

Lleis de Newton. Invariància Galileana

Carles Batlle

Universitat Politècnica de Catalunya —BARCELONATECH

Copyright 2013-2024 Carles Batlle (carles.batlle@upc.edu)
Departament de Matemàtiques i Institut d'Organització i Control de Sistemes
Industrials
EPSEVG, Av. V. Balaguer 1, 08800 Vilanova i la Geltrú
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-
Share Alike 3.0 License. A copy of the license can be found at
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

1 Les lleis de Newton

Les lleis de Newton descriuen la dinàmica d'objectes puntuals, o partícules, en el sentit de que no es considera la seva estructura, encara que no necessàriament han de ser de dimensions menyspreables. Les partícules es poden caracteritzar per la seva *massa inercial* $m > 0$.

Un *sistema de referència* és un observador dotat d'uns eixos de coordenades i un rellotge.

1a llei

Existeixen sistemes de referència, anomenats inercials, en els quals els objectes sotmesos a una força externa total nul·la romanen en repòs o es mouen en línia recta a velocitat constant.

- No hi ha, a priori, una manera d'assegurar l'absència de forces externes. Aquesta és una qüestió que s'ha de resoldre experimentalment (allunyant l'objecte de tots els altres, per exemple) o teòricament, suposant que es coneixen totes les forces existents a la Natura i descartant-ne la seva acció en una situació específica.
- Tots els sistemes inercials es mouen entre ells amb velocitat constant, o estan en repòs relatiu.
- Tradicionalment, es considerava com a inercial un sistema de referència lligat als estels fixos. Per a molts experiments de caire local, la superfície de la Terra es pot considerar com un sistema aproximadament inercial. L'aproximació és força dolenta si es consideren moviments més extensos, com ara els moviments de masses d'aire a l'atmosfera o la caiguda de projectils dins de la mateixa (apareixen forces fictícies no inercials de Coriolis i centrífugues).
- Totes les contradiccions associades a l'existència dels sistemes inercials es resolten en el marc de la relativitat general, on els sistemes inercials perden el seu caràcter privilegiat.

2a llei

En un sistema inercial, l'acceleració d'un objecte és proporcional a la força total que hi actua:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1)$$

on

- \vec{F} és la força total que actua sobre l'objecte.
 - m és la massa inercial de l'objecte.
 - $\vec{p} = m\vec{v}$ és la quantitat de moviment de l'objecte.
 - \vec{r} és el vector de posició de l'objecte en el sistema de referència inercial.
- La 2a llei no és una definició de força. La força \vec{F} s'ha d'obtenir analitzant les circumstàncies físiques i l'entorn de l'objecte.
 - La forma
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
és vàlida també per a objectes de massa variable.

- La força és, en general una funció del temps, de la posició i de la velocitat de l'objecte

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (2)$$

i si hi ha altres objectes pot dependre també de les posicions i velocitats corresponents.

- El contingut fonamental de la segona llei és que l'equació fonamental de la dinàmica és una EDO de segon ordre en la posició. Pot demostrar-se que si fos de primer ordre la natura seria molt avorrida (tots els moviments serien com els d'un insecte en un líquid molt dens i viscos), mentre que si fos d'ordre més gran tot seria inestable.
- En mecànica no relativista, la massa inercial m és una constant de l'objecte (excepte si aquest perd o guanya massa per raons òbvies, com ara un coet o una cinta transportadora).
- La massa inercial m és numèricament igual a la massa gravitatòria m_g que apareix en el camp gravitatori creat per l'objecte

$$\vec{g} = -G \frac{m_g}{r^3} \vec{r}.$$

La igualtat $m = m_g$ s'anomena principi d'equivalència.

3a llei

Les forces d'interacció entre dos objectes, mesurades en un sistema inercial, són iguals i de signe oposat. Si \vec{F}_{12} és la força que l'objecte 1 fa sobre el 2, i \vec{F}_{21} és la del objecte 2 sobre l'objecte 1, llavors

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (3)$$

- La 3a llei és equivalent a la conservació de la quantitat de moviment total per a dos objectes que interaccionen sense forces externes a ells. Si $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, llavors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0.$$

- La 3a llei no és directament aplicable a objectes que interaccionen mitjançant camps no estàtics, degut a la velocitat finita de propagació de la interacció. En aquest cas cal tenir en compte la quantitat de moviment del camp per restablir el balanç.

2 Invariància Galileana

El *principi de relativitat de Galileu* (enunciat formalment per Newton) estableix que la forma de les lleis de la mecànica és la mateixa per a tots els sistemes de referència inercials. Les transformacions de les variables cinemàtiques (posició i temps) entre sistemes inercials s'anomenen *transformacions de Galileu*, i per tant el principi es pot enunciar també dient que les lleis de la mecànica són invariants sota transformacions de Galileu.

Considerem primer les anomenades *transformacions de Galileu pures*. Siguin dos sistemes de referència inercials S i S' , de manera que ambdós utilitzen el mateix rellotge i el segon es desplaça respecte al primer amb velocitat constant \vec{v}_0 , emprant els mateixos eixos i de manera que els orígens coincideixen per a $t = 0$ (Figura 1). Un esdeveniment és caracteritzat per un punt de l'espai i un instant de temps, però cada sistema de referència inercial li assigna unes observacions de temps i espai diferents. En aquest cas, les observacions en els dos sistemes estan relacionades per

$$\vec{r}' = \vec{r} - t\vec{v}_0, \quad (4)$$

$$t' = t. \quad (5)$$

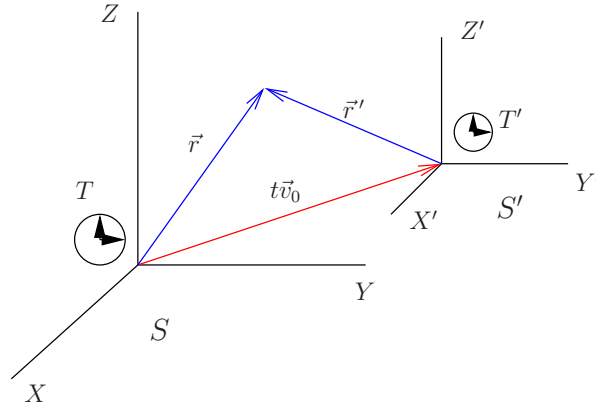


Figura 1: Dos observadors inercials relacionats per una transformació de Galileo pura (*boost*).

En el sistema S es té

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (6)$$

El que diu el principi de relativitat de Galileu és que l'equació en el sistema S' ha de ser

$$\vec{F}(t', \vec{r}', \vec{v}') = m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2}, \quad (7)$$

amb la mateixa dependència funcional de la força respecte a les variables cinemàtiques transformades. Com que \vec{v}_0 és constant, tenim

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} \stackrel{(5)}{=} \frac{d\vec{r}'}{dt} \stackrel{(4)}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{v}_0,$$

i resulta

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d(\vec{v} - \vec{v}_0)}{dt'} = \frac{d(\vec{v} - \vec{v}_0)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2},$$

i per tant, comparant (6) i (7), cal que les forces satisfacin la condició

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \vec{F}(t', \vec{r}', \vec{v}') = \vec{F}(t, \vec{r} - t\vec{v}_0, \vec{v} - \vec{v}_0). \quad (8)$$

Aquest és un requeriment sobre les forces per tal que el principi sigui cert, i es satisfà de fet en el marc dels fenòmens descrits per la mecànica newtoniana. El punt fonamental que permet això és que les forces que hom troba depenen sols de la diferència de velocitats i de la diferència de posicions, i no dels valors de les velocitats i de les posicions.

Sigui per exemple una partícula de massa m en una dimensió, sotmesa a una força de fregament $-\gamma v$, on v és la velocitat respecte al medi que l'envolta (que suposem en repòs en el sistema de referència del laboratori), i a una força elàstica $-k(x - d)$ produïda per una molla, on d és el valor de la posició de la molla per al que no es fa força. L'equació del moviment en el sistema de referència S del laboratori és

$$m\ddot{x} = -k(x - d) - \gamma v,$$

i per tant

$$F(t, x, v) = -k(x - d) - \gamma v.$$

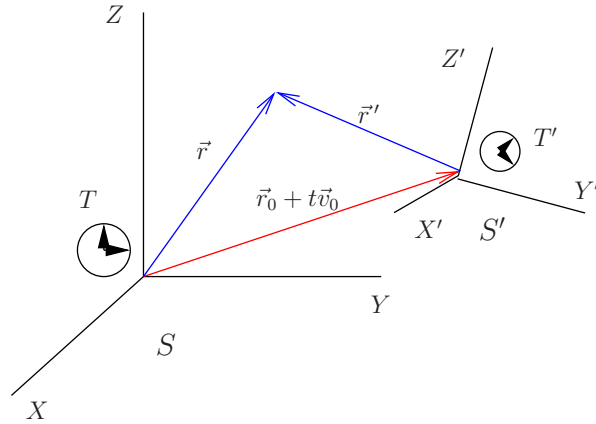


Figura 2: Dos observadors inercials relacionats per una transformació de Galileo general (translació d'espai, de temps, *boost* i rotació d'eixos).

Sigui ara un sistema de referència S' movent-se amb velocitat constant v_0 respecte al laboratori. En aquest sistema $x' = x - tv_0$, però també $d' = d - tv_0$, de manera que

$$x' - d' = x - d.$$

Per al sistema S' el medi s'està movent amb velocitat $-v_0$, i la velocitat de la partícula respecte al medi és

$$v' - (-v_0) = v' + v_0 = v - v_0 + v_0 = v.$$

Segons el principi de relativitat de Galileu, la força en el sistema S' ha de tenir la mateixa dependència funcional que en el S i ha de coincidir en el valor, però això és precisament el que passa emprant les relacions anteriors:

$$F(t, x', v') = -k(x' - d') - \gamma v = -k(x - d) - \gamma v = F(t, x, v).$$

La transformació de Galileu pura donada per (4)(5) s'anomena també *boost* Galileà, i està caracteritzada per 3 paràmetres reals (les tres components de la velocitat relativa \vec{v}_0). Hi ha, però, altres transformacions que també relacionen sistemes inercials:

- **Translacions a l'espai:** $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$, amb \vec{r}_0 constant.
- **Translacions temporals:** $t' = t + t_0$, amb t_0 constant.
- **Rotacions a l'espai:** $\vec{r}' = \mathcal{R}\vec{r}$, amb \mathcal{R} una matriu de rotació constant (independent del temps).

Les matrius de rotació satisfan $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbb{I}_3$, $\det \mathcal{R} = 1$, i es pot veure que, a l'espai, queden definides per 3 paràmetres (per exemple, dos angles per fixar l'eix de rotació i un tercer angle per donar el valor de la rotació). Una transformació de Galileo general té per tant $3 + 3 + 1 + 3 = 10$ graus de llibertat.

La Figura 2 mostra els sistemes de referència de dos observadors inercials relacionats per una transformació de Galileo general. Les observacions temporals estan relacionades per $t' = t + t_0$, on t_0 és una constant que proporciona la diferència de temps entre els rellotges dels dos observadors. El vector $\vec{r}_0 + t\vec{v}_0$, que dona la separació entre els orígens dels sistemes d'eixos, està en el sistema de eixos de S' , \vec{r}' està en el sistema d'eixos de S' i \vec{r} està en el sistema d'eixos de S .

Per poder sumar vectors els hem de referir tots al mateix sistema d'eixos. Si ho fem en el de S' , haurem de transformar \vec{r} amb la rotació \mathcal{R} que passa d'uns eixos als altres, $\vec{r}_{S'} = \mathcal{R}\vec{r}$, i llavors

$$\vec{r}' = \vec{r}_{S'} - (\vec{r}_0 + t\vec{v}_0) = \mathcal{R}\vec{r} - \vec{r}_0 - t\vec{v}_0.$$

Una transformació de Galileo general pren per tant la forma $(t, \vec{r}) \mapsto (t', \vec{r}')$, amb

$$t' = t + t_0, \quad (9)$$

$$\vec{r}' = \mathcal{R}\vec{r} - \vec{r}_0 - t\vec{v}_0. \quad (10)$$

Denotarem aquesta transformació per $g = (t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0, \mathcal{R})$, i direm que $t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0, \mathcal{R}$ són els paràmetres de la transformació.

La invariància de les lleis de la mecànica sota les translacions espacials i temporals és senzilla de demostrar, seguint el mateix procediment emprat per a *boost*, mentre que la invariància sota rotacions es segueix del fet que la força es transforma sota rotacions igual que el vector de posició (i que els de velocitat i acceleració).

De fet, podem deduir la relació (10) a partir del principi d'invariància i la igualtat (numèrica) de les forces. Pel principi d'invariància tenim (suposem ja que $t' = t + t_0$ i per tant que les derivades respecte a t i t' són iguals sobre funcions de t i t' , respectivament).

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \quad (11)$$

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}(t', \vec{r}', \vec{v}'), \quad (12)$$

i per la igualtat de forces

$$\vec{F}(t', \vec{r}', \vec{v}') = \mathcal{R}\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (13)$$

on la matriu de rotació apareix ara ja que S i S' utilitzen bases diferents per expressar els vectors. Combinant les expressions anteriors hom arriba a

$$\mathcal{R}\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'. \quad (14)$$

La solució general d'aquesta equació diferencial per a \vec{r}' (suposant \vec{r} donat) és

$$\vec{r}' = \mathcal{R}\vec{r} + \text{funció afí de } t,$$

que, amb la parametrització adient, és precisament (10).

Des d'un punt de vista més profund, les transformacions Galileanes es caracteritzen per deixar invariants els intervals d'espai i de temps, és a dir

$$\|\Delta\vec{r}\| = \|\Delta\vec{r}'\|, \quad \Delta t = \Delta t',$$

on la norma és l'Euclidiana de \mathbb{R}^3 i $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ són les diferències entre vectors de posició i instants de temps mesurats en S , i el mateix per als mesurats en S' . Això es resumeix en l'afirmació de que el temps i l'espai Galileans són *absoluts*. Una altra característica important de les transformacions Galileanes (vegeu el Problema 4) és que, si un sistema de referència es mou respecte a un altre amb velocitat \vec{v}_2 i aquest segon respecte a un tercer amb velocitat \vec{v}_1 , llavors, suposant que els eixos no estan rotats, el primer es mou respecte al tercer amb velocitat $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$.

El principi de relativitat de Galileu sols s'aplica a la mecànica, i no és vàlid, per exemple, per als fenòmens electromagnètics. En aquest cas cal substituir-lo pel principi de relativitat d'Einstein, que es redueix al de Galileu en el límit quan la velocitat de la llum c tendeix a infinit.

Exercicis

1. Considereu dues partícules de masses respectives m_1 i m_2 en una dimensió, unides per una molla de constant k (no considereu fregament ni cap força externa). Podeu suposar que la força entre les masses és proporcional

a la diferència de posicions. Escriviu les equacions del moviment en el sistema de referència S del laboratori i en un sistema S' relacionat amb S per un *boost* Galileà unidimensional,

$$x' = x - v_0 t, \quad t' = t,$$

i comproveu el principi de relativitat de Galileu per a aquest cas.

2. Considereu de nou el problema anterior, però ara suposant que el sistema S' és no inercial, i que està relacionat amb S mitjançant

$$x' = x - \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad t' = t,$$

amb $a_0 > 0$ una constant. Escriviu les equacions del moviment en el sistema S' , i interpreteu-les.

3. En un cert sistema de referència inercial a l'espai dues partícules interaccionen mitjançant una força de la forma

$$\vec{F}_{12} = k \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

on k és una constant i \vec{r}_1, \vec{r}_2 són els vectors de posició de les dues partícules en el sistema inercial donat. Calculeu l'expressió de F_{12} en un altre sistema de referència inercial, obtingut del primer mitjançant una transformació Galileana general.

4. Siguin dues transformacions Galileanes donades per $g_1 = (t_1, \vec{r}_1, \vec{v}_1, \mathcal{R}_1)$ i $g_2 = (t_2, \vec{r}_2, \vec{v}_2, \mathcal{R}_2)$. Demostreu que la composició $g_2 \circ g_1$ és, de nou, una transformació Galileana, i calculeu-ne els seus paràmetres. Es pot demostrar que la llei de composició és associativa (no cal que ho feu). Calculeu l'element neutre i l'element invers d'un de qualsevol. Les transformacions Galileanes formen, per tant, un grup, que s'anomena el grup de Galileu. Demostreu que no és commutatiu.
5. Demostreu que els elements de la forma $(0, \vec{r}, \vec{v}, \mathbb{I})$ formen un subgrup commutatiu del grup de Galileu.
6. Trobeu una representació matricial del grup de Galileu, és a dir, associeu a cada element una matriu de manera que la composició de transformacions es correspongui amb la multiplicació de matrius. Això demostra també l'associativitat de la composició de transformacions.
7. Demostreu que la segona llei de Newton per a una partícula lliure en una dimensió,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

és invariant sota la transformació $(t, x) \mapsto (t', x')$ donada per

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t}{1 + \beta t}, \\ x' &= \frac{x}{1 + \beta t}, \end{aligned}$$

on $\beta \in \mathbb{R}$ és un paràmetre arbitrari. Aquesta no és una transformació de Galileu, però deixa invariant la segona llei pel cas que no hi hagi força.

8. Siguin dos observadors S i S' en el pla, amb $t = t'$ i amb eixos amb orígens coincidents però tals que roten entre ells amb velocitat angular constant ω , de manera que

$$\vec{r}' = \mathcal{R}(\theta(t))\vec{r}, \quad \mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = \omega t.$$

Suposeu que el sistema S és inercial i considereu en S una partícula lliure. Calculeu l'acceleració d'aquesta partícula en S' .

9. La llei relativista de composició de velocitats d'observadors és, en una dimensió d'espai,

$$v_1 \oplus_c v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad v_1, v_2 \in (-c, c),$$

amb $c > 0$.

- (a) Demostreu que aquesta és una operació interna a $(-c, c)$.
- (b) Demostreu que $((-c, c), \oplus_c)$ és un grup commutatiu.
- (c) Demostreu que

$$\lim_{v_2 \rightarrow \pm c} (v_1 \oplus_c v_2) = \pm c$$

per a tot $v_1 \in (-c, c)$.

10. Considereu, en un sistema de referència S , l'equació d'ones en una dimensió d'espai per a la variable escalar $\phi(x, t)$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

on c és la velocitat de propagació de les ones en el medi.

- (a) Sigui ara S' relacionat amb S per un *boost* Galileà, $x' = x - v_0 t$, $t' = t$. En aquest sistema la variable de l'equació d'ones és $\phi'(x', t')$, i el seu caràcter escalar imposa que

$$\phi'(x', t') = \phi(x, t).$$

Demostreu que en S' hom té

$$\frac{1}{c^2} \left(v_0^2 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} - 2v_0 \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x' \partial t'} \right) = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2},$$

i que, per tant, no es verifica l'equació d'ones.

Indicació: Expresses $\partial/\partial x$ i $\partial/\partial t$ en termes de $\partial/\partial x'$ i $\partial/\partial t'$.

- (b) Supposeu ara que S' està relacionat amb S per

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1(x - v_0 t), \\ t' &= \alpha_2(t - \alpha_3 x), \end{aligned}$$

on α_i , $i = 1, 2, 3$, i v_0 són constants. Calculeu les α_i en termes de v_0 i c de manera que tinguem

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2}.$$

El resultat coincideix amb la forma dels *boosts* relativistes, i va ser obtingut pel físic alemany Woldemar Voigt el 1887, quasi 20 anys abans que Lorentz, Poincaré i Einstein desenvolupessin la teoria de la relativitat especial. Voigt va obtenir la transformació en el marc de la teoria de l'èter, i no va explorar-ne les conseqüències.

- (c) Emprant el resultat anterior, demostreu que ni Δx ni Δt són invariants al passar de S a S' , però que sí que ho és $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$.