Definir els límits d'integració en dominis 3D ($\mathbb{R}^3$)

Càlcul 2 - Aula Lliure

Quim

Primavera 2017

Introducció

Estem a l'espai ($\mathbb{R}^3$) i els punts del domini tenen tres components: (x, y, z). El nostre domini d'integració, que anomenarem W, és una "regió" de l'espai, és a dir un cos en 3 dimensions que ocupa un volum. La funció que integrarem sobre el domini 3D serà $t = \mathrm{f}(x, y, z)$, que no té representació geomètrica (seria una 4a dimensió!)

Objectiu

A partir del domini d'integració W que ens descriuen a l'enunciat hem de definir els límits d'integració de les nostres 3 variables. Com?

1. La primera variable de constant a constant (de número a número)	$\mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}$
2. La segona variable en funció de la primera. Des d'una corba 2D a una altra corba 2D.	$\mathrm{h}_1(x) \leq y \leq \mathrm{h}_2(x)$
3. La tercera variable en funció de les altres dues. Des d'una superfície 3D a una altra superfície 3D.	$\mathrm{s}_1(x, y) \leq z \leq \mathrm{s}_2(x, y)$

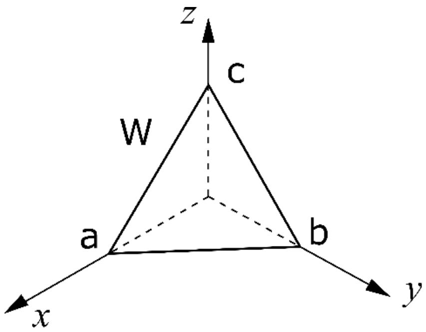
Notació

W	Domini 3D, delimitat per superfícies. $$\mathrm{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \ \mathrm{S}_1(x, y, z) \leq 0\ ,\ \ \mathrm{S}_2(x, y, z) \leq 0\ , \dots \}$$
$\mathrm{S}_1\ ,\ \mathrm{S}_2, \dots$	Superfícies que delimiten el volum. Una superfície a l'espai ($\mathbb{R}^3$) es descriu amb una equació. $$\mathrm{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \ \mathrm{S}(x, y, z) = 0\}$$
$\mathrm{C}_1,\ \mathrm{C}_2\ , \dots$	Corbes a l'espai ($\mathbb{R}^3$), són la intersecció de les superfícies que delimiten el volum. Una corba a $\mathbb{R}^3$ es descriu amb dues equacions. $$\mathrm{C}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \mathrm{S}_1(x, y, z) = 0\ , \quad \mathrm{S}_2(x, y, z) = 0\ \}$$
D	Domini pla (2 dimensions) que s'obté en projectar el domini W sobre un dels plans de projecció. A D només apareixen 2 variables. Per exemple, si projectem sobre el pla XY, obtenim $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dots \ \}$. $$\mathrm{D} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2: \ \mathrm{H}_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq 0\ , \dots \}$$
$\partial\mathrm{D}$	Corba en el pla ($\mathbb{R}^2$) , és la frontera del domini pla D. Per exemple, si projectem sobre el pla XY, obtenim $\mathrm{D} = \{(x, y): \ \dots \ \}$ i la frontera val: $$\partial\mathrm{D} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2: \ \mathrm{H}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0\ \}$$

Exemple 1

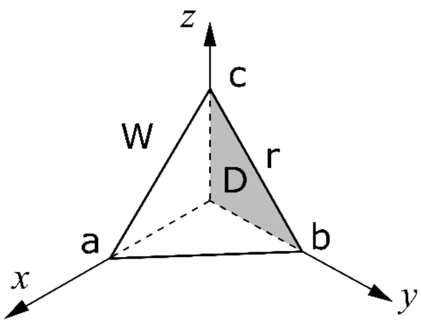
" W és el domini de $\mathbb{R}^3$ tancat pels plans: $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{y} = 0$, $\mathrm{z} = 0$ i $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = 1$.
Definir els límits d'integració de les tres variables."

0 Ens descriuen el domini d'integració W com a volum delimitat per superfícies (4 plans).
1 Fem un dibuix en 3 dimensions del domini W



Per dibuixar el pla $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = 1$ busquem la intersecció del pla amb els tres eixos:
Per exemple, la intersecció de l'eix x ($y = 0$, $z = 0$) i el pla $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} + \frac{z}{\mathrm{c}} = 1$ és el punt (a, 0,0).
Anàlogament trobem els punts: $(0, \mathrm{b}, 0)$ i $(0,0, \mathrm{c})$.

2 Projectem el cos W sobre un dels plans de projecció (pla XY, pla XZ o pla YZ) i obtenim el domini pla D , que depèn només de dues variables.



En aquest cas triem projectar sobre el pla YZ i el domini pla D dependrà només de z i y.
Idea: Fixeu-vos que el domini D és un triangle, delimitat per tres rectes: l'eix z, l'eix y i la recta r , que és la intersecció del pla $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}} = 1$ amb el pla ZY ($x = 0$).

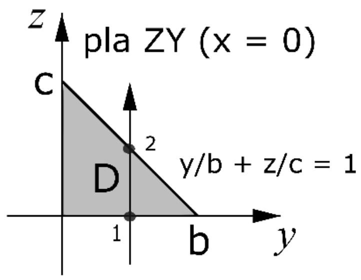
$$\text{eix z} = \{(x, y, z):\ x = 0\ ,\ \ y = 0\} \qquad \text{eix y} = \{(x, y, z):\ x = 0\ , z = 0\}$$

$$\mathrm{r} = \left\{(x, y, z):\ \frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} + \frac{z}{\mathrm{c}} = 1\ ,\ \ x = 0\right\} = \left\{(x, y, z):\ \frac{y}{\mathrm{b}} + \frac{z}{\mathrm{c}} = 1\ ,\ \ x = 0\right\}$$

Cada recta està descrita per dues equacions. D'aquestes dues, només ens interessa aquella equació on apareixen les variables (y, z), perquè estem projectant sobre el pla YZ , on $x = 0$.

D és el domini pla ($\mathbb{R}^2$) tancat per $y = 0$, $z = 0$ i $\frac{y}{\mathrm{b}} + \frac{z}{\mathrm{c}} = 1$

3 A partir del domini D definim les dues variables que hi intervenen. Fixeu-vos que això consisteix a definir els límits d'integració de dues variables a partir d'un domini 2D. Fàcil no?

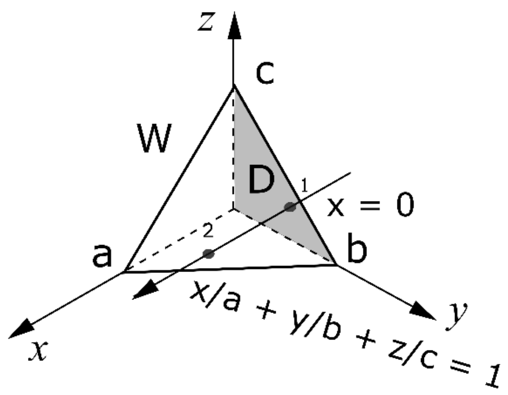


Escollim definir la y de constant a constant. Per tant, la y va de 0 a b (de número a número) i la z de la recta z = 0 a la recta $\frac{y}{\mathrm{b}}+\frac{z}{\mathrm{c}}=1$ (que expressada en funció de y és $\mathrm{z}(y)=\mathrm{c}-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}\mathrm{y}$)

Obtenim: $0 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{b}$

$0 \leq \mathrm{z} \leq \mathrm{c}-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}\mathrm{y}$

4 Ja només ens falta definir la 3a variable. Tornem al dibuix 3D del domini W i fem rectes paral·leles a l'eix de la tercera variable (variable que no apareix a D, en aquest exemple la x). Mirem amb quines dues superfícies $S_1(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=0$ i $\mathrm{S}_2(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=0$ interseca (talla) i expressem aquestes superfícies com a funcions explícites de les dues primeres variables.



En el nostre exemple, la recta paral·lela a l'eix x interseca amb el pla $x = 0$ i amb el pla $\frac{x}{\mathrm{a}}+\frac{y}{\mathrm{b}}+\frac{z}{\mathrm{c}}=1$.

Expressem aquestes superfícies en funció de la y i la z:

$x(y,z) = 0$ i $x(y,z)=\mathrm{a}\,(-\frac{y}{\mathrm{b}}-\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}}+1)$

Obtenim: $0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a}\,(-\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}-\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{c}}+1)$

Solució: $0 \leq y \leq \mathrm{b}\,,\;\; 0 \leq z \leq \mathrm{c}-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}y\,,\;\; 0 \leq x \leq \mathrm{a}\,(-\frac{y}{\mathrm{b}}-\frac{z}{\mathrm{c}}+1)$

(formalment) $\mathrm{W}=\left\{(x,y,z)\colon\; 0 \leq y \leq \mathrm{b},\; 0 \leq z \leq \mathrm{c}-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}y\,,\;\; 0 \leq x \leq \mathrm{a}\,(-\frac{y}{\mathrm{b}}-\frac{z}{\mathrm{c}}+1)\right\}$

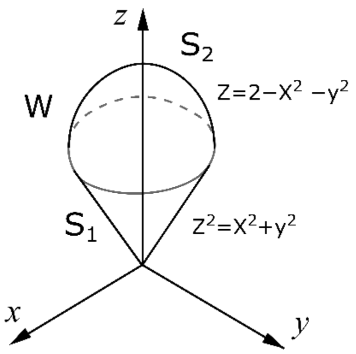
Exemple 2

"Definir els límits d'integració de les tres variables a partir del domini W de $\mathbb{R}^3$ "

$$W = \{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 \leq z^2\, ,\ z \leq 2 - x^2 - y^2\, ,\ z \geq 0\ \}$$

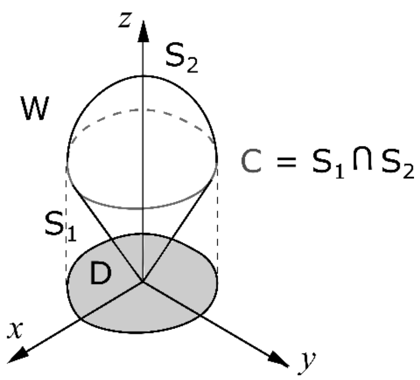
0 Ens descriuen el domini d'integració W amb inequacions. Cada inequació correspon a una superfície.

1 Fem un dibuix en 3 dimensions del domini W. Per a cada inequació, dibuixem primer la superfície (agafant la inequació com si fos una igualtat) i després ens quedem amb la "part" de l'espai $\mathbb{R}^3$ que ens indica el sentit ($\leq$ o $\geq$) de la inequació.



En l'exercici: $x^2 + y^2 = z^2$ és un con i la desigualtat $\leq$ ens indica la part interior del con. $z = 2 - x^2 - y^2$ és un paraboloide cap per avall, que passa pel punt (0,0,2) i la desigualtat $\leq$ ens indica la part inferior. $z = 0$ és el pla horitzontal i ens quedem amb els punts d'altura positiva.

2 Projectem el cos W sobre un dels plans de projecció (pla XY, pla XZ o pla YZ) i obtenim el domini pla D , que depèn només de dues variable (per tant, D és la projecció de W sobre el pla XY) .



En aquest cas triem projectar sobre el pla XY i el domini pla D dependrà només de x i y.

Idea: fixeu-vos que la frontera de D correspon a la projecció de la corba C! Això ens simplificarà molt el problema, perquè només haurem de projectar la corba C sobre el pla XY.

Busquem la corba C, que és la intersecció de S_1 i S_2.

$$C = \{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 = z^2 \ , \ \ z = 2 - x^2 - y^2 \ \ \text{amb } z \geq 0\}$$

Per trobar la projecció de C sobre el pla XY només s'ha de trobar quina és la relació entre les variables (x, y) dels punts que pertanyen a la corba.

Per tant, jugant amb les dues equacions inicials que defineixen C hem de trobar una nova expressió on només apareguin la x i la y. Com?

$$\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \\ z = 2 - z^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \\ z = 1 \ , \ \ \cancel{z = -2} \ (z \geq 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 1^2 \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$$

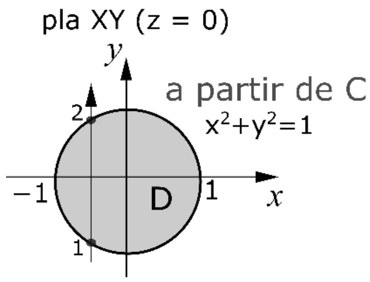
Ja està! $x^2 + y^2 = 1^2$ és la projecció de la corba C sobre el pla XY i, com hem vist en fer en fer el dibuix, la projecció de la corba C és la frontera de D (anomenada ∂D)

$$\partial D = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 = 1 \}$$

Per tant el domini pla D és:

$$D = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

3 A partir del domini D definim les dues variables qui hi intervenen. Fixeu-vos que això consisteix a definir els límits d'integració de dues variables a partir d'un domini 2D. Fàcil no?

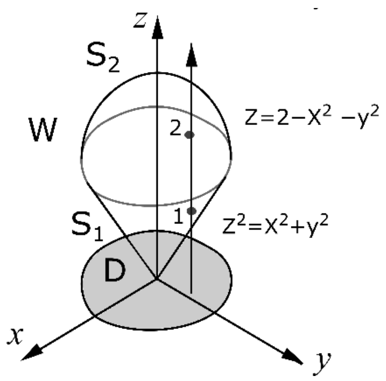


Escollim definir la x de constant a constant. Per tant, la x va de -1 a 1 i la y va de la part inferior de $x^2 + y^2 = 1$ a la part superior de $x^2 + y^2 = 1$.
Expressant la y en funció de la x: la part inferior és $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ i la part superior és $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Obtenim:

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

4 ja només ens falta definir la 3a variable. Tornem al dibuix 3D del domini W i fem rectes paral·leles a l'eix de la tercera variable (variable que no apareix a D, en aquest cas la z). Mirem amb quines dues superfícies $S_1(\mathrm{x,y,z}) = 0$ i $\mathrm{S}_2(\mathrm{x,y,z}) = 0$ interseca (talla) i expressem aquestes superfícies com a funcions explícites de les dues primeres variables.



En el nostre exemple, la recta paral·lela a l'eix z interseca primer amb el con $x^2 + y^2 = z^2$ i després amb paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Expressem aquestes superfícies en funció de la y i la x: $z(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

Obtenim: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$

Solució: $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$

(formalment) $\mathrm{W} = \Big\{(x,y,z): \ -1 \leq x \leq 1 \ , -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \ , \ldots$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\Big\}$$

Exemple 3 - Canvi a polars per definir D

Tornem a l'exercici de l'Exemple 2:

"Definir els límits d'integració de les tres variables a partir del domini W de $\mathbb{R}^3$ "

$$\mathrm{W} = \{(x,y,z): \ x^2 + y^2 \leq z^2 \ , \ z \leq 2 - x^2 - y^2 \ , \ z \geq 0 \ \}$$

Imagineu que ja hem dibuixat el domini W i hem trobat D, que és la projecció del domini W sobre el pla XY.

Tot això seguint exactament els mateixos passos explicats a l'apartat *Exemple 2*.

Hem arribat a: $\mathrm{D} = \{(x,y): \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

I ara comença la part "nova" o "diferent" ...

3' Partim de: $\mathrm{D} = \{(x, y): \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Fixeu-vos que això és un cercle. Per tant, en lloc de definir-lo en coordenades cartesianes (x, y) (com hem fet abans) podem fer un canvi de variables i utilitzar coordenades polars (r, θ).

Recordeu que les coordenades polars funcionen molt bé si treballem amb cercles!
Fem el canvi : $x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$ amb $r \geq 0$ i $0 \leq 0 \leq 2\pi$

I la regió D^* en les noves variables serà: (ben fàcil!):

$$\mathrm{D}^* = \{(r, \theta): \ 0 \leq r \leq 1 \,, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

(Per trobar D^* només hem d'aplicar el canvi de variables sobre les inequacions que defineixen D i tenir en compte que $r \geq 0$ i $0 \leq 0 \leq 2\pi$)

Per tant els nous límits d'integració són:

$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

4' En l'*Exemple 2*, treballant amb coordenades cartesianes hem definit els límits d'integració de la variable z des del con fins al paraboloide. Ens ha quedat:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \mathrm{z} \ \leq 2 - x^2 - y^2$$

Però aquest cop, quan hem definit el domini D hem decidit fer el canvi de variables $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ per simplificar el problema.

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$$

Per tant ara hem d'aplicar el mateix canvi de variables sobre els límits d'integració de la variable z! (És a dir, aplicar el canvi de variables sobre les superfícies que delimiten el volum)
Obtenim:

$$r \leq z \ \leq 2 - r^2$$

Més senzill no?

Solució: $0 \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ r \leq \mathrm{z} \ \leq 2 - r^2$

(formalment) $\mathrm{W}^* = \{(r, \theta, z): \ 0 \ \leq r \leq 1 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \,, \ r \leq z \ \leq 2 - r^2\}$

Important: No oblideu que hem fet un canvi de variables i ja no estem treballant amb coordenades cartesianes. Per tant, hem d'afegir el Jacobià $\mathrm{J} = \mathrm{r}$ a l'hora d'integrar!
$(\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta)$: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

Exemple 4

Tornem un altre cop l'exercici de l'Exemple 2:

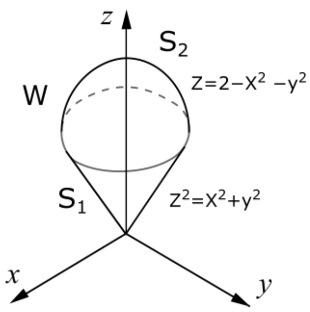
"Definir els límits d'integració de les tres variables a partir del domini W de $\mathbb{R}^3$ "

$$W = \{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \,,\ z \leq 2 - x^2 - y^2 \,,\ z \geq 0 \ \}$$

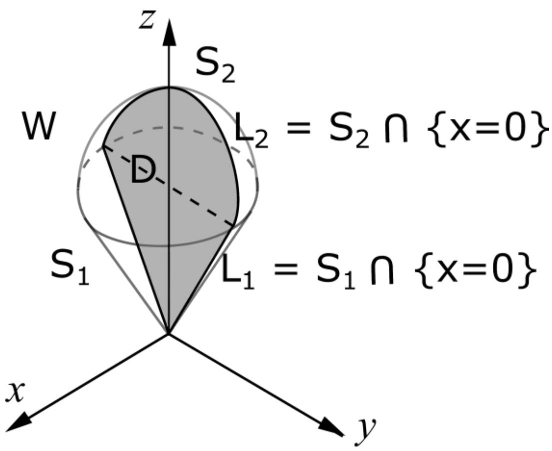
És el mateix exercici que abans, però ara definirem el domini seguint un ordre diferent, és a dir, projectant sobre el pla YZ en comptes del pla XY, com havíem fet prèviament a l'*Exemple 2.*

Els passos **0** i **1** són exactament iguals que en la resolució de l'*Exemple 2*. Torneu a revisar-los abans de continuar!

0 i **1** . Ja hem fet el dibuix del domini W.



2 Aquest cop projectem el cos W sobre el pla ZY i obtenim el domini pla D, que dependrà només de y i z.



Idea: en aquest cas, la projecció D està delimitada per les interseccions (L_1 i L_2) de les nostres superfícies (S_1 i S_2) amb el pla YZ ($x = 0$).

Les interseccions són corbes, anem a buscar-les!

Intersecció de:

Con amb el pla YZ : $L_1 = \{(x, y, z): \ x^2 + y^2 = z^2 \ , \ x = 0 \ , \ z \geq 0\}$

$L_1 = \{(x, y, z): \ y^2 = z^2 \ , \ x = 0 \ , \ z \geq 0\}$

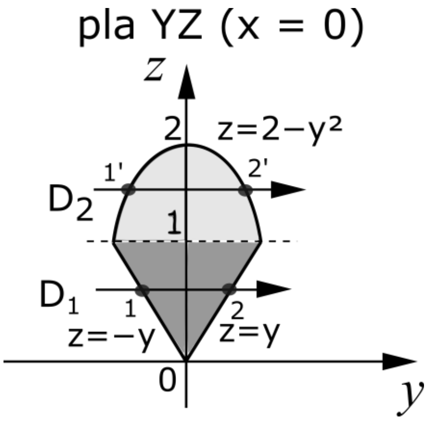
Paraboloide amb el pla YZ: $L_2 = \{(x, y, z): \ z = 2 - x^2 - y^2 \ , \ x = 0 \ , \ z \geq 0\}$

$L_2 = \{(x, y, z): \ z = 2 - y^2 \ , \ x = 0 \ , z \geq 0\}$

Cada corba (L_1 i L_2) està definida per dues equacions. D'aquestes dues, només ens interessa aquella equació on apareixen les variables (y, z), perquè estem projectant sobre el pla YZ , on $x = 0$. L'equació del con $y^2 = z^2$ defineix dues rectes: $y = z$ i $y = -z$.

D és el domini pla ($\mathbb{R}^2$) tancat per $y = z$, $y = -z$, $z = 2 - y^2$ i $z \geq 0$

3 A partir del domini D definim les dues variables que hi intervenen. Fixeu-vos que això consisteix a definir els límits d'integració de dues variables a partir d'un domini 2D. Fàcil no?



Bé, aquest domini no és tan fàcil. L'hem de dividir en dos trossos: $D = D_1 + D_2$.

Definim la z de constant a constant. (En el següent pas veurem perquè és millor triar aquest ordre).

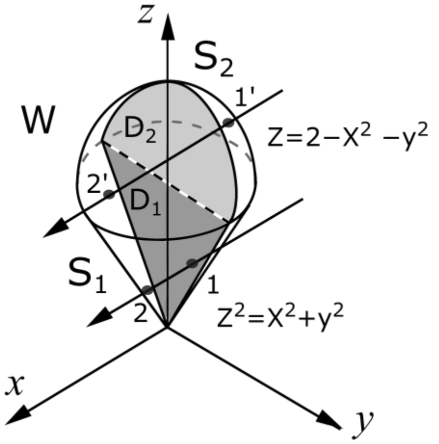
En el domini D_1, la z va de 0 a 1 i la y de la recta $y = -z$ a la recta $y = z$.

En el domini D_2, la z va de 1 a 2 i la y del cantó esquerra del paraboloide $z = 2 - y^2$ al cantó dret. Expressant la y en funció de la z: la y va de $y(z) = -\sqrt{2 - z}$ a $y(z) = \sqrt{2 - z}$.

Obtenim: $D = D_1 + D_2$

D_1: $0 \leq z \leq 1$, $-z \leq y \leq z$ $\qquad$ D_2: $1 \leq z \leq 2$, $-\sqrt{2 - z} \leq y \leq \sqrt{2 - z}$

4 Ja només ens falta definir la 3a variable. Tornem al dibuix 3D del domini W i fem rectes paral·leles a l'eix de la tercera variable (variable que no apareix a D, en aquest cas la x). Mirem amb quines dues superfícies $S_1(\mathrm{x,y,z}) = 0$ i $\mathrm{S}_2(\mathrm{x,y,z}) = 0$ interseca (talla) i expressem aquestes superfícies com a funcions explícites de les dues primeres variables.



En aquest exemple, hem dividit el domini D en dos subdominis D_1 i D_2. Per tant, ara hem de buscar els extrems d'integració de la variable x a D_1 i D_2 per separat .

Sobre el domini D_1, la recta paral·lela a l'eix x interseca primer amb la part de darrere del con $x^2 + y^2 = z^2$ i després amb la part de davant del mateix con. Expressant aquestes superfícies en funció de la y i la z, la x va de $x(y,z) = -\sqrt{z^2 - y^2}$ a $x(\mathrm{y,z}) = \sqrt{z^2 - y^2}$

Sobre el domini D_2, la recta paral·lela a l'eix x interseca primer amb la part de darrere del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ i després amb la part de davant del mateix paraboloide. Per tant, la x va de $x(y,z) = -\sqrt{2 - z - y^2}$ a $x(y,z) = \sqrt{2 - z - y^2}$

Obtenim: Sobre D_1: $-\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2}$

Sobre D_2: $-\sqrt{2 - z - y^2} \leq x \leq -\sqrt{2 - z - y^2}$

Solució: $\mathrm{W} = \mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2$

W_1: $0 \leq z \leq 1$, $-z \leq y \leq z$, $-\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2}$

W_2: $1 \leq z \leq 2$, $-\sqrt{2-z} \leq y \leq \sqrt{2-z}$, $-\sqrt{2 - z - y^2} \leq x \leq \sqrt{2 - z - y^2}$

Formalment

$\mathrm{W}_1 = \left\{(x,y,z): 0 \leq z \leq 1 \ , \ -z \leq y \leq z \ , \ -\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2}\right\}$

$\mathrm{W}_2 = \left\{(x,y,z): 1 \leq z \leq 2 \ , \ -\sqrt{2-z} \leq y \leq \sqrt{2-z} \ , \ldots\right.$

$\left. , -\sqrt{2 - z - y^2} \leq x \leq \sqrt{2 - z - y^2}\right\}$

Exercicis

Exercici 1

W és el domini de $\mathbb{R}^3$ tancat per: $y = 3x$, $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$ i $z = 0$ amb $z \geq 0$ i $x \geq 0$

a. Definir els límits d'integració de les tres variables projectant sobre el pla YZ
b. ... projectant sobre el pla XZ
c. ... projectant sobre el pla XY

Nota: $y^2 + z^2 = 9$ és un cilindre extruït al llarg de l'eix x. Estem a $\mathbb{R}^3$, per tant, $y = 3x$ és un pla, no pas una recta!

Exercici 2

Definir els límits d'integració de les tres variables a partir del domini W de $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 \leq z \leq x + y + \frac{1}{2}\right\}$$

a. Treballant sempre amb coordenades cartesianes.
b. Fent un canvi de variables que ens permeti expressar el domini pla D de manera més fàcil.

Nota: $x^2 + y^2 = z$ és un paraboloide i $z = x + y + \frac{1}{2}$ és un pla.