Alguns problemes que es plantegen amb equacions diferencials[1]

Un problema de dissolucions

Un cert producte químic es dissol en aigua a una velocitat proporcional al producte de la quantitat encara no dissolta i la diferència entre la concentració d'una solució saturada i la concentració real. Es sap que en 100 g d'una solució saturada hi ha 50 g del producte, i que si es remenen 30 g del producte en 100 g d'aigua, en dues hores es dissolen 10 g. Quants grams es dissoldran en cinc hores?

Solució.

Anomenem $m(t)$ la quantitat del producte dissolt, c_{sat} la concentració de saturació i q_0 la quantitat inicial de substància no dissolta. Suposant densitat 1g cm^{-3} per a l'aigua, el volum és $V_0 = 100$ cm^3. A l'inici no hi ha substància dissolta i per tant $m(0) = 0$, i de la informació sobre la solució saturada obtenim que $c_{\text{sat}} = 50/V_0 = 0.5$ g cm^{-3}. Segons l'enunciat, l'evolució temporal de $m(t)$ ve donada per

$$\dot{m} = k \underbrace{(q_0 - m)}_{\text{quantitat no dissolta}} \underbrace{\left(c_{\text{sat}} - \frac{m}{V_0}\right)}_{\substack{\text{diferència de} \\ \text{concentració amb} \\ \text{la saturada}}} = \frac{k}{V_0}(m - q_0)(m - V_0 c_{\text{sat}}), \tag{1}$$

on suposem que t es mesura en hores, donada que aquestes són les unitats de l'enunciat. La informació que en dues hores es dissolen 10 g permetrà calcular la constant de proporcionalitat k.

L'equació (1) és de variables separades, i obtenim

$$\int \frac{1}{(m - q_0)(m - V_0 c_{\text{sat}})} \mathrm{d}m = \int \frac{k}{V_0} \, \mathrm{d}t + C = \frac{k}{V_0} t + C.$$

La integral de l'esquerra s'ha de calcular descomposant la fracció racional en fraccions simples. Un càlcul senzill mostra que

$$\frac{1}{(m - q_0)(m - V_0 c_{\text{sat}})} = -\frac{1}{V_0 c_{\text{sat}} - q_0} \frac{1}{m - q_0} + \frac{1}{V_0 c_{\text{sat}} - q_0} \frac{1}{m - V_0 c_{\text{sat}}},$$

i per tant

$$-\frac{1}{V_0c_{\text{sat}}-q_0}\log|m-q_0|+\frac{1}{V_0c_{\text{sat}}-q_0}\log|m-V_0c_{\text{sat}}|=\frac{k}{V_0}t+C.$$

Emprant les propietats dels logaritmes, obtenim que la solució general de l'EDO del problema és

$$\log\left(\frac{|m-V_0c_{\text{sat}}|}{|m-q_0|}\right)^{\frac{1}{V_0c_{\text{sat}}-q_0}}=\frac{k}{V_0}t+C.$$

Com que m no pot superar ni q_0 (la quantitat per dissoldre) ni $c_{\text{sat}}V_0$ (la quantitat màxima que pot estar dissolta), els arguments dels valors absoluts són tots dos negatius, i cancel·lant els dos signes menys que resulten d'eliminar-los s'obté

$$\log\left(\frac{V_0c_{\text{sat}}-m}{q_0-m}\right)^{\frac{1}{V_0c_{\text{sat}}-q_0}}=\frac{k}{V_0}t+C.$$

Exponenciant els dos costats s'elimina el logaritme, i elevant després a $V_0c_{\text{sat}}-q_0$ es té finalment l'expressió simplificada de la solució general

$$\frac{V_0c_{\text{sat}}-m(t)}{q_0-m(t)}=e^{(V_0c_{\text{sat}}-q_0)\left(\frac{k}{V_0}t+C\right)}. \tag{2}$$

Per tal de calcular C hem d'imposar $m(0)=0$. Per fer això no cal aïllar $m(t)$: substituint directament a (2) tenim

$$\frac{V_0c_{\text{sat}}-0}{q_0-0}=e^{(V_0c_{\text{sat}}-q_0)\left(\frac{k}{V_0}0+C\right)},$$

d'on

$$\frac{V_0c_{\text{sat}}}{q_0}=e^{(V_0c_{\text{sat}}-q_0)C}.$$

Substituint tota l'exponencial que conté C a (2) per aquest valor, hom obté la solució particular

$$\frac{V_0c_{\text{sat}}-m(t)}{q_0-m(t)}=\frac{V_0c_{\text{sat}}}{q_0}e^{(V_0c_{\text{sat}}-q_0)\frac{k}{V_0}t}. \tag{3}$$

Ara podem calcular k imposant que $m(2)=10$ g. Tindrem, substituint la resta de valors numèrics

$$\frac{50-10}{30-10}=\frac{50}{30}e^{(50-30)\frac{k}{100}2},$$

d'on

$$\frac{6}{5}=e^{\frac{2}{5}k}$$

i per tant $k=\frac{5}{2}\log\frac{6}{5}$. Posant a (3) aquest valor i la resta de valors numèrics, i calculant a $t=5$, queda

$$\frac{50-m(5)}{30-m(5)}=\frac{50}{30}e^{(50-30)\frac{1}{100}\frac{5}{2}\log\frac{6}{5}\,5}=\frac{5}{3}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\equiv\eta.$$

Resolent aquesta equació respecte a $m(5)$ s'obté el resultat demanat:

$$m(5) = \frac{30\eta - 50}{\eta - 1} = 17.7 \text{ g.}$$

Un problema de poblacions

El planeta H orbita al voltant d'una estrella situada a uns 500 anys-llum del Sol. L'únic ecosistema d'aquest planeta té una única espècie pseudoanimal (encara que no en reconeixeríeu un individu si el tinguéssiu al davant), que té un cicle de vida fortament afectat pels períodes anuals del planeta (de durada T_H). L'espècie té dues morfologies, A i B. Al començament d'un cicle anual tots els individus presenten la morfologia A, però degut a l'alta radioactivitat ambiental, cada individu es divideix en N individus amb morfologia B. Aquesta transició és aleatòria en el temps per a cada individu (això és semblant a la desintegració radioactiva d'un isòtop), de manera que el nombre d'individus que es divideixen per unitat de temps és proporcional al nombre d'individus presents, amb una constant de proporcionalitat k (en unitats inverses de T_H).

Malauradament, els individus amb morfologia B també són sensibles a la radioactivitat, però en aquest cas amb conseqüències mortals i sense descendència, de manera que el nombre d'individus B que moren per unitat de temps també és proporcional al nombre d'individus presents, amb constant q (també en unitats inverses de T_H). Degut a les condicions climàtiques extremes provocades per l'excentricitat orbital del planeta, quan acaba un cicle anual tots els individus A que no s'han dividit moren, i tots els individus B supervivents es transformen en individus A, assolint en molt poc temps, degut a l'acceleració del metabolisme produïda per aquestes condicions extremes, el volum i massa que els correspon.

1. L'evolució del nombre d'individus A i B al llarg d'un any es pot descriure amb dues EDO acoblades. Escriviu-les.

2. Solucioneu l'equació per al nombre d'individus A, suposant que inicialment n'hi ha A_0. Substituïu la solució a l'equació per als individus B i solucioneu aquesta darrera (recordeu que inicialment no hi ha individus B).

3. Calculeu l'evolució interanual d'individus de l'espècie. Estudieu els casos $k = 0$ i $k = \infty$, i expliqueu intuïtivament els resultats.

4. Si $q = 2.3$, determineu de manera aproximada (podeu emprar SAGE) el valor de k que dóna el màxim creixement interanual. Per a aquest valor de k, calculeu el valor mínim que ha de tenir N (enter positiu) de manera que l'espècie no desaparegui. *Resultat:* $k = 2.3$ i $N \geq 5$.

Solució.

1. Siguin $A(t)$ i $B(t)$ el nombre d'individus A i B, respectivament, en l'instant t (amb t mesurat en unitats de T_H). El ritme de desaparició d'individus A és kA i el de B és qB. Com que per

cada A que mor neixen N individus B, el sistema d'equacions diferencials és

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= -kA, && (4) \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} &= NkA - qB. && (5) \end{aligned}$$

2. La solució de (4) amb $A(0) = A_0$ és

$$A(t) = A_0 e^{-kt}. \tag{6}$$

Substituint això a (5) resulta per a B l'EDO lineal no homogènia

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + qB = NkA_0 e^{-kt}.$$

La solució de la part homogènia és

$$B_h(t) = Ce^{-qt}$$

i emprant el mètode de variació de constants s'obté que una solució particular de la complerta vé donada per

$$B_p(t) = NA_0 \frac{k}{q-k} e^{-kt}.$$

Quefa així que la solució general per a $B(t)$ és

$$B(t) = Ce^{-qt} + NA_0 \frac{k}{q-k} e^{-kt}.$$

Imposant $B(0) = 0$ es pot calcular

$$C = -NA_0 \frac{k}{q-k}$$

i per tant la solució buscada és

$$B(t) = NA_0 \frac{k}{q-k} \left(e^{-kt} - e^{-qt}\right). \tag{7}$$

3. Al finalitzar l'any tots els individus A moren i els B es transformen tot seguit en A. Per tant el quocient entre els individus que comencen l'any següent i els que van començar l'anterior és

$$\frac{B(1)}{A_0} = N \frac{k}{q-k} \left(e^{-k} - e^{-q}\right),$$

on hem posat $t = 1$ ja que les unitats de temps són els anys de durada T_H. Amb N i q fixats, hom té que

- $\lim_{k\to 0} B(1)/A_0 = 0$. Si $k = 0$, cap individu A mor durant l'any i per tant no es transforma en B. Quan acaba l'any hi ha A_0 individus A, que moren en el canvi d'any, i cap individu B. L'espècie s'extingeix.
- El límit quan $k \to \infty$ es calcula per la regla de L'Hôpital i resulta

  $$\lim_{k\to\infty} \frac{B(1)}{A_0} = NA_0 e^{-q}.$$

  En aquest límit, els A_0 individus A moren en els primers moments de l'any i es transformen en NA_0 individus B, que evolucionen amb una tassa de mortalitat donada per q.

4. Fixant N i q, definim la funció de k

$$f(k) = \frac{B(1)}{A_0} = N\frac{k}{q-k}\left(e^{-k} - e^{-q}\right) = Ng(k), \tag{8}$$

amb

$$g(k) = \frac{k}{q-k}\left(e^{-k} - e^{-q}\right).$$

Aquesta funció no està definida en $k = q$, però la discontinuïtat és evitable i, fent el límit, es pot veure que la funció contínua és tal que

$$g(q) = qe^{-q}.$$

Posant $q = 2.3$ i representant $g(k)$, es pot veure que la funció té un màxim en $k = 1.8653$. Aquest és el valor de k, per al valor de $q = 2.3$ donat, que fa que la població evolucioni més favorablement d'any en any.[2] De tota manera, això no garanteix la supervivència de l'espècie a llarg termini. Posant $q = 2.3$ i $k = 1.8653$ a (8) hom obté

$$\frac{B(1)}{A_0} = 0.2342N.$$

L'espècie sols té garantida la supervivència si aquest valor és més gran o igual que 1, i això requereix $N \geq 5$ (N ha de ser enter).

[2]Si intenteu calcular el màxim igualant la derivada a zero, obtindreu un numerador que s'anul·la en $k = q$, però el denominador també ho fa i, de fet, es pot veure que la derivada en $k = q$ val

$$g'(q) = e^{-q}\left(\frac{q}{2} - 1\right),$$

i per tant el màxim no està en $k = q$ (llevat que $q = 2$).

Un problema de fregament viscós

Una partícula de massa $m = 0.01\,\text{kg}$ està immersa en un fluid, on pateix una força de fregament viscós amb coeficient de fregament $\gamma = 0.2\,\text{Nm}^{-1}\text{s}$. A més, la partícula està sotmesa des de $t = 0\,\text{s}$ fins a $t = 3\,\text{s}$ a una força constant de $3\,\text{N}$, que és substituïda per una altra de $10\,\text{N}$ que actua durant els $5\,\text{s}$ següents. Calculeu la velocitat $v(t)$ de la partícula per a $t = 2\,\text{s}$, $t = 6\,\text{s}$ i $t = 20\,\text{s}$, suposant que a l'inici estava aturada. Dibuixeu la gràfica de $v(t)$ i interpreteu-la.

Solució

L'equació diferencial satisfeta per $v(t)$ ve donada per la segona llei de Newton, amb una força de fregament $-\gamma v$ i una força externa $f(t)$, i amb condició inicial nul·la:

$$m\dot{v} = -\gamma v + f(t),\ v(0) = 0, \tag{9}$$

on

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \in [0, 3), \\ 10 & \text{si } t \in (3, 8), \\ 0 & \text{si } t > 8, \end{cases}$$

o, en termes de funcions de Heaviside,

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 + (10 - 3)\,\theta(t-3) + (0 - 10)\,\theta(t-8) \\ &= 3 + 7\,\theta(t-3) - 10\,\theta(t-8). \end{aligned}$$

Emprant que

$$\mathcal{L}\{\theta(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad a > 0,$$

hom té que la transformada de Laplace de (9) és

$$m(sV(s) - 0) = -\gamma V(s) + F(s)$$

amb

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{7}{s}e^{-3s} - \frac{10}{s}e^{-8s}. \tag{10}$$

Queda així

$$(ms + \gamma)V(s) = \frac{3}{s} + \frac{7}{s}e^{-3s} - \frac{10}{s}e^{-8s}$$

i per tant obtenim la solució en el domini freqüencial com

$$V(s) = \frac{3}{s(ms+\gamma)} + \frac{7}{s(ms+\gamma)}e^{-3s} - \frac{10}{s(ms+\gamma)}e^{-8s}. \tag{11}$$

Degut a la linealitat de la transformada de Laplace i a que

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0, \tag{12}$$

sols cal calcular la descomposició en fraccions simples

$$\frac{1}{s(ms+\gamma)} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{s} - \frac{1}{\gamma}\frac{1}{s+\frac{\gamma}{m}},$$

amb antitransformada

$$\frac{1}{\gamma}\frac{1}{s} - \frac{1}{\gamma}\frac{1}{s+\frac{\gamma}{m}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t}. \tag{13}$$

Emprant (13) i (12), els diversos termes de $V(s)$ s'antitransformen en

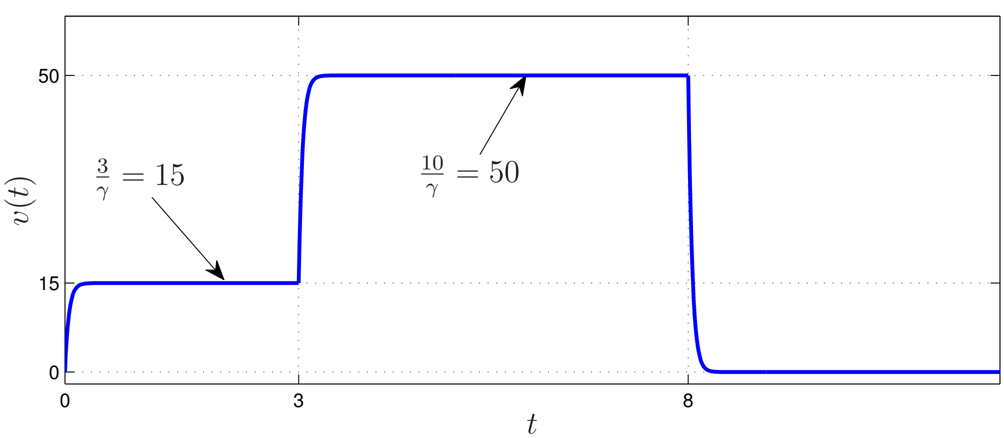
$$\begin{aligned}
\frac{3}{s(ms+\gamma)} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{\gamma} - \frac{3}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \\
\frac{7}{s(ms+\gamma)}e^{-3s} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left(\frac{7}{\gamma} - \frac{7}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-3)}\right)\theta(t-3), \\
\frac{-10}{s(ms+\gamma)}e^{-8s} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left(-\frac{10}{\gamma} + \frac{10}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-8)}\right)\theta(t-8),
\end{aligned}$$

i per tant la solució en el domini temporal és

$$v(t) = \frac{3}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + \theta(t-3)\frac{7}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}(t-3)}\right) - \theta(t-8)\frac{10}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}(t-8)}\right) \tag{14}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{\gamma} - \frac{3}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t} & \text{si } t \in [0,3), \\ \frac{10}{\gamma} - \frac{3}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{7}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-3)} & \text{si } t \in (3,8), \\ -\frac{3}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{7}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-3)} + \frac{10}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-8)} & \text{si } t > 8. \end{cases} \tag{15}$$

Posant $\gamma = 0.2$ i $m = 0.01$, hom obté $v(2) = 15$, $v(6) = 50$, $v(20) = 0$, i la gràfica de $v(t)$ es pot veure a la figura següent:



Val la pena fer notar que:

- la força externa que actua sobre la partícula és discontínua, però la velocitat és una funció contínua, i per tant els intervals a (15) poden canviar-se a $[0,3]$, $[3,8]$ i $t \geq 8$, respectivament. Hom sols pot obtenir salts en la velocitat si s'apliquen forces impulsives (modelades per funcions delta de Dirac).

- els valors $3/\gamma$, $10/\gamma$ i 0 són els valors de la velocitat tals que la força de fregament iguala la força externa aplicada, i serien els règims permanents si no es canviés la força externa. El temps que tarda el sistema a assolir aquests valors és molt petit, ja que la constant de temps d'aquest sistema de primer ordre és

$$\tau = \frac{m}{\gamma} = 0.05.$$

  En aproximadament $3\tau = 0.15$ el sistema es troba ja molt a prop del valor permanent.

- degut a que $\gamma/m = 1/\tau = 20$ es tant gran, la contribució de $e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ per a $t \in (3,8)$ és absolutament menyspreable (més petita que $e^{-20\cdot 3} = e^{-60} \approx 8.7610^{-27}$ per a $t \geq 3$), i de la mateixa manera ho són les de $e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ i de $e^{-\frac{\gamma}{m}(t-3)}$ per a $t > 8$.

- el fet que τ sigui tant petit és degut a que el coeficient de fregament és molt gran per a una massa tant petita. En aquesta situació s'assoleix la velocitat límit de manera quasi instantània. Aquesta és una situació en què la física aristotèlica (pre-newtoniana) és una bona aproximació.

Un problema de contaminació

Una bassa conté inicialment $3 \cdot 10^6$ litres d'aigua no contaminada, i té un cabal d'entrada i de sortida de 2 litres per segon. A partir d'un cert moment, el cabal d'entrada queda contaminat per una substància verinosa en una concentració de 1 g per litre. Els responsables s'adonen de la situació passats 3 dies i aconsegueixen restaurar l'entrada d'aigua no contaminada.

1. Escriu una EDO per la concentració de la substància verinosa a la bassa, suposant que aquesta està sempre uniformement distribuïda, i que sigui vàlida per a tot instant de temps (abans i després dels 3 dies). Recorda que un dia té 86400 segons.

2. Soluciona l'EDO i representa esquemàticament la concentració en funció del temps. Per a quin valor de temps assoleix el màxim?

3. La substància verinosa esdevé perillosa en concentracions superiors a 0.1 g per litre. Esbrina si els usuaris del cabal de sortida hauran estat en perill en algun moment.

Solució

Emprem la notació següent:

c concentració de substància verinosa a la bassa (en g l^{-1}).

m massa de substància verinosa a la bassa (en g).

V volum d'aigua a la bassa ($3 \cdot 10^6$ l).

Q_{in} cabal d'entrada d'aigua a la bassa (2 l s^{-1}).

Q_{out} cabal de sortida d'aigua de la bassa (2 l s^{-1}).

σ concentració de la substància verinosa en el cabal d'entrada (1 g l^{-1}).

t_1 instant en què s'atura l'entrada de substància verinosa ($3 \cdot 86400$ s).

La massa de substància verinosa que entra per unitat de temps és σQ_{in} entre $t = 0$ i $t = t_1$, i zero després, mentre que la que surt depèn de la concentració i val cQ_{out}. L'EDO per a m és per tant

$$\dot{m} = \sigma Q_{\text{in}}(1 - \theta(t - t_1)) - cQ_{\text{out}}.$$

Com que $c = m/V$ i V és constant, l'EDO per a la concentració serà

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{V}\dot{m} = \frac{\sigma Q_{\text{in}}}{V}(1 - \theta(t - t_1)) - \frac{Q_{\text{out}}}{V}c \\ &= a(1 - \theta(t - t_1)) - bc, \end{aligned} \tag{16}$$

on hem definit

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma Q_{\text{in}}}{V} = \frac{1\ \mathrm{g\ l^{-1}}\ 2\ \mathrm{l\ s^{-1}}}{3 \cdot 10^6 \mathrm{l}} = \frac{2}{3}10^{-6}\mathrm{g\ l\ s^{-1}}, \\ b &= \frac{Q_{\text{out}}}{V} = \frac{2\ \mathrm{l\ s^{-1}}}{3 \cdot 10^6 \mathrm{l}} = \frac{2}{3}10^{-6}\mathrm{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $c(0) = 0$, la transformada de Laplace de (16) és

$$sC(s) = \frac{a}{s} - \frac{a}{s}e^{-t_1 s} - bC(s),$$

d'on es pot calcular la solució en el domini transformat

$$C(s) = \frac{a}{s(s+b)} - \frac{a}{s(s+b)}e^{-t_1 s}. \tag{17}$$

Emprant

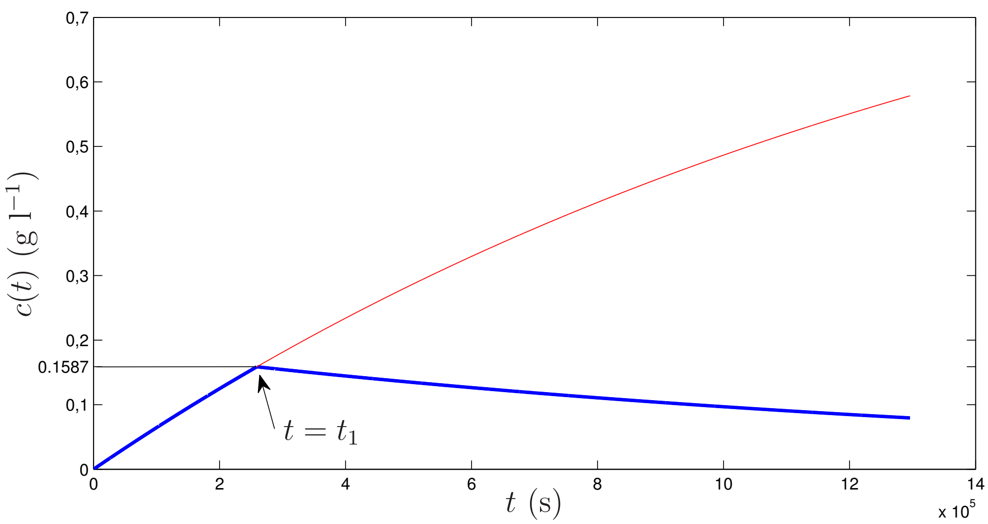
$$\frac{1}{s(s+b)} = \frac{1}{b}\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\frac{1}{s+b}$$

i la propietat (12), hom obté la solució en el domini temporal

$$c(t) = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-bt} - \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-b(t-t_1)}\right)\theta(t-t_1) \tag{18}$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-bt} & \text{si } t < t_1, \\ -\frac{a}{b}e^{-bt} + \frac{a}{b}e^{-b(t-t_1)} & \text{si } t > t_1. \end{cases} \tag{19}$$

La solució apareix representada en blau a la següent figura:



La corba vermella representa l'evolució de la concentració si no es talla l'entrada de la substància verinosa (tendeix cap al valor asimptòtic $a/b = 1$). Com que en $t = t_1$, que és quan s'assoleix el màxim, la concentració és superior a 0.1 g l^{-1}, el cabal de sortida ha estat nociu durant un temps. De fet, el valor límit s'assoleix per a t^* solució de

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-bt^*} = 0.1,$$

que dóna

$$t^* = -\frac{1}{b}\log\left(1 - 0.1\frac{b}{a}\right) = 1.5804 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 1 \text{ dia i 20 hores}$$

i l'aigua que surt ha estat contaminada per sobre dels límits permesos durant més d'un dia.

Cal notar que la constant de temps d'aquest sistema de primer ordre és

$$\tau = \frac{1}{b} = 1.5 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 17 \text{ dies.}$$

Això fa que l'evolució cap als valors asimptòtics sigui molt lenta (a diferència del problema anterior), i que per a $t < t_1$ la solució sigui pràcticament una recta, ja que si $t \ll \tau = 1/b$, desenvolupant per Taylor fins a primer ordre,

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-bt} \approx \frac{a}{b} - \frac{a}{b}(1 - bt) = at.$$