CALCULO II, INDUSTRIALES.

JORGE JIMÉNEZ URROZ

1. Fórmulas de Cuadratura

Hay funciones que, a pesar de ser integrables, no admiten ninguna primitiva que se pueda representar en términos de funciones elementales con lo que para su evaluación necesitamos métodos de aproximación del cálculo de integrales. Así pues se trata de aproximar numéricamente la integral

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Ahora bien, si f se aproxima bien por un polinomio $p(x)$, entonces la integral I tendrá un valor aproximado a

$$J = \int_a^b p(x)dx.$$

El primer paso sería aproximar la función por un polinomio de grado 1 que coincide con f en los extremos del intervalo

$$p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Integrando obtenemos

$$I \approx J = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b).$$

El polinomio es comparable al polinomio de Taylor, con lo que el error que se comete es del orden de $(b-a)^3$. Si queremos mejorar la aproximación utilizamos un polinomio de grado 2 que interpole la función tanto en los extremos del intervalo, como en el punto medio.

$$p(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + 4\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^2}\left(\frac{f(b)+f(a)}{2} - f((a+b)/2)\right).$$

Lo cual nos da el siguiente valor para la integral

$$J = \frac{b-a}{6}f(a) + \frac{2(b-a)}{3}f((a+b)/2) + \frac{b-a}{6}f(b),$$

con un error del orden de $(b-a)^5$. Se podrían obtener polinomios interpoladores que aproximan a la función en puntos equidistribuidos a lo largo del intervalo dando lugar a las fórmulas de Newton-Cotes. Todos estos métodos dan como resultado aproximado de la integral una fórmula del estilo

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i), \tag{1}$$

con lo que basta dar los pesos $w_1, \dots, w_n$ y los nodos $x_1, \dots, x_n$ para obtener el valor de la integral. Para mejorar la aproximación en vez de considerar nodos equidistribuidos consideramos puntos más generales.Así pues, tomando un polinomio interpolador de Lagrange en los nodos $x_1, \dots, x_n$ queda

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

y el valor aproximado de la integral será el de la fórmula (1) con

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx. \tag{2}$$

Ejemplo. Usando a regla de Simpson calculamos numéricamente el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} 3x^4 + 2x^2 = \frac{38}{15}.$$

En este caso se tiene

$$J = \frac{10}{3}.$$

El objetivo es encontrar los nodos de forma que la integral de el valor aproximado con el menor error posible con un polinomio del grado menor posible. Este es el que se llama método de cuadratura. Partimos de los polinomios de Legendre, polinomios solución de la ecuación diferencial

$$((1 - x^2) P_n'(x))' + n(n+1) P_n(x) = 0.$$

Concretamente se tiene la fórmula explícita

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}.$$

En particular, $\deg P_n(x) = n$. Los primeros polinomios tienen las fórmulas

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)
\end{aligned}$$

Teorema 1. *Los polinomios de Legendre son ortogonales, es decir, para $n \neq m$, se tiene*

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

Prueba. Multiplicando por P_n y P_m respectivamente la ecuación diferencial de cada uno de ellos y restando queda

$$n(n+1) - m(m+1)) P_n(x) P_m(x) = ((1 - x^2) P_m'(x))' P_n(x) - ((1 - x^2) P_n'(x))' P_m(x)$$

Desarrollando e integrando obtenemos

$$
\begin{aligned}
& (n(n+1)-m(m+1))\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)) = \\
= \; & \int_{-1}^{1} -2xP_n(x)P_m'(x)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n(x)P_m''(x)dx + \\
+ \; & \int_{-1}^{1} 2xP_m(x)P_n'(x)dx - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m(x)P_n''(x)dx = \\
= \; & (1-x^2)P_n(x)P_m'(x)\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx - \\
- \; & (1-x^2)P_m(x)P_n'(x)\big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

Como consecuencia se tiene para todo $n < m$,

$$\int_{-1}^{1} x^n P_m(x)dx = 0.$$

Teorema 2. *$P_n(x)$ tiene n raices reales simples todas en el intervalo* $[-1,1]$

Si tuviese menos raices, supongamos m formamos un polinomio de grado m con una raiz en cada uno de los ceros como combinación lineal de polinomios de Legendre de grado menor, que se puede pues los polinomios de Legendre son linealmente independientes, luego forman una base. El producto de este por P_k no cambia de signo en el intervalo $[-1,1]$, lo cual no puede ser pues es ortogonal a el .

Teorema 3. *(Gauss) Sean $x_1,\ldots,x_n$ los ceros del polinomio $P_n(x)$. Entonces La fórmula (2) con $x_1,\ldots,x_n$ los ceros de $P_n(x)$ es exacta para polinomios de grado* $2n-1$

Prueba. Dividiendo f entre P_n queda $f = qP_n + r$, con lo que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} qP_n + rdx = \int_{-1}^{1} r(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i r(x_i), = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

donde hemos utilizado las fórmulas de ortogonalidad.

Para cambiar de intervalo se utiliza un cambio de variable $mu + n = x$ tal que $n - m = a$, $m + n = b$ con lo que

$$\int_a^b f(x)dx = m\int_{-1}^{1} f(mu+n)du$$

Ejemplos. Fórmula de cuadratura con tres nodos. El polinomio tiene que ser ortogonal a 1 y a x^2, así que si le tomamos $c_3x^3 + c_1x$ lo será por ser impar el producto. Falta que sea ortogonal a x con lo que

$$\int_{-1}^{1} x(c_3x^3 + c_1x)dx = \frac{c_3}{5} + \frac{c_1}{3} = 0,$$

o bien $c_3 = 5$, $c_1 = -3$, es decir el polinomio es $P_3(x) = 5x^3 - 3x$. Sus raices son $-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$. Para encontrar los pesos, basta con integrar contra polinomios de grado hasta 5 y resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2 &= \int_{-1}^{1} 1dx = w_1 + w_2 + w_3 \\ 0 &= \int_{-1}^{1} xdx = w_1(-\sqrt{3/5}) + w_3(\sqrt{3/5}) \\ 2/3 &= \int_{-1}^{1} x^2dx = w_1(3/5) + w_3(3/5) \end{aligned}$$

quedando $w_1 = w_3 = 5/9$,$w_2 = 8/9$ y la fórmula de cuadratura será

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}(5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5}))$$

Tomando el polinomio $3x^4 + 2x^2$ efectivamente nos da un valor exacto. Tomando $f(x) = 2x^{10} - 6x^6 - x^4 + 3x^2$, queda

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0.3328,$$

mientras que el valor exacto es $96/385 \approx 0.24935$

2. Series de Fourier.

Aparecen como una generalización de espacios vectoriales de dimensión infinita, con el objetivo de escribir cualquier función suficientemente buena como combinación lineal, infinita, de los elementos de una base de funciones. Así pues vamos a generalizar los conceptos que a conocemos de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Definición 4. *Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, (que en nuestro caso será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es un conjunto con las siguientes propiedades.*

(1) *V es un grupo abeliano respecto de la suma.*
(2) *$a \cdot v \in V$ para todo $a \in K$, $v \in V$ y $1 \cdot u = u$.*
(3) *Se cumplen la propiedades distributivas $(a + b)u = au + bu$, y $a(u + v) = au + av$. Además $(ab)u = a(bu)$ para cualesquiera $a, b \in K$, $u, v \in V$.*

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.

Ejemplos. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}_k[x]$, $C^n(\mathbb{R})$..

Definición 5. *Dado un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una aplicación $<,>: V \times V \to K$ es un producto escalar, si*

(1) *Definida positiva $< v, v > \geq 0$ y $< v, v >= 0$ si y solo si $v = 0$.*
(2) *Hermítico $< u, v >= \overline{< v, u >}$*
(3) *Sesquilineal $< au + bv, w >= a < u, w > +b < v, w >$.*

Observación. Cuando el espacio vectorial es sobre $\mathbb{R}$, sesquilineal se convierte en lineal, y Hermítico en simétrico.

Ejemplo 6.

El espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$. Sobre los reales tenemos $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Ejemplo 7.

En el espacio de las funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, $C[a, b]$, se puede definir el producto escalar

$$< f, g >= \int_a^b f\overline{g}dx.$$

Ejemplo 8.

Se define el espacio $L^2[a, b]$ como es espacio cociente de las funciones de cuadrado integrable, (se utiliza la integración Lebesgue),

$$< f, f >= \int_a^b |f|^2 dx < \infty,$$

cociente las funciones no nulas en un conjunto de medida nula.

Definición 9. *Una norma asociada a un espacio vectorial real o complejo es una aplicación* $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

(1) $||v|| \geq 0$*, y sólo es cero si* $v = 0$.
(2) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$,
(3) $||av|| = |a|||v||$.

Dado un producto escalar, se tiene una norma asociada $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.

Teorema 10. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Prueba. Por ser el producto escalar definido positivo, y sesquilineal, se tiene para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq < u + tv, u + tv >= ||u||^2 + 2\,\mathrm{Re}(t < u, v >) + |t|^2 ||v||^2,$$

y escogiendo $t = -\frac{\overline{<u,v>}}{||v||^2}$, obtenemos

$$0 \leq ||u||^2 - \frac{| < u, v > |^2}{||v||^2},$$

que nos da el resultado.

Corolario 11. *(Desigualdad triangular) Sea* $||x|| = \sqrt{| < x, x > |}$. *Entonces*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Prueba.

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= < u + v, u + v >= ||u||^2 + 2\mathrm{Re}(< u, v >) + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2| < u, v > | + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Definición 12. *Una distancia asociada a un espacio vectorial real o complejo es una aplicación* $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

(1) $d(u,v) \geq 0$, *y sólo es cero si* $v = u$.
(2) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$,
(3) $d(u,v) = d(v,u)$.

Dada una norma, se tiene la distancia asociada $d(u,v) = ||u - v||$.

Dado que estaremos estudiando espacios de dimensión infinita, la forma de escribir una función como combinación lineal de otras se podrá utilizando infinitos elementos y, por tanto, el concepto de límite. Nos interesa saber en que sentido la combinación lineal converge a la función dada.

Definición 13. *En un espacio normado X, una sucesión $\{x_n\}$ converge a x si*

$$||x_n - x|| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

En particular si $\{\phi_n\}_{n\geq 0} \subset X$ una sucesión infinita. Entonces $x = \sum_n a_n\phi_n$ si

$$\lim_{N\to\infty} ||x - \sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n|| = 0.$$

Ejemplo.
Si tomamos en $C([0,1])$ las funciones $x_n(t) = t^n$, tenemos

$$\int_0^1 |t|^{2n}dt = \left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

con lo que $x_n(t)$ converge a la función 0. Obsérvese que, si cojemos el valor de $x_n(t)$ para cualquier $t \in [0,1)$, el límite es 0, mientras que $x_n(1) \to 1$, con lo que el límite puntual de esta sucesión de funciones no es contínua. De ahí la necesidad de introducir el espacio $L^2[0,1]$. Este, sin embargo, es un espacio completo y el límite de funciones en L^2 es una función de L^2.

Al igual que en $\mathbb{C}^n$, necesitamos encontrar una base de L^2 y un método de escribir cualquier función como combinación lineal de los elementos de la base.

Definición 14.
(a) *Se dice que dos vectores x, y son ortogonales si $< x, y >= 0$. Se dice que son normales si $||x|| = 1$.*
(b) *Una sucesión $\{x_n\}$ es ortogonal si $< x_n, x_m >= 0$ si $n \neq m$. Se dice ortonormal si, ademas, $||x_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplos. La sucesión $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{e^{int}\}$ es una sucesión ortonormal en $L^2[-\pi,\pi]$.
En efecto si $n \neq m$ se tiene

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \left.\frac{e^{i(n-m)t}}{n-m}\right|_0^{2\pi} = 0,$$

mientras que si $n = m$

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-int}dt = 2\pi.$$

La sucesión $\overline{x}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)$, $y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}(nt)$ es una sucesión ortonormal en $L^2[-\pi,\pi]$.

En efecto, teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}((n+m)t) = \mathrm{sen}(nt)\cos(mt)+\mathrm{sen}(mt)\cos(nt)$, y que $\cos((n+m)t) = \cos(mt)\cos(nt) - \mathrm{sen}(nt)\mathrm{sen}(mt)$, se tiene para $0 \leq n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(nt)\mathrm{sen}(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))dt = 0, \\
\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\cos((n+m)t) + \cos((n+m)t))dt = 0, \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(nt)\cos(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}((n+m)t) - \mathrm{sen}((n+m)t))dt = \\
&= (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))|_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nt)dt = \pi, \\
&\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nt)dt = \pi, \\
&\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi,
\end{aligned}$$

Teorema 15. *(Ortonormalización de Gram-Schmidt) Sea $\{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n, dots\}$ una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes de un espacio de Hilbert. Entonces existe otra $\{\phi_n\} = \{\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ ortonormal tal que $L(\{x_n\}) = L(\{\phi_n\})$.*

Prueba. Tomar $\phi_1 = x_1/||x_1||$, y $y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} < x_n, \phi_i > \phi_i$, $\phi_n = y_n/||y_n||$.

Ejemplo 16.

Tomar $x_n = t^n$ en $L^2[-1,1]$, y calcular hasta ϕ_5. Empezamos con $y_1 = 1$, que tiene norma

$$||y_1||^2 = \int_{-1}^1 1dt = 2,$$

con lo que $\phi_1 = 1/\sqrt{2}$. Ahora $y_2 = t - < t, 1 > 1/2$, y como

$$< t, 1 >= \int_{-1}^1 tdt = 0,$$

nos queda $y_2 = t$, que tiene como norma

$$||y_2||^2 = \int_{-1}^1 t^2dt = \frac{2}{3},$$

con lo que

$$\phi_2 = \sqrt{3/2}\,t.$$

$y_3 = t^2 - \frac{1}{2} < t^2, 1 > -\frac{3}{2} < t^2, t > t$, $< t^2, 1 >= \frac{2}{3}$, $< t^2, t >= 0$, con lo que $y_3 = t^2 - \frac{1}{3}$, y $||y_3||^2 = 8/45$.

$$\begin{aligned} y_4 &= t^3 - \frac{45}{8} < t^3, (t^2 - 1/3) > (t^2 - 1/3) - \frac{3}{2} < t^3, t > t - \frac{1}{2} < t^3, 1 > \\ &= t^3 - \frac{3}{5} t \end{aligned}$$

que tiene como norma $||y_4||^2 = 8/175.$, y de la misma forma se obtiene

$$y_5(t) = t^4 - \frac{6}{7} t^2 + \frac{3}{35}$$

que tiene como norma $||y_5||^2 = 128/11025$.

Definición 17. *Se dice que un espacio vectorial es separable si hay un sistema numerable denso.*

(a) *Todo sitema numerable denso se llama un sistema completo.*
(b) *Si $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal completo, se dice que es una base ortonormal.*
(c) *Si $x = \sum_n a_n \phi_n$, entonces $\sum_n a_n \phi_n$ se llama serie de Fourier de x respecto a $\{\phi_n\}$, y a_n el coeficiente de Fourier n-ésimo.*

Teorema 18. *Sea X un espacio Euclideo sobre K, $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal y $x = \sum_n a_n \phi_n$. Entonces $a_n =< x, \phi_n >$.*

Prueba. Si multiplicamos por ϕ_m se tiene

$$< \sum_n a_n \phi_n, \phi_m >= \lim_{N \to \infty} \sum_{n \leq N} a_n < \phi_n, \phi_m >= a_m.$$

Ejemplo 19.

$L^2[a, b]$ es un espacio separable, y $\left\{1, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right)\right\}$ es un sistema completo. Es decir, toda función $x(t) \in L^2[a, b]$ se puede expresar como $x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right) + \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right)$

Si el sistema $\{\psi_n\}$ es ortogonal, pero no ortonormal, entonces $\{\psi_n\}/||\{\psi_n\}||$ es ortonormal y

$$x = \sum_n a_n \phi_n.$$

teniendo en cuenta que $a_n =< x, \phi_n >$, nos queda

$$x = \sum_n < x, \phi_n > \phi_n = \sum_n \frac{< x, \psi_n >}{||\psi_n||^2} \psi_n,$$

y $\frac{< x, \psi_n >}{||\psi_n||^2}$ son los coeficientes de Fourier respecto al sistema $\{\psi_n\}$.

Ejemplo. $\{e^{int}\}$ es un sistema ortogonal completo en $L^2[-\pi, \pi]$. Como $||e^{int}||^2 = 2\pi$, tenemos que para cualquier función de $L^2[-\pi, \pi]$

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} a_k e^{ikt},$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt.$$

Esta se denomina la serie de Fourier compleja de $x(t)$. Por otro lado considerando el sistema ortogonal $\{1, \mathrm{sen}(nt), \cos(nt))\}$ tenemos la serie de Fourier trigonométrica

$$x(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \mathrm{sen}(nt),$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(nt)dt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\mathrm{sen}(nt)dt$$

Ejemplo 20.

Encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función $x(t) = t$ en $L^2[-\pi,\pi]$. En este caso

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = 0,$$

integrando por partes con $t = u$, $\cos(nt)dt = dv$ se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi n} t\,\mathrm{sen}(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(nt)dt = 0,$$

y por último, integrando de nuevo por partes con $t = u$, $\mathrm{sen}(nt)dt = dv$, se tiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{sen}(nt)dt = -\frac{1}{\pi n} t\,\cos(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

Por tanto, la serie de Fourier pedida es

$$2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sen}(nt).$$

Teorema 21. *$\{\phi_n\}$ es un sistema completo si y solo si $x = 0$ es el único vector ortogonal a todo el sistema.*

Observación. Que esté completo quiere decir que no falta ningún elemento en el sistema. Si, por ejemplo, quitamos el 1 al sistema del ejemplo anterior, entonces 1 será ortogonal a todo el sistema y no es el vector cero.

Teorema 22. *(de Pitágoras)Si x e y son ortogonales, entonces*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Prueba.

$$||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + 2\mathrm{Re} < x, y > +||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Como consecuencia se tiene el siguiente teorema

Teorema 23. *Un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ es completo si y solo si para todo $x \in X$*

$$||x||^2 = \sum_n | < x, \phi_n > |^2.$$

Prueba. Si es completo, entonces todo elemento de x se escribe como $x = \sum_n < x, \phi_n > \phi_n$. Ademas es inmediato ver que $x - s_N$ es perpendicular a ϕ_n para cualquier $n \leq N$, y por tanto al espacio generado por $< \phi_1, \dots, \phi_N >$ y en particular a s_N con lo que por el teorema anterior se tiene

$$||x||^2 = ||x - s_N||^2 + ||s_N||^2,$$

y tomando límite cuando $N \to \infty$ se obtiene el resultado ya que $||s_N||^2 = \sum_{n \leq N} | < x, \phi_n > |^2$. Por el contrario, si

$$||x||^2 = \sum_n | < x, \phi_n > |^2,$$

entonces

$$||x - s_N||^2 = ||x||^2 - ||s_N||^2$$

que tiende a cero por hipótesis, demostrando el resultado ya que el único vector de norma cero es el cero.

En general, si el sistema no es completo, se tiene una desigualdad

Teorema 24. *(Desigualdad de Bessel) Si $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal entonces*

$$\sum_n | < x, \phi_n > |^2 \leq ||x||^2.$$

Prueba. Basta con aplicar de nuevo el teorema de pitagoras con $x - s_N$ y s_N y observar que

$$||x - s_N|| \geq 0.$$

Corolario 25. *Si a_n es el coeficiente de Fourier de $x \in X$, con respecto a un sistema ortonormal, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.*

Teniendo en cuenta que s_N es perpendicular a $< \phi_1, \dots, \phi_N >$, tenemos

Teorema 26. *Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal. Entonces, para cualquier $\{d_n\} \subset K$, y cualquier $x \in X$ se tiene*

$$||x - s_N|| \leq ||x - \sum_{n \leq N} d_n \phi_n||.$$

Observación. El teorema anterior nos dice que la serie de Fourier es la mejor aproximación a x por elementos generados por $\{\phi_n\}$.

Prueba. Sea $D_N = \sum_{n \leq N} d_n \phi_n$. Como

$$x - D_N = x - s_N + s_N - D_N,$$

y $d_N - s_N \in < \phi_1, \dots, \phi_N >$, entonces $x - s_N \perp D_N - s_N$ y

$$||x - D_N||^2 = ||x - s_N||^2 + ||s_N - D_N||^2 \geq ||x - s_N||^2.$$

Ejemplos. Encontrar la mejor aproximación de la función escalón $u(t)$ por un polinomio de grado 4 en $L^2[-1, 1]$. En este caso tenemos el sistema ortonormal dado en el Ejemplo 16, y la mejor aproximación será

$$\sum_{i=1}^{5} < u(t), y_i > \frac{y_i}{||y_i||^2} = -175/160(t^3 - 3/5t) + 3/4t + 1/2 = -175/160t^3 + 45/32t + 1/2.$$

2.1. **Series de Fourier trigonométricas.** En el caso de la serie de Fourier trigonométrica, la convergencia se puede entender en sentidos más precisos

Teorema 27. *Sea $\tilde{x} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. y x su extensión periódica a $\mathbb{R}$. Si x es contínua a trozos y tiene derivadas laterales en t_0, entonces*

$$\frac{x(t_0)^+ + x(t_0)^-}{2} = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt_0) + \sum_{n\geq 1} b_n \mathrm{sen}(nt_0).$$

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función 2π-periódica definida como $x(t) = e^t$ en el intervalo $-\pi < t < \pi$. Usarla para determinar el valor de la cosecante y la cotangente hiperbólicas en π.

Los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi}.$$

En general, teniendo en cuenta las fórmulas para el resto de coeficientes de Fourier, se tiene para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t+int} dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+in} e^{(1+in)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{t}\pi \frac{(-1)^n \mathrm{senh}(\pi)}{1+in} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \mathrm{senh}(\pi)}{1+n^2}(1-in), \end{aligned}$$

con lo que

$$x(t) \sim \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(nt) - n\mathrm{sen}(nt))$$

En principio el símbolo $\sim$ es una identidad como funciones en $L^2[-\pi, \pi]$. Sin embargo, la función $x(t)$ es contínua a trozos, con la única discontinuidad en los múltiplos enteros de π, con lo que, por el Teorema 27 la igualdad en punto a punto y, en el putno π, queda

$$\begin{aligned} \cosh(\pi) &= \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(n\pi) - n\mathrm{sen}(n\pi)) = \\ &= \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} \left(1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}\right), \end{aligned}$$

con lo que

$$\mathrm{cotanh}(\pi) = \frac{1}{\pi} \left(1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}\right).$$

Por otro lado, evaluando en $t = 0$, la función es contínua en ese punto y queda

$$1 = \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

con lo que

$$\mathrm{cosech}(\pi) = \frac{1}{\pi} \left(1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$$

En el caso en el que el intervalo es distinto del $[-\pi,\pi]$, la base ortonormal es la descrita el Ejemplo 19 y todo se hace de forma análoga.

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier de la extensión periódica de $x(t)=|t|$ en $[-3,3]$. En este caso, los coeficientes de Fourier son

$$a_0=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}|t|dt=\frac{3}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}|t|\cos(nt)dt=\frac{2}{3}\int_{0}^{3}t\cos(nt)dt=\frac{6}{(n\pi)^2}((-1)^n-1),$$

mientras que $b_n=0$ por ser una función impar. Por tanto, la serie de Fourier queda

$$x(t)\sim\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

en el intervalo $[-3,3]$.

Notese que la función anterior, por se una función par, esta definida por el intervalo $[0,3]$ y solo tiene coeficientes de Fourier cosenos. Este es un hecho común a todas las funciones pares, definidas en intervalos $[-a,a]$ simétricos respecto del origen. Por otro lado, si la función es impar tendrá solo coeficientes senos, que se pueden calcular como el doble de la integral en el intervalo $[0,a]$.

Ejemplo 28.

La función $x(t)=t^2$, definida en $[-\pi,\pi]$ es una función par, y por tanto solo tiene coeficientes cosenos, quedando

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}t^2dt=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t^2\cos(nt)dt=\frac{4(-1)^n}{n^2},$$

con lo que

$$x(t)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Ejemplo. Consideramos la extensión periódica de la función $x(t)=\operatorname{sen}(et)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$. En este caso, por ser una función impar, basta calcular los coeficientes en senos, y queda

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(et)\operatorname{sen}(nt)dt=\frac{(-1)^n n}{e^2-n^2}\operatorname{sen}(e\pi),$$

con lo que

$$x(t)\sim\operatorname{sen}(e\pi)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n}{e^2-n^2}\operatorname{sen}(nt).$$

Podemos utilizar las fórmulas anteriores para funciones definidas en intervalos que empiezan en el origen. Efectivamente, si $x(t)$ esta definida en el intervalo $[0,\pi]$, entonces coincide con la función par definida en $[-\pi, \pi]$ con serie de Fourier con coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(t)dt,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t)\cos(nt)dt,$$

y también con la función impar definida en $[-\pi, \pi]$ con serie de Fourier con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t)\text{sen}(nt)dt,$$

Ejemplo. Si tomamos la función $x(t) = t^2 + t$, sumando los resultados en el Ejemplo 28 y en el Ejemplo 20 nos queda que tiene como serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$x(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}(nt).$$

sin embargo, como función definida en $[0, \pi]$ tendrá una serie de Fourier de senos dada por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (t^2 + t)\text{sen}(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2 + \pi}{n} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right),$$

mientras que la serie de Fourier de cosenos queda

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (t^2 + t)dt = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (t^2 + t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left((-1)^n\frac{2\pi + 1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Teorema 29. *Sea $x(t)$ contínua en $[-\pi, \pi]$, con derivada contínua a trozos y $x(\pi) = x(-\pi)$. Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a la función.*

Ejemplo. $x(t) = |t|$ tiene serie de Fourier que converge uniformemente en cualquier intervalo $[-a, a]$.

Teorema 30. *Sea $x(t)$ contínua, $x(\pi) = x(-\pi)$ con derivada contínua a trozos. Entonces la serie de Fourier de $x'(t)$ se obtiene derivando término a término la de $x(t)$ y tiene convergencia puntual a la función en cada punto en que $x''(t)$ existe.*

Prueba. El resultado se deduce integrando por partes en la definición de la serie de Fourier de la función derivada . Efectivamente, sea

$$x'(t) \sim \alpha_0 + \sum_{n\geq 1} \alpha_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} \beta_n \text{sen}(nt),$$

la serie de Fourier de la derivada, que existe por ser contínua a trozos. Entonces, por definición

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(x(\pi) - x(-\pi)) = 0,$$

e integrando por partes con $\cos(nt) = u$, $x'(t)dt = dv$, tenemos

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x'(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left(\cos(nt)x(t)|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\text{sen}(nt)dt\right) = na_n,$$

y de manera análoga

$$\beta_n = nb_n,$$

como queríamos probar. La convergencia puntual de la serie a la función se deduce del Teorema 27

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier de la función

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -3 \le t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \le 3 \end{cases}$$

La función dada es la derivada de $x(t) = |t|$ en cualquier punto distinto del 0 con lo que, teniendo en cuenta que

$$x(t) \sim \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

y derivando término a término nos queda

$$y(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(2n+1)}\text{sen}\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

Al igual que la serie de Fourier de la derivada se obtiene derivando, integrando la serie de Fourier se obtiene también un resultado interesante.

Teorema 31. *Sea $x(t) \in L^2[-\pi, \pi]$ una función contínua a trozos, y sea $X(t)$ una primitiva suya $X(t) = \int_{-\pi}^{t} x(u)du$. Entonces*

$$X(t) = a_0(t+\pi) + \sum_{n\ge 1}\frac{a_n}{n}\text{sen}(nt) - \sum_{n\ge 1}\frac{b_n}{n}(\cos(nt) - \cos(n\pi)),$$

converge uniformemente, donde $x(t)$ tiene como serie de Fourier

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{n\ge 1} a_n\cos(nt) + \sum_{n\ge 1} b_n\text{sen}(nt).$$

Prueba. Como $x(t)$ es contínua a trozos, tiene serie de Fourier que converge puntualmente a la función, además, por el Teorema 29 la convergencia es uniforme. Consideramos ahora $Y(t) = X(t) - \frac{a}{2\pi}t$ donde

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt.$$

De esta forma $Y(-\pi) = Y(\pi)$, y se puede aplicar el Teorema 30 con lo que la serie de Fourier de la derivada se obtiene derivando cada término. Por tanto, como $Y'(t) = x(t) - a/2\pi$, si

$$Y(t) = \alpha_0 + \sum_{n\ge 1}\alpha_n\cos(nt) + \sum_{n\ge 1}\beta_n\text{sen}(nt),$$

entonces

$$x(t) - \frac{a}{2\pi} \sim \sum_{n\ge 1} n\beta_n\cos(nt) - \sum_{n\ge 1} n\alpha_n\text{sen}(nt),$$

con lo que $\alpha_n = -b_n/n$, $\beta_n = a_n/n$. Por último, por la definición se tiene

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{a}{2\pi},$$

y evaluando en $t = -\pi$, queda

$$\frac{a}{2} = \alpha_0 - \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}\cos(n\pi),$$

de donde se deduce el resultado. Observar que, teniendo en cuenta ahora la serie de Fourier

$$t \sim 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sen}(nt),$$

se obtiene la serie de Fourier para la integral

$$X(t) = a_0\pi + \sum_{n\geq 1} \frac{(2a_0(-1)^{n+1} + a_n)}{n}\mathrm{sen}(nt) - \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}(\cos(nt) - \cos(n\pi)),$$

Ejemplo. Integrando la función $x(t) = t$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se obtiene

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Integrando de nuevo, queda

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\mathrm{sen}(nx).$$

2.2. **Ecuaciones en derivadas parciales.** Nos restringimos a ecuaciones en derivadas parciales en dos variables y de segunto orden. En ese caso se pueden reducir a tres tipos, parabólicas, hiperbólicas o elípticas, por analogía con las ecuaciones que describen las distintas cónicas. Concretamente cualquier ecuación de segundo orden se puede escribir como

$$a\phi_{xx} + 2b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g.$$

El tipo de ecuación se determina por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

con determinante d.

$$\begin{array}{rl} \text{si } d = 0 & \text{parabólicas,} \\ \text{si } d < 0 & \text{hiperbólicas,} \\ \text{si } A \text{ es definida positiva} & \text{elípticas.} \end{array}$$

Cuando a la ecuación se le añaden suficientes condiciones iniciales como para que la ecuación tenga solución única se le llama un problema de valores iniciales, o BVP.

Ejemplo. El ejemplo típico de una ecuación hiperbólica es la ecuación de ondas. Puedo modelar tanto el movimiento de una cuerda, como las ondas que se generan al lanzar una piedra en un estanque. En una dimensión la ecuación de una cuerda en movimiento $u(x,t)$ que describe la posición en el punto x en el momento t tiene la forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Esta ecuación, en prinicipio tiene infinitas soluciones. Vamos a suponer que la cuerda esta sobre el intervalo $[0,\pi]$, esta fija por los extremos, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ y que en el momento inicial conocemos tanto su posición como su velocidad, es decir, $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$, para $0<x<\pi$. Si fijamos el instante t, la función $u(x,t)$ esta definida en el intervalo $[0,\pi]$ y vale cero en los extremos. Si ahora hacemos su extensión impar, da una función contínua con existencia de derivada, por lo que se puede escribir en serie de Fourier como

$$u(x,t)=\sum_{k\geq 1} b_k(t)\mathrm{sen}(kx),$$

y suponiendo que es solución de la ecuación (3), obtenemos

$$\sum_{k\geq 1}(b_k''(t)+(ck)^2 b_k(t))\mathrm{sen}(kx)=0,$$

La solución debe tener coeficientes nulos, con lo que

$$b_k''(t)+(ck)^2 b_k(t)=0,$$

que tiene como soluciones

$$b_k(t)=A_k\cos(ckt)+B_k\mathrm{sen}(ckt),$$

por lo que

$$u(x,t)=\sum_{k\geq 1}(A_k\cos(ckt)+B_k\mathrm{sen}(ckt)\mathrm{sen}(kx).$$

Si ahora le imponemos la condición $u(x,0)=f(x)$, queda

$$\sum_{k\geq 1} A_k\mathrm{sen}(kx)=f(x),$$

con lo que, desarrollando en serie de Fourier de senos $f(x)$, tenemos

$$A_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{sen}(kx)dx,$$

mientras que de $u_t(x,0)=g(x)$,

$$\sum_{k\geq 1}(ckB_k\mathrm{sen}(kx)=g(x),$$

y desarrollando en serie de Fourier de senos la función g obtenemos

$$B_k=\frac{2}{ck\pi}\int_0^\pi g(x)\mathrm{sen}(kx)dx,$$

Tomando $f(x)=0$, $g(x)=\cos(x)$, $c=1$, nos queda $A_k=0$, mientras que

$$B_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{sen}(kx)dx=\frac{2}{k\pi}\int_0^\pi g(x)\mathrm{sen}(kx)dx=\begin{cases}\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{si } k \text{ par,}\\ 0 & \text{si } k \text{ impar.}\end{cases}$$

con lo que

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(4k^2-1)}\mathrm{sen}(2kt)\mathrm{sen}(2kx).$$

2.3. **Variables separables.** La ecuación parabólica por excelencia es la ecuación del calor que, en su forma más simple unidimensional tiene la siguiente forma

$$\phi_t = \phi_{xx}.$$

Supongamos que es una barra de longitud π cuya temperatura a los extremos se mantiene constante igual a cero, $\phi(0,t) = \phi(0,\pi) = 0$, y que en el instante inicial es $f(x)$ en el punto x, es decir, $\phi(x,0) = f(x)$, con lo que tendremos un BVP con solución única. Para resolverla Supondremos que la variable en el espacio y en el tiempo se pueden separar de la siguiente forma

$$\phi(x,t) = T(t)X(x),$$

con lo que, metiéndolo en la ecuación tenemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x),$$

o bien

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

y como son funciones de variables independientes, ambas han de ser constantes. Ademas, por las condiciones iniciales debe ocurrir que la temperatura decrece, con lo que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2, \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

o bien

$$T(t) = Ce^{-k^2 t}, \qquad X(x) = A\cos(kx) + B\mathrm{sen}(kx).$$

Si imponemos la condición inicial, debería quedar

$$f(x) = A\cos(kx) + B\mathrm{sen}(kx),$$

lo cual en general es imposible. Sin embargo, podemos considerar la expansión de Fourier de f como función impar en el intervalo $[-\pi,\pi]$, con lo que tenemos

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \mathrm{sen}(nx)$$

Así pues, tomando diferentes constantes $k \in \mathbb{N}$, tenemos que, por linealidad, la suma también será una solución, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales tenemos

$$\phi(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_n e^{-n^2 t}\mathrm{sen}(nx)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx.$$

Por último mencionar que el ejemplo de ecuación elíptica, omnipresente en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, es la ecuación del potencial, o de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{tt} = 0,$$

cuyas soluciones se llaman funciones armónicas.

3. Transformada de Laplace

A veces los fenómenos no aparecen dados por la función sino por la variación de la función. Por ejemplo en el siglo XIX Thomas Robert Malthus predijo que la humanidad se moriría de hambre, gracias a una ecuación diferencial. La población crece de forma proporcional a la cantidad de población en ese momento, mientras que la cantidad de alimentos sólo se podría aumentar de forma constante, es decir

$$\begin{aligned} P'(t) &= pP(t) \\ A'(t) &= a \end{aligned}$$

la solución de la primera es $P(t) = Ce^{pt}$, mientras que la segunda es $A(t) = c + at$. Si cada individuo necesita 1 alimento, queda que $\frac{A(t)}{P(t)} = M(c + at)e^{-pt} \to 0$.

El modelo de Kermack y McKendrick para las epidemias dice que si una población se divide en sanos, infectados y recuperados, $N = S + I + R$, su evolución viene dada por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\gamma SI \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma SI - \beta I \\ \frac{dR}{dr} &= \beta I \end{aligned}$$

Si suponemos que no hay población sana, los infectados decrecen de forma exponencial.

Necesitamos algun método para resolver ecuaciones diferenciales.

3.1. **Definición y convergencia.**

Definición 32. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la transformada de Laplace como*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

También se suele denotar por $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$.

Integrando por partes se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

transformando una ecuación diferencial en una ecuación algebraica para la función transformada. Por ejemplo la ecuación

$$P'(t) = pP(t),$$

queda

$$-P(0) + s\mathcal{L}\left\{P(t)\right\}(s) = p\mathcal{L}\left\{P(t)\right\}(s),$$

o lo que es lo mismo

$$\mathcal{L}\left\{P(t)\right\}(s) = \frac{P(0)}{s-p}.$$

Ejemplos.

La función exponencial

$$x(t) = e^{at},$$

tiene como transformada de Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

que tiene sentido para todo $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$.

Al estar definida por una integral impropia, debemos asegurarnos que la integral converge en algún sitio. De esta forma si tomamos la función $x(t) = e^{2t^2}$, entonces para cualquier $s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_0^\infty e^{2t^2} e^{-st} dt \geq \int_s^\infty e^{t^2} dt = \infty,$$

luego la función e^{2t^2} no admite transformada de Laplace. Es conveniente restringirnos al conjunto de funciones que admiten transformada de Laplace en algún conjunto.

Definición 33. *Se dice que una función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si $f(t) = O\left(e^{\alpha t}\right)$ para algún $\alpha > 0$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Si existe*

$$\sigma = \inf\{\alpha \,:\, f(t) = O(e^{\alpha t})\},$$

se dice que f tiene orden exponencial σ. Si no existe tal ínfimo el orden exponencial de la función es $-\infty$.

Ejemplos.

- Todo polinomio es de orden exponencial.
- Las funciones acotadas son de orden exponencial, por ejemplo $\mathrm{sen}(t)$ o $\cos(t)$.
- La exponencial es de orden exponencial.

Ejemplo. No tiene porque ser contínua para tener transformada de Laplace. Función escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

tiene como transformada de Laplace

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Esta función sólo tiene sentido si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Hay otro obstáculo para que la transformada de Laplace no converja, y es que la función tenga alguna singularidad en $[0, \infty)$. Por ejemplo la transformada de Laplace de la función $x(t) = \frac{1}{t}$ no existe, ya que la integral que define no es convergente. Sin embargo, hay veces que, a pesar de tener una singularidad, la integral converge. Así, haciendo el cambio de variable $t = u^2$, queda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^\infty e^{-su^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Por otro lado, el logaritmo es una función que, a pesar de tener una singularidad en el cero, crece tan despacio que todavía admite transformada de Laplace. Recuerdese que

$$\int_0^\infty \log t dt = \left. t\log t - t\right|_0^\infty = 0,$$

con que le la integral impropia que define la transformada de Laplace es convergente. Podemos calcularla gracias a la función Gamma. Concretamente, derivando en $\mathrm{Re}(s) > 0$ se tiene

$$\Gamma'(s) = \int_0^\infty \log t t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Evaluando en $s = 1$ queda

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty \log(t) e^{-t} dt,$$

Haciendo el cambio de variable $t = su$ queda

$$\Gamma'(1) = s\int_0^\infty \log(u) e^{-su} du + s\log s \int_0^\infty e^{-su} du,$$

con lo que en $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\log t\right\}(s) = \frac{\Gamma'(1) - \log s}{s}.$$

En general nos restringimos a funciones en la clase A, de las funciones contínuas a trozos, con discontinuidades de salto y de orden exponencial.

Lema 34. *Si $f(t)$ es de orden exponencial α, entonces $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ converge en el semiplano $Re(s) > \alpha$.*

Prueba. Metiendo el valor absoluto dentro de la integral se tiene

$$|\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M\int_0^\infty e^{(\alpha-\sigma)t} dt = \frac{M}{\sigma - \alpha}.$$

Ejemplo. $f(t) = t^n$ es de orden exponencial $\alpha = 0$, luego en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$ se tiene, intengrando por partes

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt,$$

con lo que, para todo $n \geq 1$ se tiene $I_n = \frac{n}{s} I_{n-1}$, e iterando obtenemos

$$I_n = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

en todo el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$. En general, para cualquier $\alpha > -1$, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{4}$$

3.2. **Propiedades.**

Lema 35. *La transformada de Laplace es lineal, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y toda pareja de funciones $f, g \in A$ de ordenes exponenciales $\alpha < \beta$, se tiene en Re$(s) > \beta$*

$$\mathcal{L}\left\{f + g\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{g\right\}(s).$$

Ejemplo. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la función $x(t) = \text{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$ tiene como transformada

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}(s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{iat}\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{e^{-iat}\right\}(s)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

siempre que Re$(s) > 0$. De la misma forma

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2},$$

para Re$(s) > 0$.

$\mathcal{L}\left\{\cosh(t)\right\}(s) = \frac{s}{s^2 - b^2}$, mientras que $\mathcal{L}\left\{\text{senh}(t)\right\}(s) = \frac{b}{s^2 - b^2}$, ambas definidas en Re$(s) > b$.

Lema 36. *Cambio de escala. Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$ definida en $\sigma > \alpha$. Entonces para todo $a > 0$, se tiene*

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),$$

en $\sigma > a\alpha$.

Prueba. Haciendo un cambio de variable $at = u$ queda

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-su/a}du = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}).$$

Ejemplo. Sea $y(t) = 2^n t^n$. Entonces

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{(2t)^n\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{n!}{(s/2)^{n+1}} = \frac{2^n n!}{s^{n+1}}.$$

Lema 37. *Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, y $a > 0$. entonces*

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Prueba. En efecto, Haciendo el cambio $t - a = u$, queda

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}(s) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = e^{-sa}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-sa}F(s).$$

Ejemplo. Sea $f(t) = \sqrt{t-1}$. Entonces, teniendo en cuenta el Lema anterior, y (4), se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = e^{-s}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = e^{-s}\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

Consideramos la función $f(t)$ definida a trozos por

$$S(t) = \begin{cases} \text{sen}(t) & \text{si } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t > 2\pi \end{cases}.$$

Entonces $f(t) = \mathrm{sen}(t)u(t) - \mathrm{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$, y por tanto

$$\mathcal{L}\left\{S(t)\right\}(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \left(1-e^{-2\pi s}\right)\frac{1}{s^2+1}.$$

Lema 38. *Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, $a \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{e^{-ta}f(t)\right\}(s) = F(s+a).$$

Prueba. Se sigue de la definición de la transformada.
Ejemplos.

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sqrt{t}\right\}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(s+1)^{3/2}}.$$

Corolario 39. *Si $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, entonces*

$$\mathcal{L}\left\{\cos(bt)f(t)\right\}(s) = \frac{F(s+ib)+F(s-ib)}{2}$$
$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(bt)f(t)\right\}(s) = \frac{F(s+ib)-F(s-ib)}{2}$$

Ejemplo. Si $C(t) = \frac{\cos(bt)}{\sqrt{t}}$, y $S(t) = \frac{\mathrm{sen}(bt)}{\sqrt{t}}$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{C(t)\right\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}+s}{s^2+b^2}},$$
$$\mathcal{L}\left\{S(t)\right\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}-s}{s^2+b^2}}$$

Para verlo, hay que tener en cuenta el corolario anterior y la identidad

$$\left(\sqrt{s+ib}+\sqrt{s-ib}\right)^2 = 2s + 2\sqrt{s^2+b^2}.$$

Para el seno la elección del signo viene dada por la definición de la función para $s > 0$.

Lema 40. *Sea $f(t)$ $k+1$ veces derivable en $\mathbb{R}^+$, con derivadas de cualquier orden en la clase A y $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\}(s) = s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

Prueba. Integrando por partes con $f'(t)dt = dv$ y $e^{-st} = u$ se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = \left. f(t)e^{-st}\right|_0^\infty + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s).$$

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}''(t) = -\mathrm{sen}(t)$, $\mathrm{sen}(0) = 0$ y $\mathrm{sen}'(0) = 1$, se tiene

$$-\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}''(t)\right\}(s) = s^2\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(t)\right\}(s) - 1,$$

de donde se obtiene la transformada de Laplace del seno.

Corolario 41.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Prueba. Se sigue del hecho de que si $I(t) = \int_0^t f(t)dt$, entonces $I'(t) = f(t)$, con lo que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{I'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{I(t)\}(s) - I(0),$$

de donde se sigue el resultado, pues $I(0) = 0$.

Corolario 42. *Sea $f(t)$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$ con derivada en la clase A y $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0) \tag{5}$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{6}$$

Prueba. Por el Lema 40 para $k = 1$ se tiene

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0).$$

Teniendo en cuenta que f' es de orden exponencial, y el Lema 34 la integral de la derecha tiende a cero cuando $s \to \infty$ lo que prueba (5). Para probar (6) intercambiamos el límite en la ecuación anterior e integramos obteniendo

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = sF(s) - f(0),$$

que es equivalente al resultado.

Una relación similar aparece al derivar la transformada de Laplace. Concretamente

Lema 43. *Sea $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ en $Re(s) > a$. Entonces en el mismo semiplano se tiene*

$$\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\}(s) = (-1)^k F^{(k)}(s).$$

Prueba. El resultado es inmediato derivando bajo el signo integral en la definición de transformada de Laplace.

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty t^k f(t)e^{-st}dt = (-1)^k \mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\}(s).$$

Observación 44. *El integrando en la transformada de Laplace es una función infinitamente diferenciable, con respecto de s, y sus derivadas tienen transformada convergente, con lo que la derivación bajo el signo integral está garantizada. Concretamente, $F(s)$ es una función analítica en el semiplano de convergencia.*

De nuevo, de un resultado sobre las derivadas se deduce uno sobre integrales.

Corolario 45. *Sea $f(t)$ dos veces derivable en $\mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(s)ds.$$

Prueba. Si llamamos $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, y $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$ entonces

$$F(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\}(s) = -G'(s),$$

y no tenemos más que integrar en el intervalo $(s, +\infty)$ para obtener

$$\int_s^\infty F(s) = G(s),$$

siempre y cuando $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$, lo cual es cierto por el Corolario 42.

Ejemplo. Sea $Si(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du$. Esta función es infinitas veces derivable. Por el corolario anterior se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

Como $Si(t)' = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$, podemos aplicar ahora el Lema 40 para obtener

$$\mathcal{L}\left\{Si(t)\right\}(s) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{s} = \frac{\arctan(1/s)}{s}.$$

Existe una fórmula cerrada para la transformada de Laplace de funciones periódicas.

Lema 46. *Sea $f(t)$ periódica de periodo T, contínua a trozos en $[0, T]$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(u)e^{-su} du.$$

Prueba.

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt,$$

y haciendo el cambio de variable $nT + u = t$, y usando que $f(t)$ es T-periódica queda

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) \quad &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u-nT)e^{-s(u+nT)}du = \sum_{n=0}^\infty e^{-sTn} \int_0^T f(u)e^{-su}du \\ &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(u)e^{-su}du.\end{aligned}$$

Ejemplo. $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$ es una función acotada, por tanto de orden exponencial 0, contínua, y periódica de periodo π, con lo que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)e^{-st}dt.$$

Para calcular la integral se puede hacer integrando dos veces por partes, o dandose cuenta de que nuestra integral es la parte imaginaria de una más sencilla.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)e^{-st}dt \quad &= \quad \operatorname{Im}\int_0^\pi e^{-(s-i)t}dt = \operatorname{Im}\frac{1}{i-s}e^{-(s-i)t}\Big|_0^\pi = \\ &= \quad \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-\pi s}+1}{s-i}\right) = \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1},\end{aligned}$$

con lo que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

En el espacio de funciones aparece una nueva operación que es la convolución.

Definición 47. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la convolución entre las dos como*
$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, en las aplicaciones a EDO's es que transforma la convolcuión en el producto.

Lema 48. *Sean f y g tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, $\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s)$. Entonces*
$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s),$$
en el semiplano de convergencia común a ambas.

Prueba.
$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(u)g(t-u)due^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)\int_u^\infty g(t-u)e^{-st}dtdu.$$
Haciendo el cambio de variable $t - u = x$ queda
$$\int_0^\infty f(u)\int_0^\infty g(x)e^{-s(x+u)}dxdu = \int_0^\infty f(u)e^{-su}du\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx = F(s)G(s).$$

Ejemplo. Sea $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Entonces
$$f*f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du = \beta(1/2, 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi.$$
Observese que, en este caso, la función convolución es la función escalon unitario, ya que la convolución es cero si $t < 0$. Por otro aldo
$$\mathcal{L}\left\{(\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{(\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s)\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \frac{\pi}{s},$$
que es la transformada de Laplace de la función $\pi u(t)$.

Aplicando la definición se tiene
$$\mathcal{L}\{\cos t * \mathrm{sen}(t)\}(s) = \int_0^t \cos(\tau)\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sen}(t)+\mathrm{sen}(t-2\tau)d\tau = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t).$$
Y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$, y que $\mathcal{L}\{\mathrm{sen} t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$, se obtiene
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(t)\right\}(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$
Notese que esto conicide con aplicar el Lema 43 con $k = 1$ y $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t)$.

De igual utilidad a la hora de resolver ecuaciones diferenciales es saber que la transformada de Laplace puede calcularse mediante desarrollo en serie.

Lema 49. *Sea $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ en $\mathbb{R}$. Entonces, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!a_n} = 0$,*
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{n!a_n}{s^{n+1}},$$
en $Re(s) > 0$.

Observación 50. *Recuerdese que $\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!a_n}$, cuando existen.*

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\frac{\text{sen}(t)}{t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$, e integrando término a término se tiene

$$f(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(t)}{t} dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

con lo que aplicando el anterior resultado se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{s^{2n+2}} = \frac{1}{s} \arctan(1/s).$$

A pesar de que $f(t) = \frac{1}{t+1}$ tiene transformada de Laplace, no se puede calcular por medio del desarrollo exponencial, porque tiene radio de convergencia finito. Por otro lado, la función $f(t) = e^{t^2}$, a pesar de tener desarrollo en serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$, no tiene transformada de Laplace.

3.3. **La función delta.** Estrictamente hablando, la función impulso o δ de Dirac, no es una función sino un operador que asocia a cada función $h(t)$ suficientemente buena, su valor en el cero. Usaremos la siguiente notación para ese operador.

Definición 51. *La función $\delta(t)$ se define mediante la propiedad*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)h(t)dt = h(0). \tag{7}$$

valida para cualquier función en con derivada infinitamente diferenciable.

Tomando $h(t) = 1$, se tiene la primera propiedad de la función delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1. \tag{8}$$

Haciendo una traslación en la Ecuación (7) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)h(t)dt = h(t_0). \tag{9}$$

Y si tomamos $h(t) = e^{-st}$, obtenemos la transformada de Laplace de la función

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s) = 1. \tag{10}$$

Observese que aplicando (9) a la misma función $h(t) = e^{-st}$ se obiente la propiedad de traslación para la función impulso

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\}(s) = e^{-st_0},$$

y con $h(t) = e^{-st}f(s)$ deducimos para cualquier $t_0 \geq 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)f(t)\right\}(s) = e^{-t_0 s}f(t_0).$$

Teniendo en cuenta la definición vemos que

$$I(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u-t_0)du = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t \geq t_0, \end{cases} \tag{11}$$

con lo que $I(t) = u(t-t_0)$, la función escalon. En particular tenemos

$$u'(t-t_0) = \delta(t-t_0), \tag{12}$$

notación que da a entender la Ecuación (11). Integrando por partes en (7) tenemos, para cualquier función n veces diferenciable la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)h(t) = (-1)^n h^{(n)}(0). \tag{13}$$

Y tomando $h(t) = e^{-st}$, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n.$$

3.4. **La transformada inversa.** La transformada inversa de Laplace es también un operador que, a cada función $F(s)$ apropiada, le asocia otra $f(t)$ cuya transformada de Laplace coincide con $F(s)$. Este procedimiento es posible gracias a la unicidad de la transformada de Laplace. Sin embargo, la existencia no garantiza que haya un método explícito para calcularla. En algunos casos en los que la solución son de un tipo particular, por ejemplo exponenciales complejas, que incluyen senos y cosenos la transformada inversa se puede calcular gracias a al expansión en fracciones simples.

Proposición 52. *Sea $P(s) = (s-\alpha)^n R(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polinomio con la raíz α de multiplicidad n, y $Q(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polinomio cualquiera. Entonces existen n constantes $k_1, \dots, k_n$, un polinomio $C(s)$ de grado menor que el grado de $R(s)$, y otro $q(s)$ tal que*

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = q(s) + \sum_{j=0}^{n} \frac{k_i}{(s-\alpha)^i} + \frac{C(s)}{R(s)}.$$

Ademas, $q(s) = 0$ si el grado de $Q(s)$ es menor que el grado de $P(s)$.

Prueba. Mediante división entre polinomios se puede encontrar $A(s)$ y $B(s)$ tal que

$$A(s)(s-\alpha)^n + B(s)R(s) = 1.$$

Multiplicando por $Q(s)$ y dividiendo por $P(s)$ queda

$$\frac{Q(s)A(s)}{R(s)} + \frac{Q(s)B(s)}{(s-\alpha)^n} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{14}$$

Teniendo en cuenta la división $Q(s)A(s) = q_1(s)R(s) + C(s)$, y desarrollando $Q(s)B(s)$ en potencias de $(s-\alpha)$, $Q(s)B(s) = \sum_{i=0}^{d} k_{n-i}(s-\alpha)^i$, no hay mas que sustituir ambas cosas en la ecuación (14) para obtener el resultado con el polinomio $q(s) = q_1(s) + \sum_{i=n}^{d} k_{n-i}(s-\alpha)^{i-n}$. La última observación se obtiene restando

$$\frac{Q(s)}{P(s)} - \sum_{j=0}^{n} \frac{k_i}{(s-\alpha)^i} + \frac{C(s)}{R(s)},$$

ya que el grado de $C(s)$ es menor que el grado de $R(s)$, luego la única forma de que sea un polinomio es porque es el polinomio cero.

Debido a que cualquier función racional se describe por sus ceros y polos, existen algunos libros de circuitos que hablan de localizar los ceros y polos de la transformada de una función.

Ejemplo. Ppara encontrar el conjuntos de ceros y polos de la transformada de

$$f(t) = (e^{-10t}\cos(20t) + 2e^{-10t}\mathrm{sen}(20t))u(t),$$

recordamos que

$$\mathcal{L}\left\{(e^{-10t}\cos(20t))\right\}(s) = \frac{s+10}{(s+10)^2+20^2},$$

mientras que

$$\mathcal{L}\left\{2(e^{-10t}\mathrm{sen}(20t))\right\}(s) = \frac{40}{(s+10)^2+20^2},$$

con lo que sumando queda

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{s+50}{(s+10)^2+20^2},$$

con cero en -50 y polos en $-(10+20i)$ y $-(10-20i)$.

Para encontrar el desarrollo en fracciones simples en la práctica lo dividimos por casos. En todos ellos es suficiente con suponer que el grado de $Q(s)$ es más pequeño que el de $P(s)$ pues lo primero que hacemos es dividir. Así pues en todos los casos $q(s) = 0$.

Caso 1. Si todas las raices son simples, entonces se ha de multiplicar por $P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-a_i)$ para obtener

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{n} k_i \prod_{j\neq i}(s-a_j),$$

y evaluando en cada una de las raices se obtienen los coeficientes.

Ejemplo. Desarrollar en fracciones simples la función racional $F(s) = \frac{2(2s+7)}{(s+4)(s+2)}$.
Por la proposición anterior sabemos que existen k_1 y k_2 tal que

$$F(s) = \frac{k_1}{s+4} + \frac{k_2}{s+2}.$$

Si multiplicamos a ambos lados en la igualdad por el denominador, se obtiene

$$4s + 14 = k_1(s+2) + k_2(s+4),$$

y evaluando en $s = -4$, y en $s = -2$ obtenemos $k_1 = 1$ y $k_2 = 3$.

Para encontrar la transformada inversa de $F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^3+6s^2+11s+6}$, empezamos dividiendo el numerador entre el denominador para obtener

$$F(s) = 1 - \frac{3s^2+11s+5}{s^3+6s^2+11s+6}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la suma de los coeficientes de monomios de grado par, es igual a la suma de los coeficientes de monomios de grado impar, $s = -1$ es raíz del denominador, y resolviendo el polinomio cuadrático que queda vemos que

$$F(s) = 1 - \frac{3s^2+11s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Y multiplicando por el denominador en la identidad

$$\frac{3s^2+11s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{k_3}{(s+3)}.$$

obtenemos

$$3s^2 + 11s + 5 = k_1(s+2)(s+3) + k_2(s+1)(s+3) + k_3(s+1)(s+2).$$

Evaluando en $s = -2, -3$ y $s = -4$ se obtienen los valores $k_1 = -3/2$, $k_2 = 5$ y $k_3 = -1/2$, por lo que la transformada inversa es la función

$$f(t) = \delta(t) + (3/2e^{-t} - 5e^{-2t} + 1/2e^{-3t})u(t).$$

Caso 2. En el caso de que haya raices múltiples la identidad

$$\frac{Q(s)}{R(s)(s-a)^n} = \frac{1}{(s-a)^{n-1}}\left(\frac{Q(s)}{R(s)(s-a)}\right),$$

se puede utilizar para desarrollar el interior del paréntesis como si fuesen raices simples, y luego ir repitiendo el proceso.

Ejemplo. Encontrar la transformada inversa de Laplace de la función racional $F(s) = \frac{4(s+3)}{s(s+2)^2}$.

En este caso escribimos

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)}\frac{4s+12}{s(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}\left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+2)}\right).$$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene $k_1 = 6$ y $k_2 = -2$, con lo que

$$F(s) = \frac{6}{s(s+2)} - \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Y desarrollando de nuevo la primera fracción queda

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{(s+2)} - \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Ahora solo tenemos que usar las propiedades de la transformada para obtener

$$f(t) = (3 - 3e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t)$$

Departamento de Matemáticas, Universitat Politécnica Catalunya, Barcelona, Spain
E-mail address: jorge.urroz@upc.edu