un cop determinat el camp vectorial  $G$ , el camp  $H$  és, simplement,  $H = F - G$ , ja que així es té

$$\operatorname{div} H = \operatorname{div} F - \operatorname{div} G = \operatorname{div} F - \Delta g = 0,$$

amb la qual cosa  $H$  és solenoïdal. ■

Si el camp vectorial  $F$  del teorema anterior està definit a tot l'espai, el camp solenoïdal  $H$  de la descomposició de Helmholtz provindrà de potencial vector,  $H = \operatorname{rot} I$ . Els potencials  $g$  i  $I$  no estan determinats unívocament, ja que  $g$  ho està llevat de constants i  $I$  ho està llevat de camps conservatius. En qualsevol cas, direm que  $g$  és una *funció potencial* de  $F$  i que  $I$  és un *potencial vector* de  $F$ .

Sovint, per determinar el potencial vector  $I$  s'imposa, a més, que sigui un camp solenoïdal, és a dir, que satisfaci l'equació

$$\operatorname{div} I = 0.$$

Sempre podem aconseguir que  $I$  sigui solenoïdal, ja que si  $I'$  és un potencial vector qualsevol i prenem

$$h = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} I'}{r} dx dy dz,$$

aleshores el camp vectorial  $I = I' + \nabla h$  és un potencial vector i té divergència nul·la:

$$\operatorname{div} I = \operatorname{div} I' + \Delta h = 0.$$

Així, segons la definició de la laplaciana d'un camp vectorial, si  $I$  és un potencial vector de  $F$  que és solenoïdal,  $I$  satisfà una equació de Poisson vectorial:

$$\begin{aligned}\Delta I &= \nabla \operatorname{div} I - \operatorname{rot} \operatorname{rot} I \\ &= -\operatorname{rot} F,\end{aligned}$$

Coneixem una solució d'aquesta equació utilitzant potencials newtonians,

$$I = \int \frac{\operatorname{rot} F}{4\pi r} dx dy dz.$$

En definitiva, suposant les integrals convergents, podem precisar la descomposició de Helmholtz segons:

$$F = \nabla_p \int \frac{-\operatorname{div}_q F}{4\pi r} dx dy dz + \operatorname{rot}_p \int \frac{\operatorname{rot}_q F}{4\pi r} dx dy dz,$$

(els subíndexs  $p$  i  $q$  indiquen les variables respecte de les quals es calculen els operadors diferencials corresponents, i les integrals estan definides a tot l'espai).

**6.7.5 Exemple** Considerem el camp vectorial

$$F = (ax, -ay, b),$$

on  $a, b$  són constants. És immediat comprovar que  $\operatorname{div} F = 0$  i  $\operatorname{rot} F = 0$ . Per què no podem aplicar la fórmula anterior per recuperar  $F$  a partir de la divergència i el rotacional, ambdós zero? Observem que  $F$  prové de potencial,  $F = \nabla \phi$  i aquest potencial és una funció harmònica,  $\Delta \phi = 0$ ; de fet, podem prendre  $\phi(x, y) = a(x^2 - y^2)/2$ , però aquesta funció no és regular a l'infinit i, per tant, no s'aplica el resultat d'unicitat corresponent. L'únic camp vectorial amb divergència i rotacional nuls i regular a l'infinit és el camp constant zero.

## 6.8 Camps que depenen del temps

Els camps vectorials que hem estudiat en els apartats anteriors depenen de les coordenades espacials dels punts on estan definits. En diverses situacions de la física matemàtica es presenten camps vectorials que depenen, a més, del temps. En aquest apartat presentem algunes qüestions relacionades amb la dependència del temps, en particular l'equació de continuïtat. Basem la presentació en les equacions de la dinàmica de fluids.

### *Derivades locals i derivades materials*

Considerem un fluid en moviment amb camp de velocitats  $v$  que depèn de les coordenades de cada punt i del temps,  $v(x, y, z, t)$ . Donada una magnitud del fluid  $\phi$ , escalar o vectorial, que es vulgui estudiar, per exemple, la temperatura, la pressió o l'acceleració, hi ha dos punts de vista per analitzar-la: podem estudiar  $\phi$  en un punt fix de l'espai (és a dir, fixem les coordenades  $x, y, z$  i estudiem la variació de  $\phi$  respecte del temps en aquest punt), o podem analitzar els

valors de  $\phi$  per a una partícula del fluid mentre es desplaça, amb coordenades variables, al llarg del temps. Per exemple, si  $\phi$  és la temperatura, la dicotomia anterior consisteix a mesurar-la en un punt fix de l'espai o bé analitzar-ne la seva variació al llarg de la trajectòria d'una partícula. Un símil senzill ajuda a entendre aquesta situació: si volem analitzar el trànsit per una autopista podem situar-nos en un quilòmetre determinat i estudiar el flux de vehicles per aquell punt o podem seguir el comportament d'un vehicle particular en el seu trajecte al llarg de la ruta.

La variació d'una magnitud  $\phi(x, y, z, t)$  respecte del temps està caracteritzada per la derivada parcial (també anomenada, en aquest context, *derivada local*)  $\partial\phi/\partial t$ , mentre que la variació de  $\phi$  per a una partícula genèrica al llarg de la seva trajectòria la dona la derivada total (també coneguda per *derivada material o substancial*),  $d\phi/dt$ . Si  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , la regla de la cadena permet relacionar les derivades local i material per

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} v_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y} v_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z} v_3 + \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &= \langle \nabla\phi, v \rangle + \frac{\partial\phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si introduïm la notació

$$\langle v, \nabla \rangle = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

escrivim aquesta equació de la forma

$$\frac{d\phi}{dt} = \langle v, \nabla \rangle \phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Al terme  $\langle v, \nabla \rangle \phi$  se l'anomena *terme convectiu*. Es diu que un procés és *estacionari* si totes les magnituds que el determinen són independents del temps.

### 6.8.1 Exemples

1. Si  $v = (3t, xz, ty^2)$ , aleshores es té que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (3, 0, y^2),$$

i el terme convectiu és

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial v}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v}{\partial z} &= 3(0, z, 0) + xz(0, 0, 2yt) + ty^2(0, x, 0) \\ &= (0, 3z + xy^2, 2xyz - t), \end{aligned}$$

per la qual cosa la derivada material és:

$$\frac{dv}{dt} = (3, 0, y^2) + (0, 3tz + xy^2, 2xyz - t) = (3, 3tz + xy^2, 2xyz - t + y^2).$$

2. Considerem l'acceleració de les partícules d'un fluid. L'acceleració és la derivada total de la velocitat respecte del temps, és a dir,

$$a = \frac{dv}{dt} = \langle v, \nabla \rangle v + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Si escrivim aquesta equació usant les coordenades cartesianes, en resulta el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial t}, \\ a_2 &= v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial t}, \\ a_3 &= v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

### L'equació de continuïtat

L'equació de continuïtat expressa, en forma d'equació diferencial, la llei de conservació de la massa. Considerem un fluid amb camp de velocitats  $v(x, y, z, t)$  i funció de densitat  $\rho(x, y, z, t)$ , (amb  $v$  i  $\rho$  derivables amb continuïtat).

**6.8.2 Teorema** *Amb les notacions anteriors, la llei de conservació de la massa és equivalent a l'equació*

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

*equació que es coneix com a equació de continuïtat.*

*Demostració.* Fixem un volum  $W$  de l'espai. La llei de conservació de la massa assegura que l'increment de fluid que omple  $W$  és igual a la massa que travessa la superfície  $S$  que envolta  $W$ ,  $S = \partial W$ . L'increment de massa per unitat de temps és igual a la integral

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dx dy dz = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

D'altra banda, el volum que travessa  $S$  per unitat de temps és el flux del camp de velocitats  $v$  i, per tant, la massa que flueix cap a l'interior de  $W$  és igual a la integral

$$- \int_S \langle \rho v, N \rangle dS,$$

on  $N$  és el vector normal exterior a  $W$  i el signe indica que estem considerant la massa guanyada per  $W$ . Pel teorema de la divergència, aquesta integral és igual a

$$- \int_W \operatorname{div}(\rho v) dx dy dz.$$

Així, la llei de conservació de la massa s'expressa mitjançant la igualtat

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \int_W \operatorname{div}(\rho v) dx dy dz,$$

és a dir,

$$\int_W \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right) dx dy dz = 0.$$

Com que aquesta equació s'ha de satisfer per a tot volum  $W$ , deduïm que

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que és l'equació de continuïtat. ■

Calculant la divergència de  $\rho v$  segons la regla del producte, l'equació de continuïtat la podem escriure de la forma

$$\rho \operatorname{div} v + \langle \nabla \rho, v \rangle + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

o, en termes de la derivada total:

**6.8.3 Corollari** L'equació de continuïtat és equivalent a l'equació

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad \blacksquare$$

Un fluid es diu que és *incompressible* si la funció de densitat  $\rho$  és constant al llarg de les trajectòries, és a dir,

$$\text{fluid incompressible} \quad \equiv \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Segons el corollari anterior, i com que  $\rho > 0$ , es té que

$$\text{un fluid és incompressible si i només si } \operatorname{div} v = 0.$$

Si el moviment d'un fluid incompressible és conservatiu, és a dir, si el camp de velocitats  $v$  admet una funció potencial  $V$  amb  $v = \nabla V$ , l'equació de continuïtat es redueix a l'equació de Laplace per a  $V$ :

$$\Delta V = \operatorname{div} \nabla V = \operatorname{div} v = 0.$$

Hem provat, per tant:

**6.8.4 Corollari** Sigui  $v$  el camp de velocitats d'un fluid incompressible i irrotacional en un domini simplement connex. Aleshores, el potencial  $V$  del camp de velocitats satisfà l'equació de Laplace,

$$\Delta V = 0. \quad \blacksquare$$

Així, pel teorema d'unicitat del problema de Dirichlet, el camp de velocitats d'un fluid incompressible i irrotacional que circula per un canal queda determinat per les condicions de frontera que imposa la geometria del canal.

**6.8.5 Observació** Hem derivat l'equació de continuïtat a partir de la llei de conservació de la massa. Si en el volum  $W$  hi ha un cabal de brollador donat per una funció contínua  $q$  (positiva per a les fonts i negativa per als pous), la llei de conservació de la massa incorpora la variació que produeix aquest cabal i l'equació de continuïtat corresponent és

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = q,$$

com es comprova fàcilment.

**6.8.6 Observació** L'equació de continuïtat que hem desenvolupat per als fluids es dona també en altres contextos, com la conducció de la calor o el camp elèctric. Analitzarem aquest darrer en el proper apartat. Comentem breument l'equació de la calor.

Si  $T$  és una distribució de temperatures en un sòlid que ocupa el volum  $W$  amb funció de densitat  $\rho$ , l'augment de calor del sòlid el dona la integral

$$\int_W \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz,$$

on  $c$  és la funció de calor específica. Aquesta variació s'ha d'equilibrar amb el flux de calor per  $S = \partial W$ , que és igual a la integral

$$\int_S \langle k \nabla T, N \rangle dS,$$

on  $k(x, y, z, t)$  és el coeficient de conductivitat calorífica. Utilitzant el teorema de la divergència per calcular aquest flux i raonant com ho hem fet a 6.8.2, trobem l'equació de continuïtat corresponent

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(k \nabla T) = 0.$$

Veiem, en particular, que si  $k$  és constant i el règim de temperatures és estacionari (independent del temps), l'equació de continuïtat es redueix a l'equació de Laplace per a la funció temperatura,

$$\Delta T = 0.$$

### ***Equacions del moviment per a un fluid perfecte***

La segona llei de Newton segons la qual la força exercida sobre una massa és igual al producte de la massa per l'acceleració determina les equacions del moviment d'un fluid. Per trobar aquestes equacions hem de conèixer les forces que actuen sobre el fluid i l'acceleració d'aquest.

Sobre el fluid actuen dos tipus de forces: les externes, com ara la força de la gravetat o la produïda per un camp magnètic, i les internes, originades per la pressió que exerceix la resta del fluid sobre un element de volum. Direm que un fluid és *perfecte* (també anomenat *ideal*) si hi ha una funció  $p(x, y, z, t)$ , que anomenarem pressió, de manera que la força interior exercida sobre una superfície  $S$  és normal a  $S$  i igual a  $pN$ , on  $N$  és el vector normal exterior a  $S$ , (suposem que la superfície és tancada i envolta un volum  $W$ ).

Que un fluid sigui perfecte comporta que sobre una superfície del fluid no hi actuen forces tangencials, cosa que podem interpretar, intuïtivament, dient que el fluid no iniciarà espontàniament un moviment de rotació o, en cas que el tingués, que no l'aturarà de forma espontània. Comporta, també, que els efectes tangencials de viscositat són menyspreables.

**6.8.7 Teorema** *Sigui  $v$  el camp de velocitats d'un fluid perfecte sobre el qual actua un camp de forces (extern)  $F$ . Aleshores, se satisfà l'equació diferencial*

$$\rho \frac{dv}{dt} = F - \nabla p,$$

que s'anomena equació del moviment d'Euler.

*Demostració.* La força total que actua sobre un volum determinat  $W$  és igual a la suma de la força externa i la força interna exercides sobre  $W$ , és a dir, a la suma de les integrals vectorials

$$\int_W F dx dy dz - \int_S p N dS,$$

que, pel teorema de la divergència, podem escriure de la forma

$$\int_W F dx dy dz - \int_W \nabla p dx dy dz.$$

Per la segona llei de Newton, aquesta força és igual a la massa per l'acceleració, és a dir, es té la igualtat

$$\int_W (F - \nabla p) dx dy dz = \int_W \rho \frac{dv}{dt} dx dy dz,$$

i, com que aquesta igualtat és certa per a tot volum  $W$ , deduïm que

$$F - \nabla p = \rho \frac{dv}{dt},$$

que és l'equació del moviment d'Euler. ■

Així, el camp de velocitats d'un fluid perfecte satisfà l'equació de continuïtat i l'equació d'Euler, és a dir, el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial t} &= F_1 - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial t} &= F_2 - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial t} &= F_3 - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

El coneixement de la dinàmica del fluid comporta el coneixement de cinc paràmetres:  $\rho, p, v$  (la velocitat té tres components), mentre que el sistema anterior està format únicament per

quatre equacions. Això fa sospitar que per determinar la dinàmica del fluid manca, a part de les condicions de contorn adequades, una cinquena equació. La conservació de l'energia proporciona aquesta cinquena equació, tot i que no seguirem el desenvolupament complet d'aquest tema i ens limitarem a imposar una equació d'estat, que és una relació entre  $\rho$  i  $p$ . Més concretament, acabem l'apartat analitzant el cas en què  $\rho$  és constant i les forces externes són conservatives.

En els càlculs que segueixen utilitzarem la igualtat

$$\frac{1}{2} \nabla \langle v, v \rangle = \langle v, \nabla \rangle v - \text{rot } v \wedge v,$$

fàcilment comprovable a partir de les propietats dels operadors diferencials. Utilitzant la relació entre la derivada material i la derivada local i aquesta igualtat, l'equació del moviment s'escriu de la forma

$$\rho(\text{rot } v \wedge v + \frac{1}{2} \nabla \langle v, v \rangle + \frac{\partial v}{\partial t}) = F - \nabla p.$$

En el que segueix escriurem  $v^2 = \langle v, v \rangle$ .

**6.8.8 Proposició** *Sigui  $v$  el camp de velocitats d'un fluid perfecte, estacionari i amb funció de densitat  $\rho$  constant. Suposem que el fluid està sotmès a un camp extern de forces  $F$  que és conservatiu,  $F = \nabla U$ . Aleshores, la quantitat*

$$\rho \frac{1}{2} v^2 - U + p,$$

*és constant al llarg de les trajectòries.*

*Demostració.* Com que el flux és estacionari,  $\partial v / \partial t = 0$ , l'equació d'Euler es redueix a

$$\rho(\text{rot } v \wedge v + \frac{1}{2} \nabla v^2) = \nabla(U - p).$$

Multiplicant aquesta igualtat escalarment per  $v$  i tenint present que  $\langle \text{rot } v \wedge v, v \rangle = 0$ , trobem que

$$\langle \nabla(\rho \frac{1}{2} v^2 - U + p), v \rangle = 0.$$

És a dir, la derivada direccional de  $\rho v^2 / 2 - U + p$  respecte de  $v$  és nul·la o, altrament, aquesta quantitat es manté constant al llarg de les trajectòries. ■

Observem que el primer terme,  $\rho v^2 / 2$ , correspon a l'energia cinètica, mentre que  $U - p$  és l'energia potencial deguda a les forces externes,  $U$ , i internes,  $p$ , de manera que la constància de la quantitat anterior correspon al fet que l'energia total és constant al llarg de les trajectòries.

La constant que postula el resultat anterior pot variar d'una trajectòria a una altra. Si el fluid és irrotacional, el valor d'aquesta constant és el mateix per a totes les trajectòries:

**6.8.9 Proposició** *Sigui  $v$  el camp de velocitats d'un fluid perfecte, conservatiu (irrotacional), estacionari i amb funció de densitat  $\rho$  constant. Suposem que el fluid està sotmès a un camp extern de forces  $F$  que és conservatiu,  $F = \nabla U$ . Aleshores, la quantitat*

$$\rho \frac{1}{2} v^2 - U + p,$$

és constant.

*Demostració.* Com que  $v$  prové de potencial,  $v$  és un camp irrotacional i com que  $\partial v/\partial t = 0$ , l'equació del moviment corresponent és

$$\rho \frac{1}{2} \nabla v^2 = \nabla U - \nabla p,$$

és a dir,

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \rho v^2 - U + p \right) = 0,$$

i, per tant,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 - U + p = k,$$

on  $k$  és una constant. ■

A l'equació

$$\frac{1}{2} \rho v^2 - U + \frac{p}{\rho} = k,$$

se l'anomena *equació de Bernouilli*.

Considerem dues situacions particulars:

a) Si  $F$  és la força de gravetat, aleshores  $U = -\rho gh$ , on  $h$  és l'alçada i l'equació de Bernouilli esdevé

$$\frac{1}{2} v^2 + gh + \frac{p}{\rho} = k.$$

Per a un fluid en repòs, trobem la coneguda equació que relaciona la pressió amb l'alçada:

$$p + \rho gh = p_0.$$

b) Si no hi ha forces exteriors,  $F = 0$ , l'equació de Bernouilli esdevé l'equació

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = p_0,$$

on  $p_0$  representa la pressió quan el fluid està en repòs, anomenada *pressió hidroestàtica*.

## 6.9 Equacions de Maxwell

En aquest apartat presentem les equacions de Maxwell del camp electromagnètic. Comencem per recollir i completar algunes de les propietats dels camps electroestàtic i magnetoestàtic que hem anat presentant en diferents exemples al llarg del capítol. A la secció 6.7 hem vist que un camp vectorial està determinat per la seva divergència i el seu rotacional sempre que imposem condicions de frontera o de creixement a l'infinit. En aquesta secció determinem

la divergència i el rotacional dels camps elèctric i magnètic, i establim així les equacions de Maxwell. No analitzarem, però, situacions particulars amb diferents condicions de frontera, tractades abastament en els llibres d'electromagnetisme citats a la bibliografia.

### ***El camp electroestàtic***

Considerem una densitat de càrrega elèctrica  $\rho$  en un volum  $W \subseteq \mathbb{R}^3$ . Per la llei de Coulomb, el camp elèctric creat per  $\rho$  és

$$E(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_W \frac{\rho \vec{r}}{r^3} dx dy dz,$$

on  $\vec{r} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$  i  $r = |\vec{r}|$ .

El camp electroestàtic  $E$  és conservatiu. De fet, si prenem

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_W \frac{\rho}{r} dx dy dz,$$

aleshores,

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_W \rho \nabla \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_W \rho \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz, \end{aligned}$$

és a dir,

$$E = -\nabla\phi.$$

A  $\phi$  l'anomenarem el *potencial electroestàtic*.

Com que  $E$  és conservatiu, es té que

$$\text{rot } E = 0.$$

La divergència de  $E$  es calcula a través de la llei de Gauss. En efecte, per la llei de Gauss 6.5.2, el flux del camp  $E$  per una superfície tancada que contingui  $W$  és

$$\int_S \langle E, N \rangle dS = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

i raonant com ho hem fet per a un camp newtonià, en resulta

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

i, en particular, el potencial  $\phi$  ha de satisfer l'equació de Poisson

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

en els punts de  $W$  i l'equació de Laplace,  $\Delta\phi = 0$  a l'espai lliure.

Resumint, el camp electroestàtic  $E$  prové de potencial,  $E = \nabla\phi$ , i es té que

$$\begin{array}{l} \text{rot } E = 0, \\ \text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{array}$$

### **El camp magnetoestàtic**

Si  $J$  és el vector de densitat de corrent en un volum  $W$ , el camp magnètic (magnetoestàtic) que defineix és

$$B(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz.$$

Hem vist a 6.3.10 que aquest camp és solenoïdal,

$$\text{div } B = 0,$$

i que si definim el camp vectorial  $A$  per la integral vectorial

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \frac{J}{r} dx dy dz,$$

aleshores es té que

$$\text{rot } A = B.$$

Per calcular el rotacional de  $B$  recordem que, per la definició, de la laplaciana d'un camp vectorial, es té que

$$\Delta A = \nabla \text{div } A - \text{rot rot } A,$$

i, per tant,

$$\text{rot } B = \text{rot rot } A = \nabla \text{div } A - \Delta A.$$

La divergència de  $A$  és nul·la. En efecte, si notem amb una ' les derivades respecte  $x$ ,  $y$ ,  $z$  per distingir-les de les derivades respecte de  $x_1$ ,  $y_1$  i  $z_1$ , tenim:

$$\begin{aligned} \text{div } A &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \text{div } \frac{J}{r} dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \cdot \nabla \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \nabla' \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \left( \text{div}' \frac{J}{r} + \frac{1}{r} \text{div}' J \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Per l'equació de continuïtat en el cas estacionari, vegeu 6.9.1,  $\text{div}' J = 0$  i, per tant, aplicant el teorema de la divergència trobem que

$$\begin{aligned} \text{div } A &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \text{div}' \frac{J}{r} dx dy dz \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left\langle \frac{J}{r}, N \right\rangle dS. \end{aligned}$$

Com que el corrent està limitat al domini  $W$ , no travessa  $S$  i, per tant, la component normal a  $S$  de  $J$  és zero, per la qual cosa la darrera integral s'anulla.

Observem que, si  $\Delta'$  designa la laplaciana calculada respecte de les variables  $(x, y, z)$ , la simetria de la funció  $1/r$  fa que  $\Delta = \Delta'$ , i que, per tant, la integral que correspon a  $-\Delta A$  sigui igual a

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \Delta' \frac{1}{r} dx dy dz.$$

El càlcul d'aquesta darrera integral no és immediat, ja que si  $(x_1, y_1, z_1)$  és un punt de  $W$ , es tracta d'una integral singular. A més, no és una integral impròpia en el sentit de la noció d'integral impròpia introduïda al capítol 2, ja que no es tracta d'una funció contínua fora de l'origen que creix fins a l'infinit a l'origen, sinó que  $\Delta(1/r) = 0$  en tots els punts diferents de  $(x_1, y_1, z_1)$ , però en aquest punt no està definida. De fet,  $\Delta(1/r)$  és igual la delta de Dirac. Per tal de no allunyar-nos del tema principal, aplicarem els teoremes establerts en aquesta situació més general.

Prenent  $W$  prou petit, podem suposar que  $J$  és constant i escriure

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \Delta' \frac{1}{r} dx dy dz = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \Delta' \frac{1}{r} dx dy dz.$$

Ara, aplicant el teorema de la divergència a la integral (singular) resultant trobem

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_W \Delta' \frac{1}{r} dx dy dz &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_W \operatorname{div} \nabla' \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left\langle \nabla' \frac{1}{r}, N \right\rangle dx dy dz \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left\langle -\frac{\vec{r}}{r^3}, N \right\rangle dx dy dz, \end{aligned}$$

i, per la llei de Gauss, aquesta integral és igual a  $-4\pi$ , és a dir,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_W J \Delta' \frac{1}{r} dx dy dz \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (-4\pi) = \mu_0 J. \end{aligned}$$

Resumint, el camp magnetoestàtic admet un potencial vector,  $A$ , i satisfà les equacions

$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0, \\ \operatorname{rot} B &= \mu_0 J. \end{aligned}$
--

El càlcul del rotacional de  $B$  és una expressió diferencial de la *lleï d'Ampère*: en efecte, si  $C$  és una corba tancada que limita una superfície  $S$ , podem aplicar el teorema de Stokes per calcular la circulació de  $B$  per  $C$ ,

$$\int_C \langle B, T \rangle dl = \int_S \langle \operatorname{rot} B, N \rangle dS = \int_S \langle \mu_0 J, N \rangle dS = \mu_0 \int_S \langle J, N \rangle dS = \mu_0 I.$$

Aquesta igualtat és l'expressió matemàtica de la llei d'Ampère: *la circulació de  $B$  per una corba tancada  $C$  és igual a  $\mu_0$  per la intensitat de corrent que travessa una superfície qualsevol  $S$  limitada per  $C$ .*

### L'equació de continuïtat

Fins aquí hem estudiat els camps elèctric i magnètic suposant que no depenen del temps. Quan la densitat de càrrega  $\rho$  depèn del temps, la llei de conservació de la càrrega permet establir l'equació de continuïtat que ha de satisfer la velocitat  $v$  de moviment de les càrregues. En efecte, raonant com en la secció anterior per al cas dels fluids, és immediat establir que la llei de conservació de la càrrega és equivalent a l'equació

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Si escrivim  $J = \rho v$ , el camp de densitat de càrrega, hem establert:

**6.9.1 Teorema** *Donada una distribució de càrregues elèctriques de densitat  $\rho$  i densitat de corrent  $J$ , se satisfà l'equació*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0,$$

*equació que anomenarem equació de continuïtat*

*En particular, si la distribució és estacionària ( $\rho$  independent del temps), se satisfà que*

$$\operatorname{div} J = 0. \quad \blacksquare$$

### Les equacions de Maxwell del camp electromagnètic

Observem que en el cas estacionari l'equació de continuïtat,  $\operatorname{div} J = 0$ , és compatible amb el càlcul de la divergència i el rotacional dels camps elèctric i magnètic que hem efectuat. En efecte, es té:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} B = \operatorname{div} \mu_0 J = \mu_0 \operatorname{div} J = 0.$$

Ara bé, en el cas no estacionari, el càlcul anterior juntament amb l'equació de continuïtat dóna la igualtat

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} B = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

que és incompatible amb el fet que  $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ . Això indica que, quan hi ha dependència del temps, ha de variar-se l'equació del rotacional de  $B$ . De fet, l'equació de continuïtat indica com hem de variar la llei d'Ampère, ja que utilitzant-la, juntament amb la llei de Gauss, es té que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \operatorname{div} J + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \operatorname{div} E \\ &= \operatorname{div} \left( J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

i per això Maxwell va reemplaçar la llei d'Ampère per l'equació

$$\text{rot } B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},$$

equació que ha passat a anomenar-se *equació d'Ampère-Marxwell*. Al terme

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},$$

se l'anomena *corrent de desplaçament*.

D'altra banda, Faraday va observar que quan un fil conductor es mou en un camp magnètic, apareix un corrent induït en el circuit, i va formular la coneguda com a *llei d'inducció de Faraday*: sigui  $C$  un circuit que limita una superfície  $S$  amb vector normal  $N$  i sigui  $\Phi(t)$  el flux del camp magnètic  $B$  per  $S$ . Aleshores, se satisfà que

$$\int_C \langle E, T \rangle d\ell = -\frac{d}{dt} \Phi(t).$$

Utilitzant el teorema de Stokes podem escriure aquesta igualtat de la forma

$$\int_S \langle \text{rot } E, N \rangle dS = -\int_S \langle \frac{\partial B}{\partial t}, N \rangle dS,$$

i com que  $C$  i  $S$  són arbitràries, en resulta l'equació

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

que és la versió diferencial de la llei d'inducció de Faraday.

La llei de Gauss i el caràcter solenoïdal del camp magnètic es mantenen per a camps que depenen del temps. En definitiva, el sistema d'equacions resultant és

$\text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$	$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t},$
$\text{div } B = 0,$	$\text{rot } B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},$

que són les equacions de Maxwell. Aquest sistema d'equacions regeix tots els fenòmens electro-magnètics. A l'espai vuit, on  $\rho = 0$  i  $J = 0$ , el sistema anterior es redueix a les equacions

$\text{div } E = 0,$	$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t},$
$\text{div } B = 0,$	$\text{rot } B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$

La dependència mútua de  $E$  i de  $B$  que es desprèn de les equacions de Maxwell induïx a considerar-los com aspectes parcials d'un únic camp, el *camp electromagnètic*.

Les equacions de Maxwell per a l'espai lliure permeten provar que els camps  $E$  i  $B$  satisfan la mateixa equació d'ones. En efecte, com que  $\operatorname{div} E = 0$ , la llei d'inducció de Faraday i la llei d'Ampère-Maxwell donen lloc a l'equació següent per a  $E$ :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \nabla \operatorname{div} E - \operatorname{rot} \operatorname{rot} E \\ &= -\operatorname{rot} \left( -\frac{\partial B}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} B \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Raonant anàlogament per al camp  $B$ , s'obté que a l'espai lliure satisfà l'equació d'ones

$$\Delta B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Si definim  $c$  per la igualtat  $c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$ , les equacions d'ones per a  $E$  i  $B$  s'escriuen de la forma

$$\boxed{\begin{aligned}c^2 \Delta E &= \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \\ c^2 \Delta B &= \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.\end{aligned}}$$

### ***Els potencials del camp electromagnètic***

Com en el cas electroestàtic i magnetoestàtic, sovint és convenient utilitzar un potencial vector per al camp  $B$  i un potencial escalar vinculat a  $E$  i expressar les equacions de Maxwell en funció d'aquests potencials. Acabem aquesta secció presentant les equacions que satisfan els potencials electromagnètics.

Com que  $B$  és solenoïdal, segons l'equació de Gauss per al camp magnètic,  $B$  admet un potencial vector,  $B = \operatorname{rot} A$ , determinat llevat de camps conservatius (suposarem que estem en un recinte simplement connex i sense forats). Per la llei d'inducció de Faraday se satisfà que

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} A,$$

i, per tant, es té que

$$\operatorname{rot} \left( E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0.$$

Però, aleshores, el camp  $E + \partial A / \partial t$  és un camp conservatiu, és a dir, existeix una funció  $\phi$  tal que

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

A  $\phi$  i  $A$  els anomenarem *potencials electromagnètics*.

Les equacions de Maxwell imposen les equacions que han de satisfer els potencials electromagnètics. Com que  $A$  està definit llevat de camps gradients, tenim certa llibertat d'elecció. Imposarem que  $A$  i  $\phi$  satisfan l'equació

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

coneguda com a *condició de Lorentz*. En aquest cas, la llei de Gauss del camp elèctric dóna lloc a l'equació:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \operatorname{div} \left( -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

és a dir,  $\phi$  satisfà l'equació d'ones no homogènia

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

D'altra banda, per la llei d'Ampère-Maxwell es té que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \phi + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

però, per la condició de Lorentz, se satisfà que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} A \\ &= \nabla \operatorname{div} A - \Delta A \\ &= -\nabla \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta A. \end{aligned}$$

Conjugant aquestes dues equacions, trobem que el potencial  $A$  satisfà l'equació

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J.$$

Observem que, formalment, les equacions que satisfan el potencial  $\phi$  i el vector potencial  $A$  són les mateixes. L'interès de la condició de Lorentz rau en el fet que permet desacoblar les equacions de Maxwell per a  $\phi$  i  $A$ .

Si introduïm l'operador *dalembertià* segons

$$\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

les equacions que satisfan  $\phi$  i  $A$  són

$$\begin{aligned}\square \phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \square A &= -\mu_0 J.\end{aligned}$$

Si coneixem els potencials electromagnètics, els camps  $E$  i  $B$  són

$$\begin{aligned}E &= -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \\ B &= \text{rot } A.\end{aligned}$$

**6.9.2 Exemple** Considerem l'equació d'ones homogènia,  $\square \psi = 0$ , és a dir,

$$c^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Suposem que  $\psi$  és una solució d'aquesta equació que només depèn de la distància a l'origen. Expressant la laplaciana en coordenades esfèriques i com que  $\psi$  només depèn de  $r$ , l'equació anterior s'escriu de la forma

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

És immediat comprovar que tota funció de la forma

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

on  $f$  és una funció qualsevol, és solució d'aquesta equació d'ones. L'anomenarem un *potencial retardat* de l'equació d'ones. El nom prové del fet que interpretem que l'ona transporta la densitat  $f(t)$  amb un retard  $r/c$ .

El potencial retardat juga, per a l'equació d'ones, un paper anàleg al que representa la funció harmònica  $1/r$  per a la laplaciana. De fet, les integrals

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x, y, z, t - r/c)}{r} dx dy dz, \\ A &= \frac{1}{4\pi c} \int \frac{J(x, y, z, t - r/c)}{r} dx dy dz,\end{aligned}$$

que són el substitut dels potencials newtonians en aquesta situació, satisfan les equacions del potencial electromagnètic.

Indiquem la prova de que  $\phi$  satisfà l'equació d'ones no homogènia  $\square \phi = -\rho/\varepsilon_0$ : sigui  $R$  un radi arbitrari i descomponem la integral que defineix  $\phi$  en dues parts, segons

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{B_R} \frac{\rho(x, y, z, t - r/c)}{r} dx dy dz + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3 - B_R} \frac{\rho(x, y, z, t - r/c)}{r} dx dy dz = \phi_R + \phi'_R,$$

on  $B_R$  és la bola de centre l'origen i radi  $R$ . La integral que defineix  $\phi'_R$  està ben definida ( $r$  no és zero) i, per tant, satisfà l'equació d'ones homogènia

$$\square \phi'_R = 0.$$

Quant a  $\phi_R$  considerem la igualtat

$$\phi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B_R} \frac{\rho(x, y, z, t - r/c) - \rho(x, y, z, t)}{r} dx dy dz + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{B_R} \frac{\rho(x, y, z, t)}{r} dx dy dz.$$

Si  $\rho$  és derivable amb continuïtat respecte de  $t$ , la primera integral tendeix a zero quan  $R$  tendeix a zero. Però la segona integral és un potencial newtonià de densitat  $\rho$  i, per tant, se satisfà que

$$\Delta\phi_R = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Finalment, observem que la integral

$$\int_{B_R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{1}{r} dx dy dz,$$

tendeix també a zero amb  $R$ , d'on se segueix que  $\phi$  satisfà l'equació d'ones no homogènia.

## Apèndix A: Taula de primitives

Per a la comoditat del lector, recollim en aquest apèndix algunes de les primitives més usuals que apareixen al llarg del text. Una taula molt més completa es troba al llibre *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, citat a la bibliografia.

1. $\int (uv') = uv - \int (vu')$ .
2. $\int (a^u u') = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0.$
3. $\int (u' \cos u) = \sin u + C.$
4. $\int (u' \sin u) = -\cos u + C.$
5. $\int (ax + b)^n = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$
6. $\int (ax + b)^{-1} = \frac{1}{a} \ln  ax + b  + C.$
7. $\int x(ax + b)^{-1} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln  ax + b  + C.$
8. $\int x(ax + b)^{-2} = \frac{1}{a^2} \left[ \ln  ax + b  + \frac{b}{ax + b} \right] + C.$
9. $\int \frac{1}{x(ax + b)} = \frac{1}{b} \ln \left  \frac{x}{ax + b} \right  + C.$
10. $\int (\sqrt{ax + b})^n = \frac{2}{a} \frac{(\sqrt{ax + b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2.$

11.	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}.$
12. a)	$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad \text{si } b < 0.$
b)	$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left  \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right  + C, \quad \text{si } b > 0.$
13.	$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} + C.$
14.	$\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
15.	$\int \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x+a}{x-a} \right  + C.$
16.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arg} \sinh \frac{x}{a} + C = \ln \left  x + \sqrt{a^2+x^2} \right  + C.$
17.	$\int \sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arg} \sinh \frac{x}{a} + C.$
18.	$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left  \frac{a + \sqrt{a^2+x^2}}{x} \right  + C.$
19.	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C.$
20.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
21.	$\int \sqrt{a^2-x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$
22.	$\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{8} x \sqrt{a^2-x^2} (a^2-2x^2) + C.$
23.	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left  \frac{a + \sqrt{a^2-x^2}}{x} \right  + C.$
24.	$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = -\arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$

25.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$
26.	$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left  \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right  + C.$
27.	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$
28.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Arg} \cosh \frac{x}{a} + C = \ln \left  x + \sqrt{x^2 - a^2} \right  + C.$
29.	$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \text{Arg} \cosh \frac{x}{a} + C.$
30.	$\int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \text{Arg} \cosh \frac{x}{a} + C.$
31.	$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \left  \frac{x}{a} \right  + C.$
32.	$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} = \text{Arg} \cosh \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C.$
33.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{2} \text{Arg} \cosh \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + C.$
34.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left  \frac{x}{a} \right  + C = \frac{1}{a} \arccos \left  \frac{a}{x} \right  + C.$
35.	$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C.$
36.	$\int \frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}} = \arcsin \left( \frac{x - a}{a} \right) + C.$
37.	$\int \sqrt{2ax - x^2} = \frac{x - a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left( \frac{x - a}{a} \right) + C.$
38.	$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} = \sqrt{2ax - x^2} + a \arcsin \frac{x - a}{a} + C.$
39.	$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} = -2\sqrt{\frac{2a - x}{x}} - \arcsin \left( \frac{x - a}{a} \right) + C.$

40.	$\int \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \arcsin \frac{x-a}{a} - \sqrt{2ax - x^2} + C.$
41.	$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a} \frac{\sqrt{2a-x}}{x} + C.$
42.	$\int \sin ax = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$
43.	$\int \cos ax = \frac{1}{a} \sin ax + C.$
44.	$\int \sin^2 ax = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C.$
45.	$\int \cos^2 ax = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C.$
46.	$\int \sin^n ax = \frac{-\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax.$
47.	$\int \cos^n ax = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax.$
48.	a) $\int \sin ax \cos bx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2.$ b) $\int \sin ax \sin bx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2.$ c) $\int \cos ax \cos bx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2.$
49.	$\int \sin ax \cos ax = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C.$
50.	$\int \sin^n ax \cos ax = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1.$
51.	$\int \frac{\cos ax}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln  \sin ax  + C.$
52.	$\int \cos^n ax \sin ax = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1.$
53.	$\int \frac{\sin ax}{\cos ax} = -\frac{1}{a} \ln  \cos ax  + C.$

54. $\int \sin^n ax \cos^m ax = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax$ , $n \neq -m$ (si $n = -m$ , useu n.86.)
55. $\int \sin^n ax \cos^m ax = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax$ , $m \neq -n$ (si $m = -n$ , useu n.87.)
56. $\int x \sin ax = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C.$
57. $\int x \cos ax = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C.$
58. $\int \operatorname{tg} ax = -\frac{1}{a} \ln  \cos ax  + C.$
59. $\int \operatorname{cotg} ax = \frac{1}{a} \ln  \sin ax  + C.$
60. $\int \operatorname{tg}^2 ax = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax - x + C.$
61. $\int \operatorname{cotg}^2 ax = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax - x + C.$
62. $\int \sec ax = \frac{1}{a} \ln  \sec ax + \operatorname{tg} ax  + C.$
63. $\int \operatorname{cosec} ax = -\frac{1}{a} \ln  \operatorname{cosec} ax + \operatorname{cotg} ax  + C.$
64. $\int \sec^2 ax = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C.$
65. $\int \operatorname{cosec}^2 ax = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} ax + C.$
66. $\int \arcsin ax = x \arcsin ax + \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C.$
67. $\int \arccos ax = x \arccos ax - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2} + C.$

68.	$\int \operatorname{arctg} ax = x \operatorname{arctg} ax - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2 x^2) + C.$
69.	$\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$
70.	$\int b^{ax} = \frac{1}{a \ln b} b^{ax} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$
71.	$\int x e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C.$
72.	$\int x^n e^{ax} = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}.$
73.	$\int e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$
74.	$\int e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$
75.	$\int \ln ax = x \ln ax - x + C.$
76.	$\int x^n \ln ax = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1.$
77.	$\int x^{-1} \ln ax = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 + C.$
78.	$\int \frac{1}{x \ln ax} = \ln  \ln ax  + C.$
79.	$\int \sinh ax = \frac{1}{a} \cosh ax + C.$
80.	$\int \cosh ax = \frac{1}{a} \sinh ax + C.$
81.	$\int x \sinh ax = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax + C.$
82.	$\int x \cosh ax = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax + C.$

$$83. \int \tanh ax = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax) + C.$$

$$84. \int \operatorname{cotgh} ax = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax| + C.$$

$$85. \int \operatorname{cosech} ax = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + C.$$

## Apèndix B: Les funcions d'Euler

Al llarg del text hem suposat conegudes, en diferents punts, com ara quan hem establert la fórmula de Dirichlet, les funcions  $\Gamma$  i  $B$  d'Euler. En aquest breu apèndix recordem la definició d'aquestes funcions, així com algunes de les fórmules associades.

### La funció gamma: $\Gamma$

Si  $x > 0$ , es defineix la funció  $\Gamma$  com la integral impròpia

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

La funció  $\Gamma$  està ben definida (en el sentit que és una integral convergent) per a tot  $x > 0$ , i és una funció  $C^\infty$  per a aquests valors. La propietat fonamental de  $\Gamma$  és la relació funcional que estableix el resultat següent.

**Proposició.**  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

En efecte, el resultat se segueix d'integrar per parts:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \quad \blacksquare$$

Com que  $\Gamma(1) = 1$ , de la proposició anterior se segueix que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

A més, al capítol 2 hem provat que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

d'on se segueix que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

## La funció beta: $B$

Per a  $x, y > 0$  es defineix la funció beta d'Euler per

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

De les propietats de la funció  $B$  destaquem:

### Proposició.

1.  $B(x, y) = B(y, x)$ .
2.  $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta$ .
3.  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ .
4.  $B(x, y) = \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{(1+v)^{x+y}} dv$ .

La primera propietat és clara. Quant a la segona, considerem el canvi de variable

$$t = \sin^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Aleshores, es té que

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-2} \theta \cos^{2y-2} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Provem ara 3: en el producte  $\Gamma(x)\Gamma(y)$ ,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt,$$

fem el canvi de variable  $t = u^2$ ,  $t = v^2$  i calculem la integral resultant utilitzant coordenades polars:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-2} \cdot 2u du \cdot \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-2} 2v dv \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2-v^2} u^{2x-1} v^{2y-1} dudv \\ &= 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1} \theta r^{2y-1} \sin^{2y-1} \theta r dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \cdot 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-1} dr \\ &= B(x, y) \cdot \Gamma(x+y). \end{aligned}$$

Deixem la quarta propietat com a exercici. ■

La propietat 3, juntament amb el càlcul de  $\Gamma$  en els enters i els semienters, permet calcular la funció  $B$  en punts de coordenades enteres i semienteres. Per exemple,

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2}.$$

Conjugant les propietats 2 i 3 trobem que

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En particular,

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \cos^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+2}{2}\right)}.$$

Així, per exemple,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{96}.$$

# Apèndix C: Sistemes de coordenades curvilínies

Recollim aquí les fórmules dels operadors clàssics en sistemes ortogonals que hem provat al llarg del text, així com diversos exemples de sistemes ortogonals de coordenades.

## Sistema ortogonal de coordenades

Si  $(u, v, w)$  és un sistema ortogonal de coordenades, els coeficients de dilatació es defineixen per

$$h_1 = \|\varphi_u\|, \quad h_2 = \|\varphi_v\|, \quad h_3 = \|\varphi_w\|,$$

i la base ortonormal associada és

$$e_u = \frac{1}{h_1}\varphi_u, \quad e_v = \frac{1}{h_2}\varphi_v, \quad e_w = \frac{1}{h_3}\varphi_w.$$

Sigui  $f$  una funció escalar i  $F = F_u e_u + F_v e_v + F_w e_w$  un camp vectorial.

1. Gradient:  $\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} e_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} e_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} e_w.$

2. Rotacional:

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(h_3 F_w)}{\partial v} - \frac{\partial(h_2 F_v)}{\partial w} \right) e_u + \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial(h_1 F_u)}{\partial w} - \frac{\partial(h_3 F_w)}{\partial u} \right) e_v + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(h_2 F_v)}{\partial u} - \frac{\partial(h_1 F_u)}{\partial v} \right) e_w.$$

3. Divergència:  $\operatorname{div} F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(h_2 h_3 F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_w)}{\partial w} \right).$

4. Laplaciana:  $\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right).$

## Coordenades cilíndriques

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

1. Gradient:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z.$

2. Rotacional:

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial z} \right) e_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rF_z)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_z.$$

3. Divergència:  $\operatorname{div} F = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$

4. Laplaciana:  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$

### Coordenades esfèriques

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad y = r \cos \phi \sin \theta, \quad z = r \sin \phi.$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \cos \phi, \quad h_3 = r.$$

1. Gradient:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi.$

2. Rotacional:

$$\frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial(F_\theta \cos \phi)}{\partial \phi} \right) e_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r \cos \phi} \left( \frac{\partial(r \cos \phi F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) e_\phi.$$

3. Divergència:  $\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial(\cos \phi F_\phi)}{\partial \phi}.$

4. Laplaciana:  $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$

### Coordenades cilíndriques parabòliques

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z,$$

$$-\infty < u < \infty, \quad v > 0, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_3 = 1.$$

Les corbes coordenades són paràboles homofocals amb un eix comú.

**Coordenades cilíndriques el·líptiques**

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = z,$$

$$u \geq 0, \quad 0 < v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$h_1 = h_2 = a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad h_3 = 1.$$

Les corbes coordenades són el·lipses i hipèrboles homofocals.

**Coordenades esferoïdals allargades**

$$x = a \sinh \xi \sin \eta \cos \varphi, \quad y = a \sinh \xi \sin \eta \sin \varphi, \quad z = a \cosh \xi \cos \eta,$$

$$\xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$h_1 = h_2 = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_3 = a \sinh \xi \sin \eta.$$

# Bibliografía

1. Agulló, J.: *Mecànica de la partícula i del sòlid rígid*. Publ. OK-punt. Barcelona, 1995.
2. Apostol, T.: *Análisis matemático*. Ed. Reverté. Barcelona, 1981.
3. Bers, L. *Cálculo diferencial e integral*. Ed. Interamericana. México, 1972.
4. Budak, B. and Fomin, S. *Multiple Integrals, Fields Theory and Series*. Ed. Mir. Moscow, 1973.
5. Conde, C. *Cálculo Integral Vectorial*. Ed. Tebar Flores. Madrid, 1988.
6. Courant, R. and John, F. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Ed. Limusa. México, 1978.
7. Fernández Mills, G., Fernández Ferrer, J.: *Electricidad, teoría de circuitos y magnetismo*. Ed. UPC. Barcelona, 1995.
8. Feynman, R. et al.: *The Feynman lectures on physics*. Addison Wesley. Reading, 1964.
9. Garvan, E.: *The Maple book*. Chapman Hall/CRC. Boca Raton, 2002.
10. Greenspan, H. and Benney, D. *Calculus: an introduction to applied mathematics*. Ed. McGraw-Hill. New York, 1973.
11. McShane, E. *Unified integration*. Academic Press. Orlando, 1983.
12. Marsden, J. and Tromba, A. *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Longman. México, 1998.
13. Puerta, F. *Cálculo Integral*. CPDA-ETSEIB. Barcelona, 1973.
14. Puig Adam, P. *Cálculo Integral*. Biblioteca matemática. Madrid, 1970.
15. Rey Pastor, J.; Pi-Callaeja, P. and Trejo, C. *Análisis matemático*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires, 1957.
16. Spiegel, M. *Análisis Vectorial*. Schaum. McGraw-Hill. México, 1991.

17. Spiegel, M.; Avellanas, L. *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*. MacGraw-Hill. Madrid, 1988.
18. Trejo, C. *Análisis vectorial, con teoría del potencial y aplicaciones*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires, 1965.
19. White, F.M.: *Mecánica de fluidos*. MacGraw Hill. Mexico, 1983.

# Índex alfabètic

- additivitat de la integral, 20
- angle sòlid, 147
- àrea, 18, 65, 161
  - en coordenades curvilínies, 41
  - en polars, 66
  - superfície, 105, 108
  - superfície de revolució, 106
- camp
  - conservatiu, 138, 141, 163, 176
  - elèctric, 117
  - electroestàtic, 223
  - electromagnètic, 227
  - gradient, 122
  - gravitatori, 116
  - magnètic, 132
  - magnetoestàtic, 224
  - newtonià, 201
  - que deriva de potencial, 123, 141
  - solenoidal, 186
- camp vectorial, 115
  - pla, 116
- canvi de variables, 38
- centre de massa, 73
- cinta de Moebius, 149
- circulació d'un camp vectorial, 131
- coeficient de dilatació, 193
- condició de Lorentz, 229
- conjunt d'àrea zero, 15
- conjunt de volum zero, 22
- conjunt estrellat, 187
- convergència absoluta, 55
- coordenades
  - cilíndriques, 45, 46, 245
  - cilíndriques el·líptiques, 194, 247
  - cilíndriques parabòliques, 246
  - eferoïdals allargades, 247
  - esfèriques, 47, 48, 246
  - ortogonals, 192, 245
  - polars, 38, 42
- coordenades curvilínies, 38
- corba
  - tancada simple, 155
- corba associada, 88
- corba regular, 95
- corbes coordenades, 38, 99
- corrent de desplaçament, 227
- criteri de comparació, 55
- dalembertià, 229
- densitat, 70
- derivada
  - local, 215
  - material, 215
- derivada direccional, 121
- descomposició de Helmholtz, 214, 215
- divergència, 124, 127, 183, 197
- domini elemental, 18
- domini elemental , 22
- element
  - de longitud, 95
  - de superfície, 105
- equació
  - d'Ampère-Maxwell, 227

- de Bernouilli, 222
- de continuïtat, 217, 219
- de Laplace, 204
- del moviment d'Euler, 220
- d'ones, 228
- de Poisson, 203, 204
- equacions de Maxwell, 227
- fluid
  - incompressible, 218
  - perfecte, 219
- flux d'un camp vectorial, 145
- font, 184
- forma diferencial, 131, 145
- fórmula
  - de Dirichlet, 56
  - de Green
    - primera, 204
    - segona, 205
    - tercera, 205
  - de Simpson, 60, 62
  - dels trapezis, 59, 61
- funció
  - beta d'Euler, 242
  - gamma d'Euler, 241
  - hamònica
    - regular a l'infinit, 212
  - harmònica, 204
- funció integrable, 8, 11, 18, 52
- funció potencial, 123, 214
- gradient, 195
- integral, 11, 18, 22
  - de superfície, 109, 145
  - de trajectòria, 96
  - en un obert, 19
  - impròpia, 52
    - funció positiva, 53
  - superfície, 110
- integral de línia, 131
- integral iterada, 26, 28, 36
- jacobià, 39
- laplaciana, 129, 199
  - d'un camp vectorial, 129
- línia de flux, 118
- lleis
  - d'Ampère, 225
  - de Biot-Savart, 133
  - de Faraday, 227
  - de Gauss, 202
    - del camp magnètic, 192
- longitud d'una corba, 95
- massa, 71
- mitjana d'una funció, 69
- moment d'inèrcia, 77
- monotonia de la integral, 19
- operador nabla, 127
- orientació
  - compatible, 167
  - d'una corba, 135
  - d'una superfície, 149
  - de la vora, 167
- orientació oposada, 150
- paràmetre arc, 95
- parametrització
  - que inverteix l'orientació, 150
  - que preserva l'orientació, 150
- parametritzacions
  - oposades, 135
- partició regular, 9, 21
- potencial
  - electroestàtic, 223
  - gravitacional, 83
  - logarítmic, 200
  - newtonià, 201
  - retardat, 230
- potencial magnètic, 191
- potencial vector, 186, 214
- potencials electromagnètics, 229
- pou, 184
- principi de Cavalieri, 24
- principi del màxim, 210
- problema
  - de Dirichlet, 207
  - extern, 210

- de Neumann, 208
- procés estacionari, 216
- regió
  - sense forats, 190
  - simplement connexa, 155, 176
- regió poligonal, 15
- regla producte, 61
- rotacional, 126, 127, 172, 199
  - d'un camp pla, 127
- suma
  - de Riemann, 7
  - inferior, 10
  - superior, 10
- sumes
  - superiors, 21
- superfície
  - amb vora, 165
  - de nivell, 121
  - orientable, 148
  - orientada, 149
  - parametritzada, 99
  - regular, 100
  - revolució, 102
- teorema
  - canvi de variables, 41, 44
  - del rotacional, 168
  - divergència, 179
  - Fubini, 26, 27, 31, 32, 36
  - Gauss, 179
  - Green, 156
  - Guldin, 75, 76, 112
  - Newton-Leibniz, 139
  - Steiner, 80
  - Stokes, 168
  - valor mig, 20
    - primer, 209
    - segon, 210
- terme convectiu, 216
- trajectòria, 87
  - equivalència, 94
  - longitud, 90
  - longitud d'una, 89
  - oposada, 136
  - regular, 94
  - simple, 89
  - valor principal de Cauchy, 56
  - volum, 67, 183
    - cos revolució, 67, 75
  - vorticitat, 173