

RSME 2000

Minisimposium sobre TEORÍA GEOMÉTRICA DEL CONTROL

Conexión cinemática  
y  
control en grupos de Lie

CARLES BATLLE

**Universitat Politècnica de Catalunya**

Madrid, 29 de enero de 2000.

1. Motivación
2. Conexión cinemática
3. Control aproximado en grupos de Lie
4. Conclusiones

## **Bibliografía**

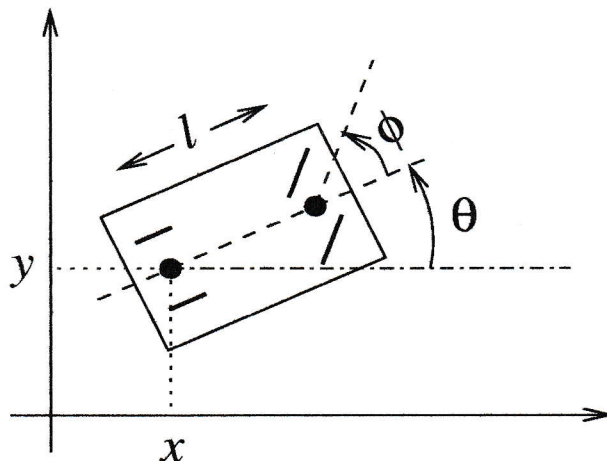
- Kelly, Scott D., and Richard M. Murray, “Geometric phases and robotic locomotion”, CDS Technical Report 94-014, Caltech (1994).
- Ostrowski, James P., “The mechanics and control of undulatory robotic locomotion”, Ph.D. Thesis, Caltech (1996).
- Leonard, Noemi E., “Averaging and motion control of systems on Lie groups”, Ph.D. Thesis, University of Maryland (1994).

<http://www.isr.umd.edu/TechReports/>

<http://www.cds.caltech.edu/cds/>

## 1 Motivación

Problema: el coche cinemático



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{y} &= \rho \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{\rho}{l} \tan \phi \dot{\psi}\end{aligned}$$

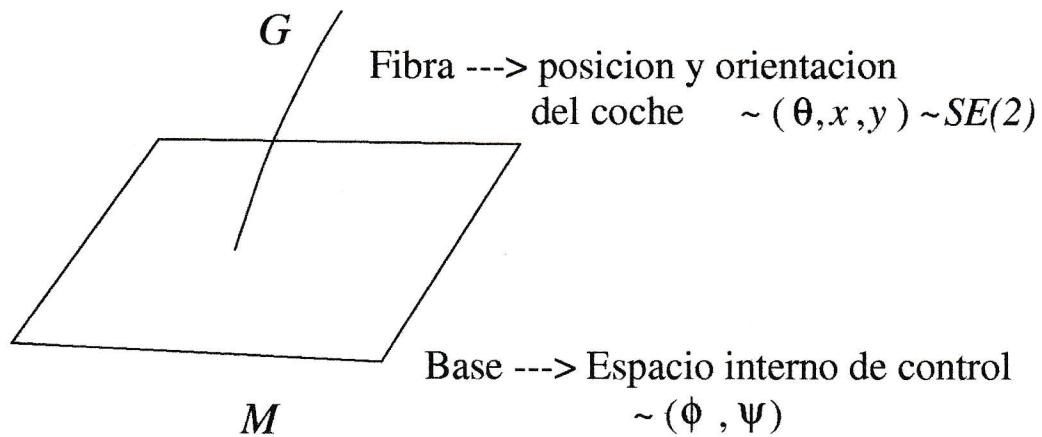
donde  $\rho$  es el radio de las ruedas,  $l$  es la distancia entre ejes y  $\dot{\psi}$  es la velocidad angular de las ruedas.

LIGADURAS NO HOLÓNOMAS EN  $(\phi, \psi, \theta, x, y)$

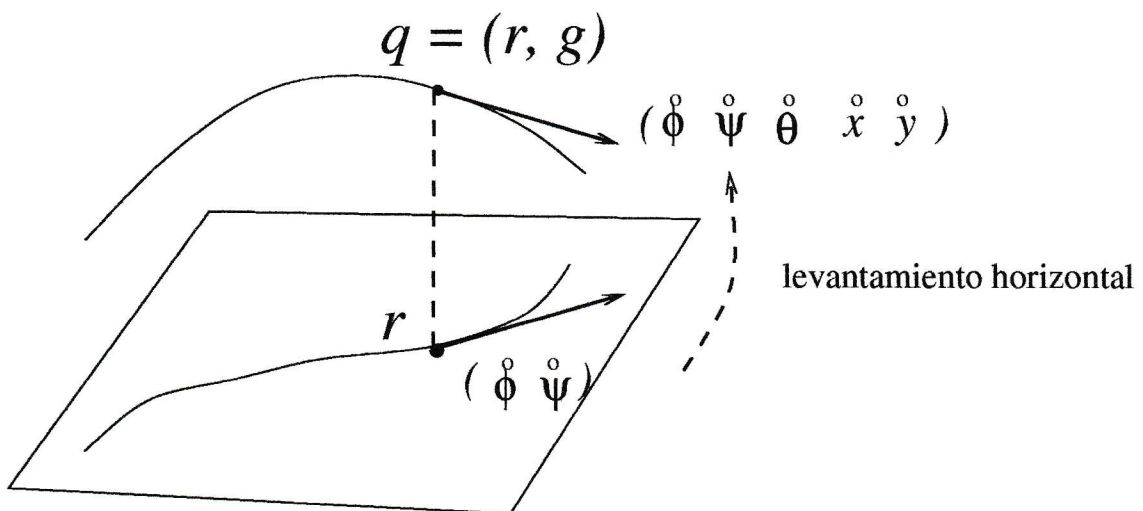
EL CONOCIMIENTO DE  $\phi(t)$  Y  $\psi(t)$  DETERMINA EL MOVIMIENTO DEL COCHE

¿CUÁL ES LA ESTRUCTURA GEOMÉTRICA RELEVANTE?

Fibrado principal trivial  $Q = M \times G$



PROBLEMA: Dada una curva de control en el espacio base, ¿qué movimiento induce en el fibrado?



CONEXIÓN: Permite establecer un isomorfismo entre  $T_{\pi(q)}M$  y un subespacio de  $T_qQ$  para cada  $q \in Q$ .

## 2 Conexión cinemática

- En un fibrado principal trivial  $Q = M \times G$ , tenemos una acción libre del grupo por la izquierda sobre el fibrado:

$$\begin{aligned}\Phi : G \times Q &\rightarrow Q \\ (h, q) &\mapsto \Phi(h, q) \equiv \Phi_h(q)\end{aligned}$$

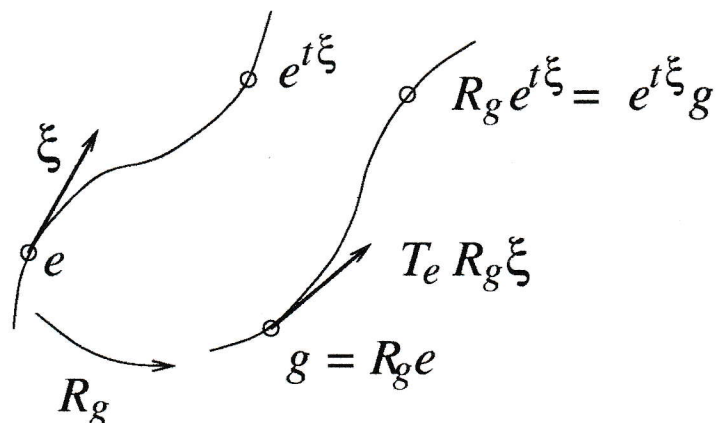
donde, si  $q = (r, g)$ ,

$$\Phi_h(r, g) = (r, L_h g) = (r, hg)$$

- El generador infinitesimal de  $\Phi$  correspondiente a  $\xi \in \mathcal{G} = T_e G$  es el campo  $\xi_Q \in \mathcal{X}(Q)$  dado por

$$\begin{aligned}\xi_Q(q) &= \left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{t\xi}, q) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (r, e^{t\xi} g) \right|_{t=0} \\ &= (0, T_e R_g \xi) \\ &= (0, \xi g)\end{aligned}$$

donde el último paso es un abuso de notación estrictamente con sentido para grupos de Lie de matrices, y el penúltimo paso aparece ilustrado aquí:



- El fibrado vertical es el subfibrado de  $TQ$  definido por

$$VQ = \bigcup_{q \in Q} V_q Q = \bigcup_{q \in Q} \{v_q \in T_q Q ; v_q \in \ker T_q \Pi\}.$$

En un fibrado principal trivial, los vectores de  $V_q Q$ , llamados vectores verticales, son de la forma

$$v_q = (0, v_g), \quad v_g \in T_{\pi_2(q)} G$$

- ¿Cómo definir un subespacio  $H_q Q \subset T_q Q$ , llamado subespacio horizontal, complementario de  $V_q Q$ ?
  - Para un fibrado trivial, los vectores horizontales se pueden escoger como

$$h_q = (v_r, 0), \quad v_r \in T_{\pi(q)} M.$$

- Para fibrados provistos de una métrica, podemos escoger  $H_q Q$  ortogonal a  $V_q Q$ .

Para sistemas con ligaduras, ninguna de estas opciones tiene mucho sentido: queremos que las curvas horizontales, *i.e.*  $q(t)$  tales que  $\dot{q}(t) \in H_{q(t)} Q$ , correspondan a movimientos permitidos del sistema.

La conexión permite elevar  
vectores *de control* en  $TM$   
a  
vectores horizontales en  $TQ$

- Una conexión en un fibrado principal es una asignación de  $H_q Q \subset T_q Q$  para cada  $q \in Q = M \times G$  tal que
  1.  $T_q Q = V_q Q \oplus H_q Q$ ,
  2.  $T_q \Phi_g H_q Q = H_{gg} Q$ ,  $q \in Q$ ,  $g \in G$ ,
  3.  $H_q Q$  depende de  $q$  diferenciablemente.

$T_q \pi$  establece un isomorfismo entre  $T_{\pi(q)} M$  y  $H_q Q$ , llamado levantamiento horizontal

- Una 1-forma de conexión principal  $\Gamma$  es una 1-forma  $\mathcal{G}$ -valuada sobre  $Q$  que satisface
  - $\Gamma(q)\xi_Q(q) = \xi$ ,  $q \in Q$ ,  $\xi \in \mathcal{G}$ ,
  - $\Gamma(\Phi_g q)T_q \Phi_g \dot{q} = \text{Ad}_g \Gamma(q)\dot{q}$ ,  $\dot{q} \in T_q Q$ ,  $q \in Q$ ,  $g \in G$ .

Dada una 1-forma de conexión principal  $\Gamma$ , se define la conexión correspondiente mediante

$$\Gamma(q)H_q Q = 0.$$

- Si tenemos un fibrado principal trivial,  $\Gamma$  se puede escribir siempre como

$$\Gamma(q)\dot{q} = \text{Ad}_g (g^{-1}\dot{g} + A(r)\dot{r}),$$

donde  $\dot{q} = (\dot{r}, \dot{g})$  y  $A(r)$  es una 1-forma  $\mathcal{G}$ -valuada sobre  $M$  denominada **forma local** de la conexión.

Supongamos que  $\dim \mathcal{G} = n$  y que tenemos  $n$  ligaduras no holónomas independientes

$$\omega^a(q) \cdot \dot{q} = 0, \quad a = 1, \dots, n$$

donde cada  $\omega^a \in \Omega(Q)$ .

Sea

$$H_q Q = \{v_q \in T_q Q ; \omega^a(q) \cdot v_q = 0, \quad a = 1, \dots, n\}$$

Si  $T_q Q = H_q Q \oplus V_q Q$  y las  $\omega^a$ , es decir, las ligaduras, son  $G$ -invariantes, entonces este  $H_q Q$  define una conexión en  $Q$ , denominada **conexión cinemática o no holónoma**, y, por lo tanto, existirá una forma local  $A(r)$  tal que

$$\omega^a(q) \cdot \dot{q} = 0, \quad a = 1, \dots, n \Leftrightarrow \Gamma(q) \cdot \dot{q} = \text{Ad}_g(g^{-1}\dot{g} + A(r)\dot{r}) = 0$$

con  $\dot{q} = (\dot{r}, \dot{g})$  y donde  $g^{-1} \equiv T_g L_{g^{-1}} = (T_e L_g)^{-1}$ .

Las curvas que satisfacen las ligaduras son por lo tanto

$$g^{-1}\dot{g} + A(r)\dot{r} = 0$$

o

$$\dot{g} = -gA(r)\dot{r},$$

donde  $g \equiv T_e L_g$  en el miembro de la derecha.

Esto es un problema de control en un grupo de Lie para un sistema sin deriva.

### Ejemplo: el coche cinemático

En coordenadas  $(\phi, \psi, \theta, x, y)$ , las formas correspondientes a las tres ligaduras son

$$\begin{aligned}\omega^1(q) &= (0, -\rho \cos \theta, 0, 1, 0) \\ \omega^2(q) &= (0, -\rho \sin \theta, 0, 0, 1) \\ \omega^3(q) &= (0, -\frac{\rho}{l} \tan \phi \dot{\psi}, 1, 0, 0).\end{aligned}$$

El subespacio de  $T_q Q$  anulado por estas formas es invariante  $SE(2)$  y, además, es complementario a  $V_q Q$  en cada punto. Definen por lo tanto una conexión y existirá una forma local que, en la base  $se(2)$  dada por  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  con

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se puede ver que es

$$A(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho}{l} \tan \phi \\ 0 & -\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, si

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$g^{-1} \dot{g} + A(\phi, \psi) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} + \frac{\rho}{l} \tan \phi \dot{\psi} & \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - \rho \dot{\psi} \\ \dot{\theta} - \frac{\rho}{l} \tan \phi \dot{\psi} & 0 & -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya anulaci3n da tres ecuaciones equivalentes a las ligaduras.

### 3 Control aproximado en grupos de Lie

Un sistema de control (afín) en un grupo de Lie  $G$  es de la forma

$$\dot{g} = Y_0(g) + \sum_{i=1}^m u^i(t) Y_i(g), \quad m \leq n = \dim \mathcal{G},$$

donde  $g(t) \in G$ ,  $Y_0, Y_i \in \mathcal{X}(G)$  y los  $u^i(t)$  son controles admisibles.

Si los campos son invariantes por la izquierda será

$$\dot{g} = T_e L_g \left( \xi_0 + \sum_{i=1}^m u^i(t) \xi_i \right)$$

donde  $\xi_0, \xi_i \in \mathcal{G}$ .

Se dice que el **sistema no tiene deriva** si  $\xi_0 = 0$ . Entonces, introduciendo además un parámetro  $\epsilon$  para indicar controles de pequeña amplitud,

$$\dot{g} = \epsilon T_e L_g U(t), \quad U(t) = \sum_{i=1}^m u^i(t) \xi_i$$

Para grupos de matrices esto se puede escribir como

$$\dot{g} = \epsilon g U(t)$$

Identificando los controles con las velocidades de la base, esta ecuación es del mismo tipo que la correspondiente a una conexión no holonómica para el caso en que la forma local es constante:

$$\epsilon \sum_{i=1}^m u^i(t) \xi_i = -A \cdot \dot{r}(t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\dim M} A_j^i \dot{r}^j(t) \xi_i,$$

y por lo tanto  $A_j^i = 0$  si  $i > m$  y

$$\epsilon u^i(t) = - \sum_{j=1}^{\dim M} A_j^i \dot{r}^j(t)$$

si  $i \leq m$ .

Problema de control: Como llevar  $g$  desde  $g(0) = e$  a  $g(t_f) = g_f$  en tiempo  $t_f$ ?

Si  $m = n$ , es decir, si el número de controles es igual al número de grados de libertad a controlar, el problema es relativamente sencillo. Vamos a concentrarnos en el caso  $m < n$  y veamos cómo podemos generar movimiento en las direcciones no directamente accesibles. Veamos primero un ejemplo en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea

$$\dot{x} = u_1 F_1(x) + u_2 F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$\text{rango}\{F_1(x), F_2(x), [F_1(x), F_2(x)]\} = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

En general, podemos expresar la solución de

$$\dot{x} = \epsilon F(x)$$

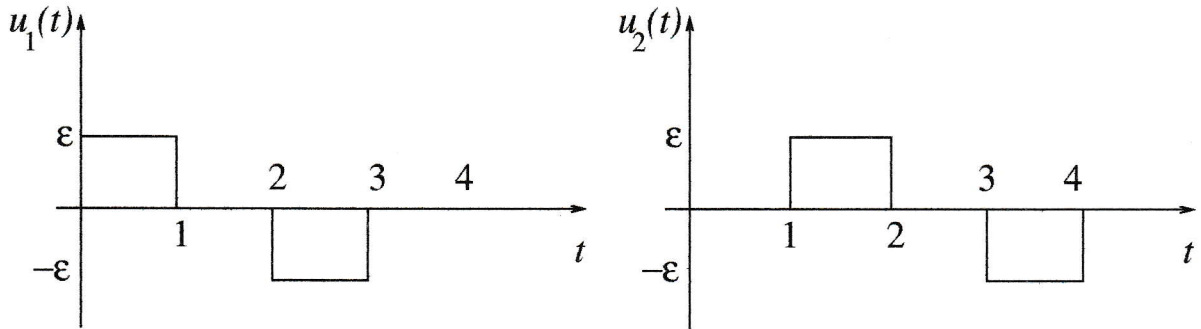
mediante la derivada de Lie:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{L}_{\epsilon F(x)}^n x$$

donde  $x = x(0)$ . Los primeros términos son, utilizando el convenio de sumación de índices repetidos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\epsilon F(x)} &= \epsilon F(x) \\ \mathcal{L}_{\epsilon F(x)}^2 &= \epsilon^2 F^i(x) \partial_i F(x) \\ \mathcal{L}_{\epsilon F(x)}^3 &= \epsilon^3 F^j(x) \partial_j (F^i(x) \partial_i F(x)) \\ &= \epsilon^3 \{ F^j(x) \partial_j F^i(x) \partial_i F(x) + F^j(x) F^i(x) \partial_j \partial_i F(x) \} \end{aligned}$$

Sean ahora los siguientes controles para  $t \in [0, 4]$ .



Utilizando las expresiones anteriores hasta orden  $\epsilon^2$  para estos controles, uno obtiene

$$\begin{aligned}
 x(1) &= x + \epsilon F_1(x) + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_i F_1(x) F_1^i(x) + O(\epsilon^3) \\
 x(2) &= x + \epsilon F_1(x) + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_i F_1(x) F_1^i(x) \\
 &\quad + \epsilon F_2(x) + \epsilon^2 \partial_i F_2(x) F_1^i(x) \\
 &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_i F_2(x) F_2^i(x) + O(\epsilon^3) \\
 x(3) &= x + \epsilon F_2(x) + \epsilon^2 \partial_i F_1(x) F_1^i(x) \\
 &\quad + \frac{\epsilon^2}{2} \partial_i F_2(x) F_2^i(x) - \epsilon^2 \partial_i F_1(x) F_2^i(x) + O(\epsilon^3) \\
 x(4) &= x + \epsilon^2 \{ \partial_i F_2(x) F_1^i(x) - \partial_i F_1(x) F_2^i(x) \} + O(\epsilon^3)
 \end{aligned}$$

es decir

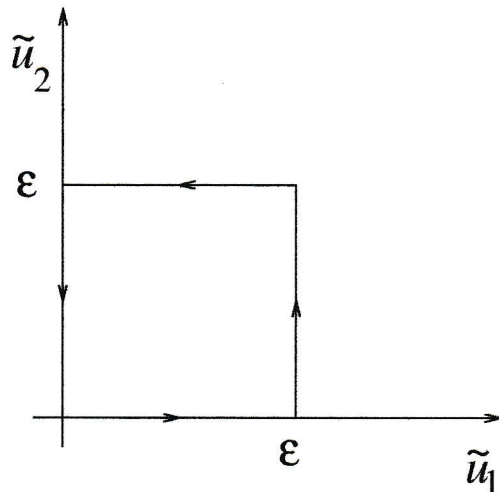
$$x(4) - x(0) = \epsilon^2 [F_1, F_2](x(0)) + O(\epsilon^3)$$

Por lo tanto, a orden  $\epsilon^2$ , tenemos movimiento neto en la dirección del paréntesis de los dos campos calculado en el punto inicial.

Consideremos ahora las integrales de los controles

$$\tilde{u}_1(t) = \int_0^t u_1(\tau) d\tau, \quad \tilde{u}_2(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau$$

Si representamos  $\tilde{u}_2$  frente a  $\tilde{u}_1$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 4$  tenemos



Utilizando el teorema de Green, la región encerrada tiene área

$$A_{12}(4) = \epsilon^2 = \frac{1}{2} \int_0^4 \left( \tilde{u}_1(\tau) \dot{\tilde{u}}_2(\tau) - \dot{\tilde{u}}_1(\tau) \tilde{u}_2(\tau) \right) d\tau$$

por lo que

$$x(4) - x(0) = \frac{4}{4} A_{12}(4) [F_1, F_2](x(0)) + O(\epsilon^3)$$

En general, podemos esperar que si tenemos controles **periódicos**, de **pequeña amplitud** y **promedio cero**

$$x(t_f) - x(0) \sim \frac{t_f}{T} A_{12}(T) [F_1, F_2](x(0))$$

## Solución local de $\dot{g} = \epsilon g U$

Parámetros de Wei-Norman

Sea  $g(t)$  la solución de

$$\dot{g} = \epsilon g U = \epsilon g \sum_{i=1}^m u^i \xi_i$$

con  $g(0) = e$ . Entonces existe un  $t_0 > 0$  tal que para  $|t| < t_0$  tenemos la representación en producto de exponenciales

$$g(t) = e^{\gamma^1(t)\xi_1} e^{\gamma^2(t)\xi_2} \dots e^{\gamma^n(t)\xi_n}$$

Los parámetros de Wei-Norman  $\gamma^i(t)$  (coordenadas canónicas de segunda especie) satisfacen la ecuación no lineal

$$\dot{\gamma} = \epsilon M(\gamma) u, \quad |t| < t_0$$

donde  $M(\gamma)$  es una matriz analítica real. Hasta primer orden

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \mathbb{I} + \tilde{\alpha}(\gamma) + O(\gamma^2) \\ (\tilde{\alpha}(\gamma))_j^i &= \sum_{r=j+1}^n \gamma^r \Gamma_{rj}^i \\ [\xi_i, \xi_j] &= \gamma_{ij}^k \xi_k \end{aligned}$$

Sea  $W$  un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$  donde  $M(\gamma)$  está definida. Sea la aplicación de Wei-Norman

$$\begin{aligned} \text{Pr} : \mathbb{R}^n &\rightarrow G \\ (\gamma^1, \dots, \gamma^n) &\mapsto e^{\gamma^1 \xi_1} \dots e^{\gamma^n \xi_n} \end{aligned}$$

y sea  $V = \text{Pr}(W) \subset G$ . La formulación de Wei-Norman proporciona entonces una representación local (en  $V$ ) de la solución.

Sea ahora  $S \subset W$  un entorno de  $0 \in \mathbb{R}^n$  donde  $\text{Pr}$  es inyectiva y sea

$$\Psi = \text{Pr}|_S$$

Entonces

$$\Psi : S \rightarrow Q \subset V$$

es un difeomorfismo y podemos definir en  $Q$  una distancia por medio de

$$\tilde{d}(X, Y) = \|\Psi^{-1}(X) - \Psi^{-1}(Y)\|, \quad X, Y \in V$$

Usaremos esta distancia para dar sentido a soluciones aproximadas de

$$\dot{g} = \epsilon g U$$

## Promediado de segundo orden

Sea  $\dot{g} = \epsilon g U$  con  $U(t)$   $T$ -periódico y de promedio cero sobre un periodo. Sea

$$D = \{\gamma \in \mathbb{R}^n \mid \|\gamma\| < r\} \subset S.$$

Sean

$$\begin{aligned}\tilde{u}^k(t) &= \int_0^t u^k(\tau) \, d\tau \\ A^{ij}(T) &= \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{u}^i(\tau) \tilde{u}^j(\tau) - \tilde{u}^i(\tau) \tilde{u}^j(\tau)) \, d\tau\end{aligned}$$

y sean los **parámetros en aproximación de segundo orden**

$$\gamma_{(2)}^k(t) = \epsilon \tilde{u}^k(t) + \epsilon^2 \frac{t}{T} \sum_{i,j=1}^m \sum_{i < j} A^{ij}(T) \Gamma_{ij}^k$$

a los que, a través de la representación de Wei-Norman, corresponde una solución aproximada

$$g_{(2)}(t) = e^{\gamma_{(2)}^1(t)\xi_1} \dots e^{\gamma_{(2)}^n(t)\xi_n}$$

El resultado fundamental es que esta solución aproximada está cerca, hasta orden  $\epsilon^2$ , de la solución exacta que se obtendría con los  $u^i(t)$ . Más precisamente, si  $\gamma_{(2)}(t) \in D$  para  $t \in [0, b/\epsilon]$ , entonces

$$\tilde{d}(g(t), g_{(2)}(t)) = O(\epsilon^2), \quad t \in [0, \frac{b}{\epsilon}]$$

Vamos a ver como este resultado permite obtener controles aproximados que nos dirigen  $g$ , aproximadamente, al punto deseado.

## Control aproximado de segundo orden

Supongamos que  $m < n$  y que  $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  genera toda el álgebra de Lie con paréntesis de profundidad uno.

Sean  $\{Z_f^1, \dots, Z_f^2\}$  los parámetros de Wei-Norman del punto  $g_f$  que queremos alcanzar a partir de  $e$  en tiempo  $t_f$ . Tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Z_f^i \xi_i &= \sum_{k=1}^m c^k \xi_k + \sum_{i,j=1}^m \sum_{i < j} c^{ij} [\xi_i, \xi_j] \\ &= \sum_{k=1}^m c^k \xi_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \sum_{i < j} c^{ij} \Gamma_{ij}^k \xi_k \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $u^k = 0$  para  $k = m + 1, \dots, n$ ,

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{(2)}^k(t_f) \xi_k = \sum_{k=1}^m \epsilon \tilde{u}^k(t_f) \xi_k + \frac{\epsilon^2 t_f}{T} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \sum_{i < j} A^{ij}(T) \Gamma_{ij}^k \xi_k$$

Comparando estas expresiones, si escogemos

$$\begin{aligned} \epsilon \tilde{u}^k(t_f) &= c^k, \quad k = 1, \dots, m \\ \frac{\epsilon^2 t_f}{T} A^{ij}(T) &= c^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i < j \end{aligned}$$

tendremos  $\gamma_{(2)}^i(t_f) = Z_f^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y, por lo tanto,

$$g_{(2)}(t_f) = g_f,$$

es decir, la solución aproximada va exactamente a  $g_f$  en tiempo  $t_f$  y, puesto que

$$\tilde{d}(g(t), g_{(2)}(t)) = O(\epsilon^2),$$

la solución exacta lo hará aproximadamente. Hay que notar que  $t_f = O(\epsilon)$  y, por lo tanto,  $c^i$  i  $c^{ij}$  también son de este orden, por lo que también  $Z_f^i = O(\epsilon)$ , es decir,  $g_f$  no puede estar muy lejos de la identidad.

Veamos en qué resultan las condiciones

$$\epsilon \tilde{u}^k(t_f) = c^k, \quad k = 1, \dots, m \quad \frac{\epsilon^2 t_f}{T} A^{ij}(T) = c^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i < j$$

para un caso sencillo, por ejemplo  $SE(2)$ . Utilizando la base ya introducida para  $se(2)$ , supongamos que sólo disponemos de controles de rotación y de traslación en la primera dirección (correspondientes a  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ). Como que  $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$ , podemos aplicar el promediado de segundo orden descrito. Si

$$g_f = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & u \\ \sin \theta & \cos \theta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

los parámetros de Wei-Norman correspondientes

$$\begin{aligned} g_f &= e^{Z_f^1 \xi_1} e^{Z_f^2 \xi_2} e^{Z_f^3 \xi_3} \\ &= \begin{pmatrix} \cos Z_f^1 & -\sin Z_f^1 & -Z_f^3 \sin Z_f^1 + Z_f^2 \cos Z_f^1 \\ \sin Z_f^1 & \cos Z_f^1 & Z_f^3 \cos Z_f^1 + Z_f^2 \sin Z_f^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

son

$$\begin{aligned} Z_f^1 &= \theta \\ Z_f^2 &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ Z_f^3 &= v \cos \theta - u \sin \theta \end{aligned}$$

y las condiciones anteriores son

$$\begin{aligned} c^1 &= Z_f^1 = \epsilon \tilde{u}^1(t_f) \\ c^2 &= Z_f^2 = \epsilon \tilde{u}^2(t_f) \\ c^{12} &= Z_f^3 = \frac{\epsilon^2 t_f}{T} A^{12}(T) \end{aligned}$$

Usando controles sinusoidales, las dos primeras condiciones son fácilmente obtenibles, mientras que para la tercera pueden utilizarse controles sinusoidales con fase relativa no nula.

## 4 Conclusiones

Hemos presentado un método constructivo de control aproximado en grupos de Lie que corresponde, entre otros casos, a problemas de control obtenidos a partir de la conexión cinemática cuando la forma local de la conexión no depende de las variables de base.

### EXTENSIONES

- Sistemas con deriva, por ejemplo, sistemas con ligaduras no holónomas y simetrías (*snakeboard*).
- Sistemas para los que la forma local  $A(r)$  depende efectivamente de las variables de control  $r$ .
- Sistemas para los que se dispone de generadores que cierran el álgebra de Lie con paréntesis de profundidad mayor que 2.
- Diseño de controles que satisfazan condiciones específicas (control óptimo ... ).