

Notes de Càlcul Vectorial

C. BATLLE

Secció de Matemàtica Aplicada de l'EUPVG

Índex

I	Integrals sobre corbes i superfícies	1
1	Camins i corbes	1
2	Integral sobre una corba d'una funció escalar	10
3	Integral sobre una corba d'una funció vectorial	12
4	Independència de la integral respecte del camí	15
5	Superfícies parametritzades	18
6	Superfícies orientables i no orientables	28
7	Integrals de superfície de funcions escalars i vectorials	31
II	Teoremes integrals	32
8	L'operador nabla i les seves propietats	33
9	El teorema de Green en el pla	38
10	El teorema de Stokes	46
11	Camps conservadors	50
12	El teorema de Gauss. Camps solenoïdals	56
13	Les equacions de Maxwell	61
A	Manipulacions vectorials avançades	67

Índex de figures

1	Un camí a \mathbb{R}^n	2
2	Un tros de paràbola	3
3	Un camí C^1 a trosos	5
4	Interpretació de la derivada d'un camí	6
5	Una corba tancada	8
6	Una corba amb punxa	9
7	Partició induïda sobre la corba	11
8	Projecció d'un camp vectorial sobre una corba	13
9	Dues parametritzacions d'una mateixa corba	16
10	Les dues possibilitats per a la funció h	17
11	Una superfície en forma explícita	19
12	En els punts marcats no hi ha pla tangent	20
13	Representació paramètrica d'una superfície	21
14	Descripció d'una esfera en coordenades esfèriques de radi fixat.	22
15	Vectors tangents a la superfície	23
16	Parametrització d'un con	25
17	Aproximació de l'àrea d'una superfície	26
18	Imatge d'un rectangle de D	27
19	Les dues normals d'una superfície amb dos costats	28
20	Generació d'una cinta de Moebius	29
21	Una cinta de Moebius	29
22	Una regió de tipus 1	39
23	Una regió qualsevol	41
24	La regió anterior dividida en regions de tipus 3	41
25	Una regió foradada	42
26	Una descomposició de la regió anterior	42
27	Una corba no simple	43
28	Per il·lustrar el teorema de Stokes	47
29	Un cilindre obert per dalt i per baix	50
30	Imatge de la vora de D	51
31	Dues corbes entre dos punts	52
32	Una corba entre $(0, 0, 0)$ i (x, y, z)	53
33	Dues altres corbes entre $(0, 0, 0)$ i (x, y, z)	54
34	Una regió de tipus 4 pensada com a regió de tipus 1	57
35	El teorema de Gauss per a un volum qualsevol	59

36 Una regió amb cavitat. 60

Prefaci

La intenció d'aquestes notes és proporcionar als estudiants d'Anàlisi Vectorial i de Fourier de segon trimestre d'Enginyeria Tècnica Industrial d'Electricitat de l'EUPVG un material que els permeti seguir més còmodament l'exposició de la matèria a classe. Esperem en el futur tractar també els temes de variable complexa i d'anàlisi de Fourier i de sistemes, per obtenir així un text que es pugui emprar a totes les "ampliacions de matemàtiques" de les titulacions mecatròniques i de telecomunicacions de l'EUPVG.

En aquestes notes s'inclouen les demostracions que, sovint per manca de temps, no es desenvolupen a classe. Això és força lamentable ja que l'essència dels resultats no es veu en els exercicis on s'apliquen sino en la seva demostració. Entendre la demostració d'un teorema és imprescindible si hom vol utilitzar-lo amb seguretat. Un exemple típic és el teorema de caracterització de camps conservadors: sols examinant la demostració acaba hom entenent quin paper juguen les possibles singularitats del camp.

Els exemples que es presenten no són els típics problemes d'una llista, sino que pretenen aclarir aspectes particulars de la teoria exposada previament. Alguns comentaris curts que pretenen advertir sobre qüestions de notació o sobre interpretacions equivocades van precedits pel símbol \diamond .

Respecte a la bibliografia, direm que [MT] és l'obra que més s'adapta a la matèria desenvolupada en aquests apunts, una bona part dels quals segueix prou fidelment els raonaments allà exposats. És un llibre que també pot ser útil a qui vulgui repassar els seus coneixements de funcions de diverses variables. Tant [CJ] com [Spi] exposen la mateixa matèria a un nivell considerablement superior, especialment la segona. En canvi [Sp1] i [Sp2] tenen un enfoc més orientat al càlcul pràctic i són útils per adquirir fluïdesa en la resolució d'exercicis, alhora que contenen una introducció a les operacions vectorials elementals, tema aquest no tractat aquí. Finalment, [SA] és un bon recull de fórmules útils i [Ja] és ideal per a qui, tal com cal esperar d'un enginyer mecatrònic i/o de telecomunicacions, vol aprofundir en l'electromagnetisme. Tal com es diu sempre, recordem al lector que els presents apunts no eliminen la necessitat de consultar l'extensa i molt diversa bibliografia existent sobre le tema, de la qual hem ofert una petita selecció.

Carles Batlle
Vilanova i la Geltrú, febrer de 1999

Part I

Integrals sobre corbes i superfícies

1 Camins i corbes

A \mathbb{R}^2 una corba pot presentar-se en forma explícita, quan la corba és la gràfica d'una funció,

$$y = f(x),$$

o implícita,

$$f(x, y) = 0.$$

Cap d'aquestes formes és especialment còmoda, i els problemes augmenten al passar a \mathbb{R}^n , $n > 2$. Per exemple, a \mathbb{R}^3 la forma explícita seria

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x), \end{cases}$$

mentre que la implícita vindria donada mitjançant la intersecció de dues superfícies

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Les formes explícites tenen l'inconvenient de privilegiar una variable, en els exemples anteriors x , i no sempre es pot utilitzar, mentre que la forma implícita, si bé és simètrica respecte a les variables, es complica força quan augmenta n , i no és gens intuïtiva. Anem ara a introduir una tercera forma, la paramètrica, que resol aquests inconvenients i que a més es generalitza fàcilment a objectes de dimensió superior (i.e. superfícies).

Un **camí** o **representació paramètrica** és una aplicació contínua d'un interval tancat de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t)) \end{aligned}$$

Això apareix representat a la Figura 1.

◇ $\sigma(t)$ és un vector de \mathbb{R}^n , però no emprarem, llevat de situacions molt concretes, la notació vectorial amb la fletxa o negreta. El lector hauria de començar a saber distingir el que té entre mans pel contexte on apareix.

Els punts $\sigma(a) = A$ i $\sigma(b) = B$ s'anomenen **extrems** del camí. La gràfica d'un camí, que és un conjunt de punts a \mathbb{R}^n , s'anomena **corba**.

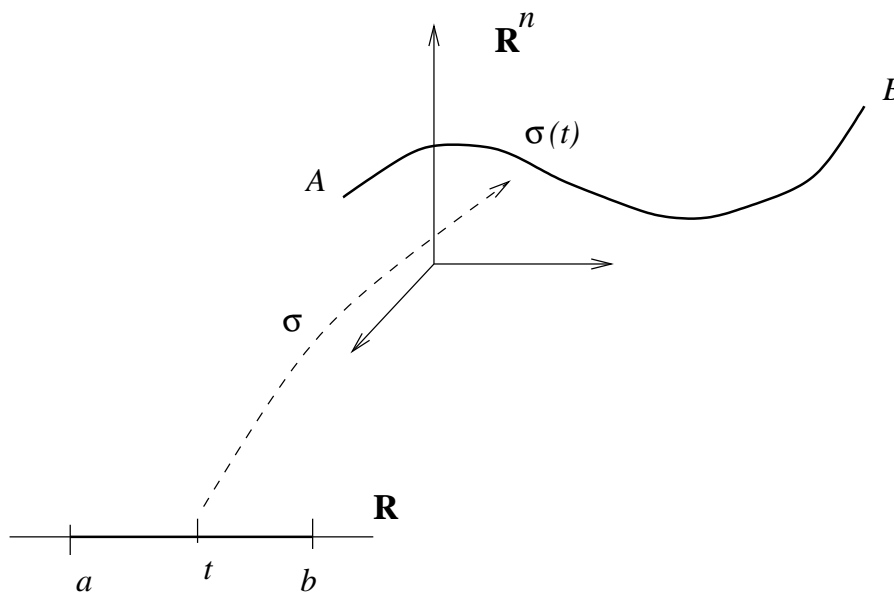


Figura 1: Un camí a \mathbb{R}^n

Cal distingir entre camí i corba ja que diferents camins, és a dir, diferents aplicacions o intervals, poden donar lloc a una mateixa corba. Es diu que un camí donat proporciona una **parametrització** de la corba i t s'anomena llavors el **paràmetre**.

Exemple 1 La circumferència a \mathbb{R}^2 de centre (x_0, y_0) i radi a és, en forma implícita,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

En forma explícita això requereix dues branques

$$y = y_0 \pm \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}.$$

Una possible parametrització és

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x_0 + a \cos t, y_0 + a \sin t) \end{aligned}$$

El paràmetre és en aquest cas l'angle.

Exemple 2 *Siguin els tres camins*

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2, t^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1-t, (1-t)^2) \end{aligned}$$

Podem intentar trobar la forma explícita de les corbes per veure que tenim exactament. Això es fa eliminant el paràmetre entre les equacions. Per exemple, per al camí σ tenim

$$\sigma(t) = (t, t^2) \implies \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

i, eliminant t , queda $y = x^2$. A més, per a $t = 0$ tenim $x = 0$, $y = 0$, mentre que per a $t = 1$ resulta $x = 1$, $y = 1$, de manera que la corba és el tros de paràbola representat a la figura 2. És fàcil comprovar que $\bar{\sigma}$ i $\bar{\bar{\sigma}}$ proporcionen

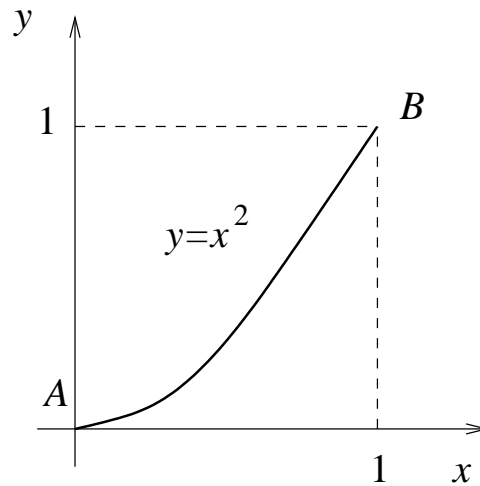


Figura 2: Un tros de paràbola

la mateixa corba, amb la diferència que $\bar{\sigma}$ comença a $(1, 1)$ i acaba a $(0, 0)$. Es diu que $\bar{\sigma}$ té **orientació contrària** a σ i $\bar{\sigma}$. Aquest és un exemple de tres camins i una sola corba.

◇ Els camins sempre comencen pel valor del paràmetre a amb $a < b$. No val, per exemple, dir que el paràmetre varia entre $t = 1$ i $t = 0$.

◇ El camí queda definit per la forma de l'aplicació i per l'interval. Si qualsevol dels dos varia tenim un altre camí, encara que potser sigui la mateixa corba.

◇ La forma explícita d'una corba $y = f(x)$ es pot pensar com una parametrització en què $t = x$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

En general ens interessaran camins C^1 , o al menys C^1 a trosos. Demanar que σ sigui C^1 en un punt vol dir que les components $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ siguin derivables amb derivada contínua en el punt. C^1 a trosos vol dir que és C^1 excepte en un nombre finit de punts, on la derivada pot no existir o presentar discontinuïtats de salt o evitables (però no infinits). En cap cas admetrem camins que no siguin continus.

Exemple 3 El camí $\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definit per

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{si } t \leq 1/3 \\ (t, \frac{1}{3}) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 1/2 \\ (t^2 + \frac{1}{4}, \frac{2}{3}t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

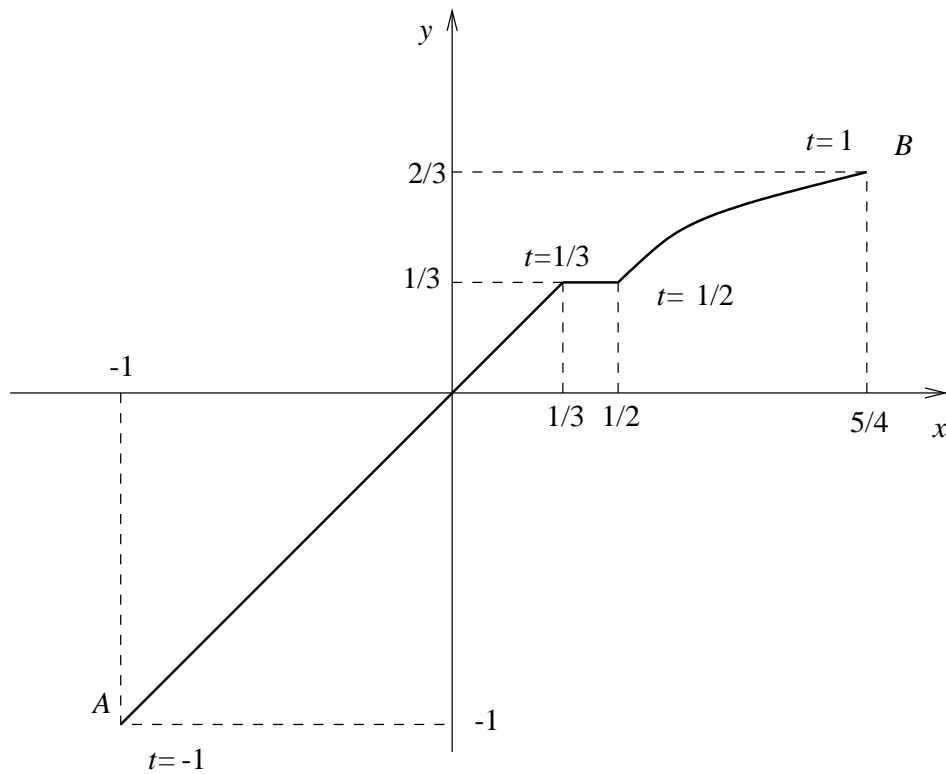
la corba corresponent al qual és a la figura 3, és C^1 a trosos.

Com que $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la derivada en un punt serà una matriu d'una columna i n files:

$$D\sigma(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{d\sigma_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{d\sigma_n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_1(t_0) \\ \vdots \\ \sigma'_n(t_0) \end{pmatrix}$$

Per raons històriques i tipogràfiques, però, s'escriu això com un vector fila

$$D\sigma(t_0) \equiv \sigma'(t_0) = (\sigma'_1(t_0), \dots, \sigma'_n(t_0)).$$

Figura 3: Un camí C^1 a trossos

A \mathbb{R}^3 , per exemple, si anomenem x, y, z les components de σ ,

$$\sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Per definició,

$$\sigma'_i(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_i(t_0 + h) - \sigma_i(t_0)}{h}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Considerant totes les components en el vector, serà

$$\begin{aligned}
 \sigma'(t_0) &= (\sigma'_1(t_0), \dots, \sigma'_n(t_0)) \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_1(t_0 + h) - \sigma_1(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_n(t_0 + h) - \sigma_n(t_0)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sigma_1(t_0 + h), \dots, \sigma_n(t_0 + h)) - (\sigma_1(t_0), \dots, \sigma_n(t_0))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}.
 \end{aligned}$$

Això té una interpretació geomètrica molt senzilla (figura 4). En el límit

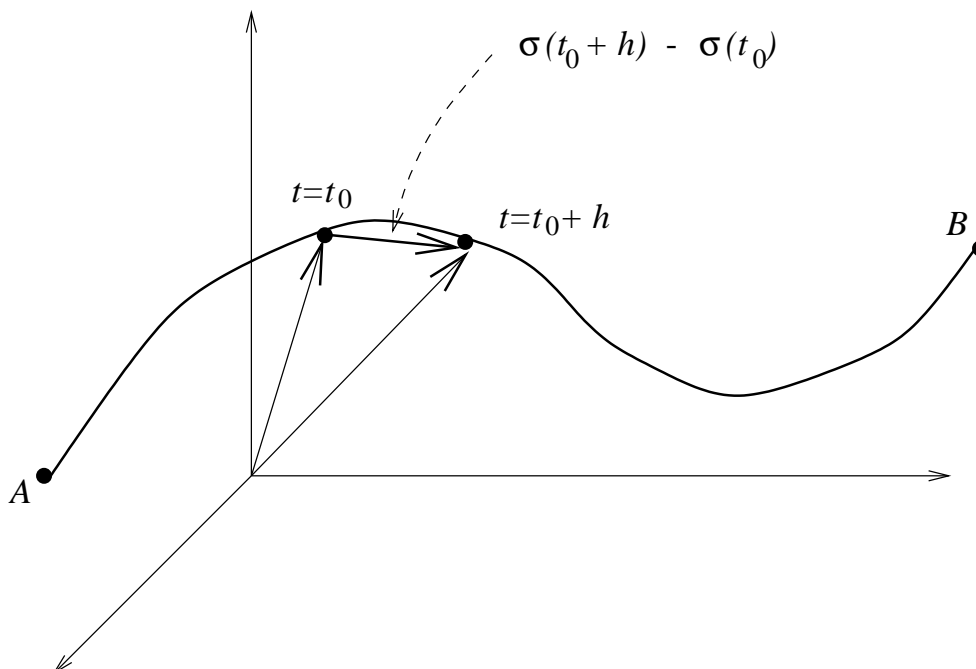


Figura 4: Interpretació de la derivada d'un camí

$h \rightarrow 0$ obtindrem $\sigma'(t_0)$, que serà un vector tangent a la corba en el punt $\sigma(t_0)$. Per aquesta raó, σ' s'anomena **velocitat**. La direcció de σ' és quelcom intrínsec de la corba, però $\|\sigma'\|$ depèn del camí.

◇ En les aplicacions cinemàtiques, t és el temps i $\sigma(t) = \vec{r}(t)$ és el vector posició. Aleshores $\sigma'(t) = \vec{v}(t)$ és la velocitat habitual.

Exemple 4 En l'exemple 2, per a $t = 0.1$ tenim $\sigma(0.1) = (0.1, 0.01)$, $\bar{\sigma}(0.1) = (0.01, 0.0001)$. Com que $\sigma(0) = \bar{\sigma}(0) = (0, 0)$, el camí σ es mou, entre $t = 0$ i $t = 0.1$, més depressa que el camí $\bar{\sigma}$, sobre la mateixa corba. A partir d'un cert moment (quin?) $\bar{\sigma}$ és més ràpid i, finalment, per a $t = 1$, tots dos són a $(1, 1)$.

Exemple 5 Sigui la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi a . Un possible camí és

$$\sigma(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t)), \quad t \in [0, 2\pi/\omega],$$

amb $\omega \neq 0$. Tenim

$$\sigma'(t) = (-a\omega \sin(\omega t), a\omega \cos(\omega t)).$$

Cal observar que $\|\sigma'(t)\| = a\omega$, és a dir, la velocitat és constant en mòdul. Això és una propietat del camí, no de la corba. A més,

$$\sigma(t) \cdot \sigma'(t) = -a^2\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) + a^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0,$$

és a dir, el vector posició i la velocitat són perpendiculars, tal com ha de ser. Això és una característica de la corba, independentment de la parametrització escollida.

Exemple 6 Estudieu $\sigma(t) = (a \cos(\omega^2 t^2), a \sin(\omega^2 t^2))$, $t \in [0, \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}]$.

Un camí C^1 s'anomena **regular** si la velocitat no s'anulla a cap punt interior

$$\sigma'(t) \neq 0 \quad \text{si } t \in (a, b).$$

Una corba s'anomena **tancada** si existeix un camí tal que $\sigma(a) = \sigma(b)$ (figura 5).

Una corba s'anomena **simple** si existeix al menys un camí injectiu en els punts interiors

$$\sigma(t) = \sigma(t') \implies t = t', \quad \forall t, t' \in (a, b).$$

Exemple 7 Sigui $\sigma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (t^3, t^2)$. Això és C^1 ja que $\sigma'(t) = (3t^2, 2t)$ és contínua. Tenim però que $\sigma'(0) = (0, 0)$, $0 \in (-1, 1)$, i per tant el camí no és regular.

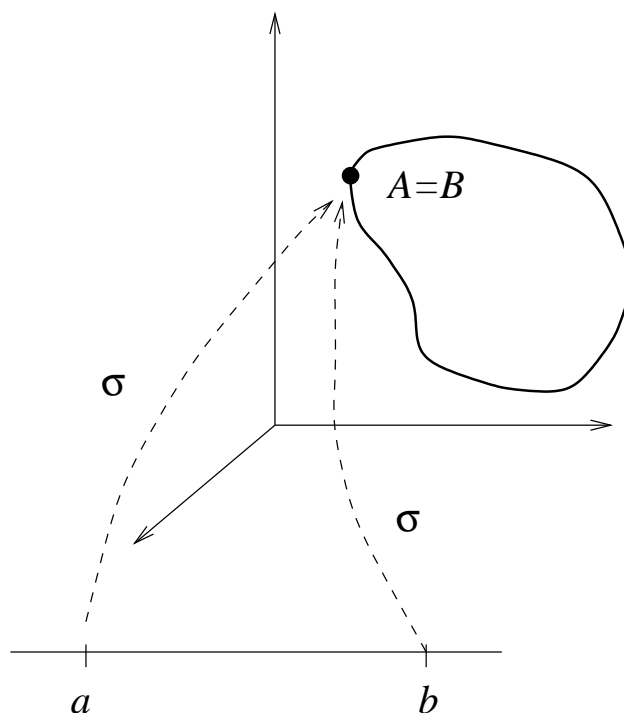


Figura 5: Una corba tancada

Pot ser que quan el camí no és regular la corba presenti una “punxa” o punt de retrocés, tal com passa a l'exemple 7. La corba és, implícitament, $y^3 = x^2$, i, explícitament, $y = \sqrt[3]{x^2}$, amb pendent infinit a $x = 0$ (veure figura 6). Altres vegades, però, la no regularitat és simplement un problema del camí, no de la corba. En canvi, el fet de ser tancada o simple és, per construcció, una propietat de la corba.

Sigui una corba a \mathbb{R}^n i sigui σ un camí C^1 de la mateixa, injectiu a tot arreu excepte possiblement en un nombre finit de punts. Definim llavors la **longitud de la corba** com

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt.$$

Veurem que això no depèn del camí injectiu que s'agafi i que, per tant, podem parlar de la longitud de la corba. Si l'interval $[a, b]$ no és finit, l'anterior integral és impròpia i s'ha de veure si existeix. Si no existeix, la corba té

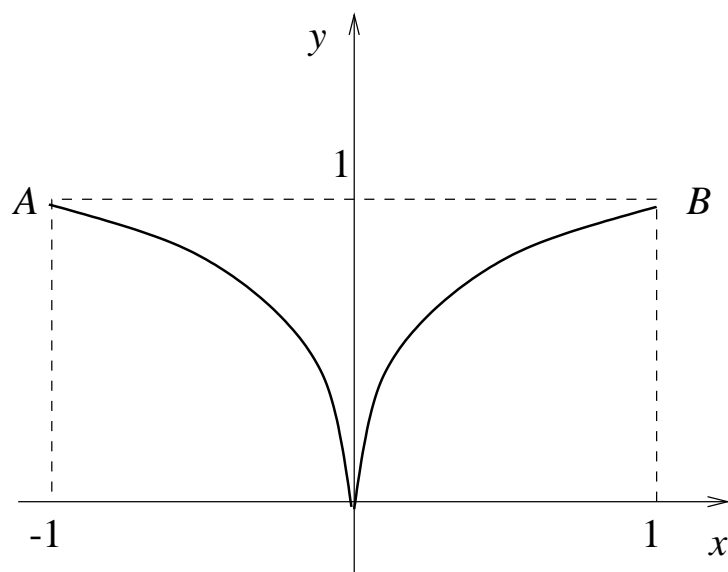


Figura 6: Una corba amb punxa

longitud infinita.

◇ La definició que hem donat de longitud d'una corba és força natural si pensem que t és el temps i $\|\sigma'(t)\|$ representa el mòdul de la velocitat. La integral del mòdul de la velocitat dóna l'espai recorregut, és a dir, la longitud de la corba.

◇ Si σ és C^1 a trosos, aleshores definim la longitud de la corba trencant l'interval d'integració tal com pertoqui.

Exemple 8 Per a la circumferència de l'exemple 1 tenim

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= (-a \sin t, a \cos t), \\ \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = a, \\ l(\sigma) &= \int_0^{2\pi} a \, dt = 2\pi a,\end{aligned}$$

tal com ha de ser.

Un cas particular de la longitud d'una corba s'obté considerant una corba a \mathbb{R}^2 en forma explícita. Sigui $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, de classe

C^1 i injectiu. Tenim

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Si la corba es pot passar en forma explícita, $y = f(x)$, $x_a \leq x \leq x_b$, la funció $x = x(t)$ haurà de ser inversible, de manera que $t = \psi(x)$. Llavors $y = y(\psi(x)) = f(x)$. Efectuem ara a la integral el canvi de variables $t = \psi(x)$. Resulta

$$l(\sigma) = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{(x'(\psi(x)))^2 + (y'(\psi(x)))^2} \psi'(x) dx.$$

Però, emprant la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} x(\psi(x)) = x &\implies x'(\psi(x))\psi'(x) = 1, \\ y(\psi(x)) = f(x) &\implies y'(\psi(x))\psi'(x) = f'(x). \end{aligned}$$

Llavors, si $\psi'(x) \geq 0$, és a dir, si t no disminueix quan augmenta x , tindrem¹

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{(x'(\psi(x))\psi'(x))^2 + (y'(\psi(x))\psi'(x))^2} dx \\ &= \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

Aquesta és l'expressió de la longitud d'una corba a \mathbb{R}^2 donada en forma explícita $y = f(x)$.

2 Integral sobre una corba d'una funció escalar

Donat un camí $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 i injectiu,² i una funció escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, podem construir la funció composta $f \circ \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Es

¹Si $\psi'(x) \leq 0$, aleshores hi ha un canvi de signe a l'entrar $\psi'(x)$ dins l'arrel, però queda compensat per un signe anterior provinent de fer el canvi de variable, ja que llavors $t = a$ correspon a $x = x_b$ i viceversa. Si ψ no fos monòtona, caldria trencar l'interval d'integració en trosos on ho fos, però aquesta possibilitat no es pot donar en el problema que ens ocupa, ja que aleshores la corba no seria expressable en forma explícita.

²Injectiu excepte possiblement en un nombre finit de punts, però no insistirem més en la tema.

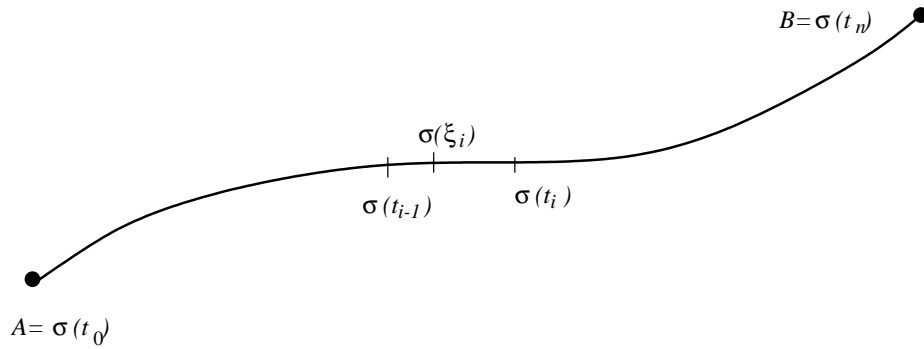


Figura 7: Partició induïda sobre la corba

defineix aleshores la integral de f sobre el camí σ com

$$\int_{\sigma} f = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt.$$

Veurem que, dins la classe de camins injectius, la integral no depèn del camí, i per tant és pròpia de la corba considerada, de manera que podrem escriure, si C és la corba corresponent a σ ,

$$\int_C f.$$

Podem interpretar la integral d'una funció escalar de la següent manera. Sigui una partició de l'interval $[a, b]$,

$$\begin{aligned} [a, b] &= \cup_{i=1}^N [t_{i-1}, t_i], \quad t_{i-1} < t_i, \quad t_0 = a, \quad t_N = b, \\ \Delta t_i &= t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Això induïx una partició sobre la corba (veure figura 7). Podem ara fer una suma de Riemann de $(f \circ \sigma) \|\sigma'\|$:

$$\sum_{i=1}^N f(\sigma(\xi_i)) \|\sigma'(\xi_i)\| \Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

La quantitat $\|\sigma'(\xi_i)\| \Delta t_i$ serà una aproximació a la longitud de la corba entre $\sigma(t_{i-1})$ i $\sigma(t_i)$. Si ara, per exemple, f representa la densitat de massa lineal de la corda,

$$f(\sigma(\xi_i)) \|\sigma'(\xi_i)\| \Delta t_i$$

serà una aproximació a la massa d'aquest tros i el sumatori aproximarà la massa total de la corba. Si ara fem $\max\{\Delta t_i\} \rightarrow 0$, tindrem, si existeix, la integral

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt,$$

que representarà la massa total de la corda.

◇ Si f és la funció constant $f = 1$, aleshores

$$\int_{\sigma} 1 = l(\sigma).$$

La longitud de la corba és, per tant, un cas particular de la integral d'una funció escalar.

S'anomena **valor promig** de f sobre el camí a

$$\bar{f}_{\sigma} = \frac{\int_{\sigma} f}{l(\sigma)}.$$

◇ Sigui $s(\tau)$ la longitud de la corba entre $t = a$ i $t = \tau$:

$$s(\tau) = \int_a^{\tau} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Tenim aleshores

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\|.$$

La variable s s'anomena **paràmetre natural** de la corba i, amb aquest paràmetre,

$$\|\sigma'_{nat}(s)\| = 1,$$

amb $\sigma_{nat}(s) = \sigma(t(s))$, on $t(s)$ s'obté invertint $s(t)$, obtinguda a partir d'una parametrització $\sigma(t)$ qualsevol (injectiva), de manera que

$$\int_{\sigma_{nat}} f = \int_0^{l(\sigma)} f(\sigma_{nat}(s)) ds.$$

3 Integral sobre una corba d'una funció vectorial

Sigui $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció vectorial a \mathbb{R}^n , també anomenada camp vectorial.

◇ A partir d'ara, quan ens interressi destacar el caràcter vectorial d'una funció hi posarem fletxa, i el mateix farem amb les paramtrizacions i les seves derivades.

Sigui $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camí i considerem \vec{F} calculat en un punt del camí, $\vec{F}(\sigma(t))$. Volem considerar la projecció de $\vec{F}(\sigma(t))$ en la direcció del vector tangent a la corba (veure figura 8). Si anomenem $F_T(\sigma(t))$ aquesta projecció, serà

$$F_T(\sigma(t)) = \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\sigma'(t)\|},$$

ja que $\frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ és un vector unitari en la direcció considerada.

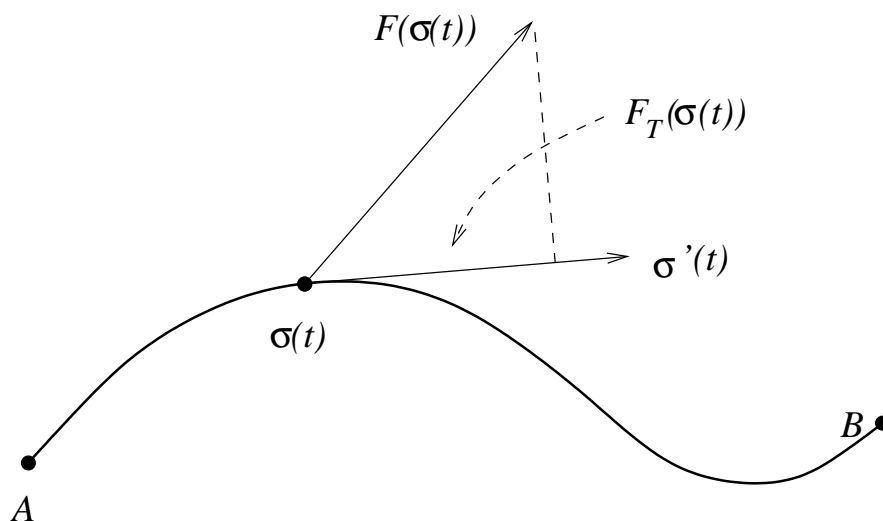


Figura 8: Projecció d'un camp vectorial sobre una corba

La integral de \vec{F} sobre el camí σ , anomenada també integral de línia de \vec{F} sobre σ , es representa i ve definida per

$$\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\sigma} F_T,$$

és a dir, es redueix al càlcul d'una integral de les que ja coneixem. La forma

especial de F_T fa, però, que tot sigui molt més senzill:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_{\sigma} F_T = \int_{\sigma} \vec{F} \cdot \frac{\vec{\sigma}'}{\|\sigma'\|} \\ &= \int_a^b \left(\vec{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right) \|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) dt. \end{aligned}$$

Per tant les integrals de funcions vectorials són més fàcils de calcular que les de les funcions escalars, ja que desapareix el factor $\|\sigma'(t)\|$, que sovint dificulta molt el càlcul de la primitiva.

◇ Si \vec{F} representa una força, aleshores $\int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ és el treball que fa la força al desplaçar el seu punt d'aplicació al llarg de la corba.

◇ Si la corba és tancada, aleshores la integral es representa per

$$\oint_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

i s'anomena la **circulació** de \vec{F} sobre la corba.

◇ Veurem que, llevat d'un signe, la integral no depèn del camí injectiu que s'agafi, i, per tant, té sentit parlar de la integral sobre la corba, de manera que podrem escriure, si C és la corba amb orientació donada,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

A vegades s'utilitza la notació de **formes diferencials**. Per exemple, a \mathbb{R}^3 ,

$$\int_{\sigma} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

vol dir la integral de $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ sobre σ . La justificació naïf és que

$$\begin{aligned} dx &= x'(t) dt, \\ dy &= y'(t) dt, \\ dz &= z'(t) dt, \end{aligned}$$

i, aleshores,

$$\int_{\sigma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_a^b (F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t)) dt = \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{\sigma}') dt.$$

La justificació rigurosa d'això requereix, però, un aparell matemàtic més elaborat ([Spi]).

4 Independència de la integral respecte del camí injectiu escollit

Siguin σ_1 i σ_2 dos camins injectius de classe C^1 que representen la mateixa corba a \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned}\sigma_1 & : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma_2 & : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Això voldrà dir que existeix una funció h

$$h : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1],$$

de classe C^1 , tal que (vegeu figura 9)

$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ h.$$

De fet, si els dos camins són injectius, sols hi ha dues possibilitats:

- $h'(t) \geq 0 \forall t$, i llavors $h(a_2) = a_1$, $h(b_2) = b_1$,
- $h'(t) \leq 0 \forall t$, i llavors $h(a_2) = b_1$, $h(b_2) = a_1$,

tal com mostra la figura 10. En el primer cas, $h' \geq 0$, els dos camins tenen la mateixa orientació i en el segon cas, $h' \leq 0$, tenen orientació oposada.

Exemple 9 *Si considerem els tres camins de l'exemple 2, és fàcil veure que*

- $\bar{\sigma} = \sigma \circ h$, amb $h(t) = t^2$, $h'(t) = 2t \geq 0$,
- $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma \circ h$, amb $h(t) = 1 - t$, $h'(t) = -1 \geq 0$,
- $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}} \circ h$, amb $h(t) = 1 - t^2$, $h'(t) = -2t \leq 0$.

σ i $\bar{\sigma}$ tenen una orientació, i $\bar{\bar{\sigma}}$ té l'oposada.

Si dos camins, encara que no siguin injectius, són C^1 i estan relacionats per una h com la considerada (monòtona), s'anomenen **equivalents**.

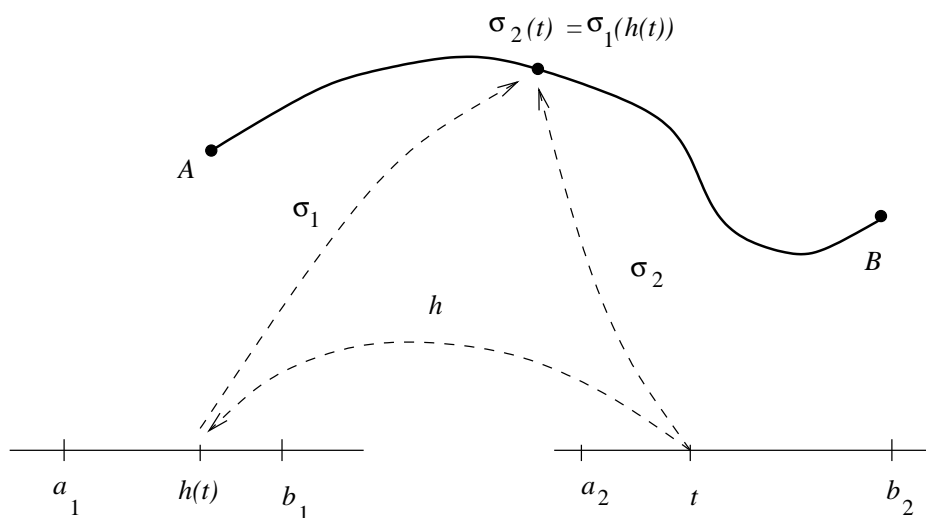


Figura 9: Dues parametritzacions d'una mateixa corba

Exemple 10 *Demostreu que els camins $\sigma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\sigma_2 : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donats per $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $\sigma_2(t) = (\cos(t), \sin t)$ no són equivalents, malgrat que descriuen la mateixa corba.*

Exemple 11 *Demostreu que els camins en el pla*

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= ((t - 1/3)^2, (t - 1/3)^4), \quad t \in [1/9, 4/9], \\ \sigma_2(t) &= (t, t^2), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

no són equivalents, malgrat descriure ambdós el mateix tros de paràbola. Què fa exactament el camí σ_1 ?

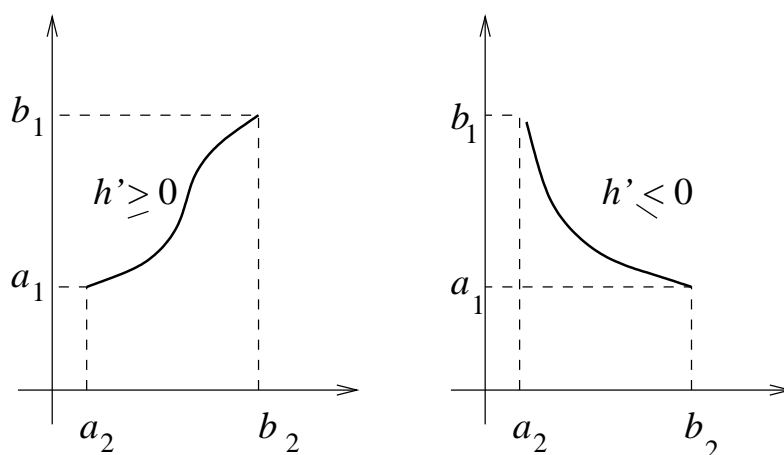
Estem ara en condicions d'enunciar i demostrar el resultat central d'aquesta secció.

Teorema dels camins equivalents

Siguin $\sigma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos camins equivalents i siguin f i F dos camps, escalar i vectorial respectivament. Aleshores

(a)

$$\int_{\sigma_1} f = \int_{\sigma_2} f,$$

Figura 10: Les dues possibilitats per a la funció h

(b)

$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \pm \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

amb “+” si σ_1 i σ_2 tenen la mateixa orientació i “-” si la tenen oposada.

□

Per tant, podem calcular les integrals de funcions escalars amb qualsevol parametrització equivalent, mentre que en el cas de funcions vectorials hem de mirar quin sentit de recorregut de la corba ens interessa. La demostració del teorema és un simple càlcul. Tindrem que $\sigma_2(t) = \sigma_1(h(t))$ i, per la regla de la cadena,

$$\sigma_2'(t) = \sigma_1'(h(t))h'(t).$$

En aquesta expressió, el membre de l'esquerra és un vector i el de la dreta és el producte d'un vector per un escalar. Emprant aquesta expressió i tenint en compte que $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$, la demostració de l'apartat (a) del teorema és

com segueix:

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma_2} f &= \int_{a_2}^{b_2} f(\sigma_2(t)) \|\sigma_2'(t)\| dt \\
 &= \int_{a_2}^{b_2} f(\sigma_1(t)) \|\sigma_1'(t)\| |h'(t)| dt \\
 &\quad \text{canvi de variable } u = h(t) \\
 &= \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} f(\sigma_1(u)) \|\sigma_1'(u)\| du & \text{si } h'(t) \geq 0 \\ \int_{b_1}^{a_1} f(\sigma_1(u)) \|\sigma_1'(u)\| (-du) & \text{si } h'(t) \leq 0 \end{cases} \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} f(\sigma_1(u)) \|\sigma_1'(u)\| du \\
 &= \int_{\sigma_1} f.
 \end{aligned}$$

En canvi, en el cas de funcions vectorials, $h'(t)$ no apareix dins un valor absolut i això provoca el doble signe (feu la demostració com exercici). Això completa la demostració.

◇ Aquest teorema no té res a veure amb la independència de la integral respecte a la corba o trajectòria pel cas de camps vectorials conservadors. Aquí la corba està fixada i el que discutim és la independència de la integral respecte a la nostra manera de donar la descripció de la corba.

5 Superfícies parametritzades

L'exemple més usual de superfície a \mathbb{R}^3 es presenta quan hom considera la gràfica d'una funció (figura 11) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aquesta manera de donar una superfície es coneix com **forma explícita**. Hi ha, però, moltes superfícies que no tenen aquesta interpretació. Per exemple, l'equació d'una superfície esfèrica de radi 1 i centrada a l'origen és $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on z no es pot expressar explícitament de forma unívoca en termes de x i y : la superfície té dos fulls $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ i $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Aquesta manera de donar una superfície, en la forma

$$f(x, y, z) = 0,$$

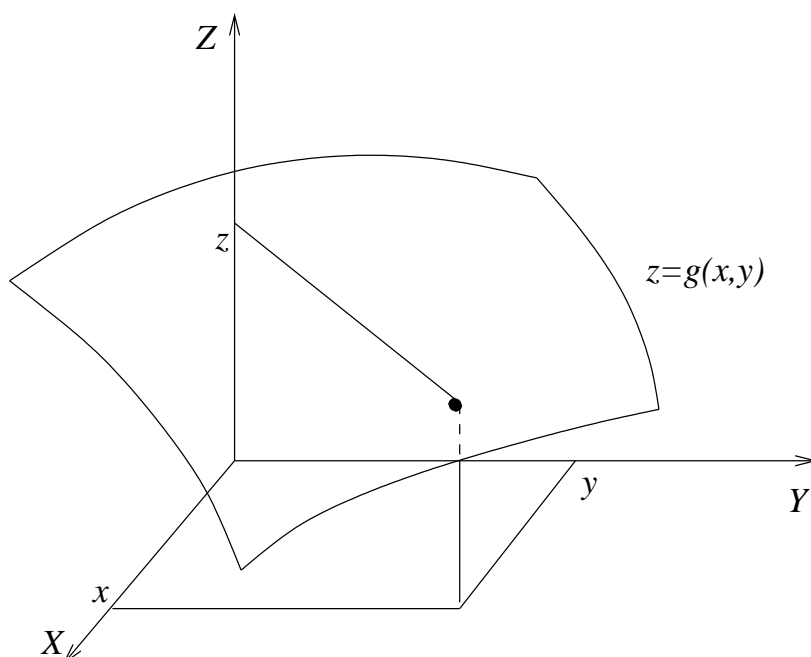


Figura 11: Una superfície en forma explícita

es coneix com **forma implícita**. Si f és de classe C^1 en un entorn d'un punt (x_0, y_0, z_0) pertanyent a la superfície, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, i es verifica que

$$0 \neq \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right),$$

aleshores la superfície admet un pla tangent en el punt considerat, d'equació

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

és a dir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Això vol dir que, localment, la superfície es pot aproximar per un pla, el vector director (normal) del qual és $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$. Es diu que la superfície és **diferenciable** en (x_0, y_0, z_0) . Obviament, hi ha superfícies que tenen punts

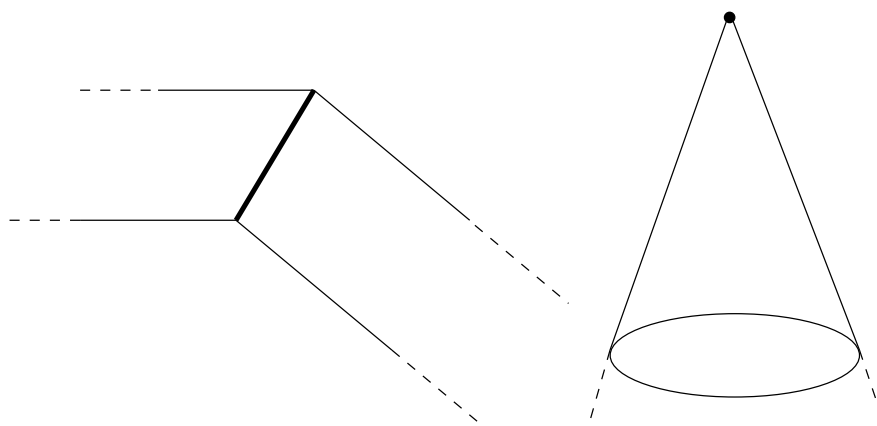


Figura 12: En els punts marcats no hi ha pla tangent

a on no hi ha pla tangent, tal com mostra la figura 12. Si la superfície està donada explícitament com $z = g(x, y)$, aleshores $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ i el vector normal en un punt és

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

El pla tangent resulta ser llavors, si $z_0 = g(x_0, y_0)$,

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Hem vist que podem pensar una corba com un tros de recta $[a, b]$ “deformat” per una aplicació $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. És possible pensar que una superfície és un tros de pla “deformat”? La resposta és afirmativa i ens condueix a la forma paramètrica d’una superfície.

Una **superfície parametritzada** és una funció vectorial

$$\begin{aligned} \Phi : D \in \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

Dessignarem la superfície, la imatge de Φ , per $S = \Phi(D)$ (vegeu la figura 13).

◇ Tal com passava amb les corbes, cal distingir entre la funció Φ i la seva gràfica, que és la superfície. Una mateixa superfície pot ser donada per moltes funcions. Per no ser massa pesats no insistirem però en això.

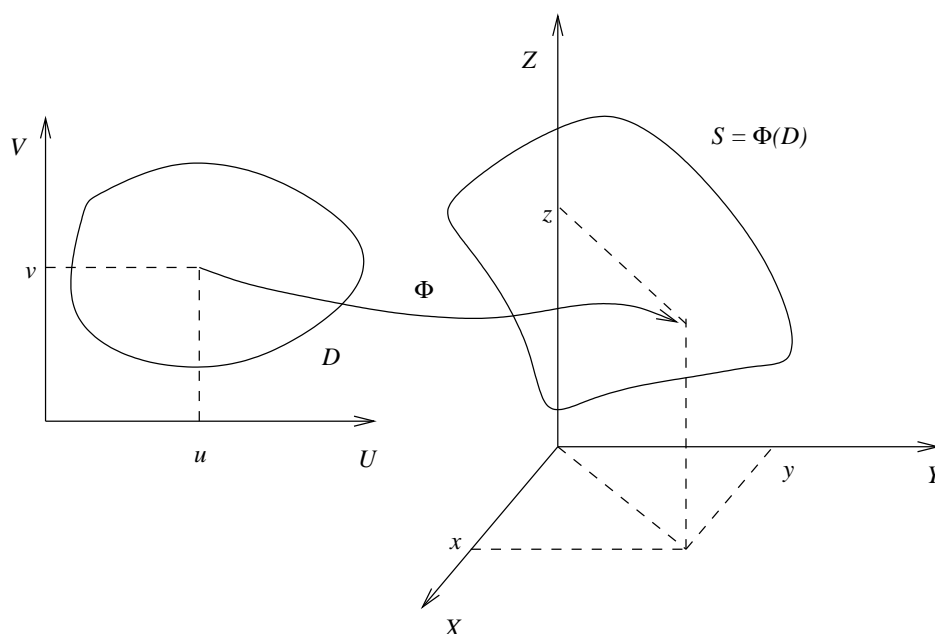


Figura 13: Representació paramètrica d'una superfície

A partir d'ara sols considerarem superfícies que admeten una representació paramètrica Φ de classe C^1 , o al menys de classe C^1 a trosos.

Exemple 12 Una superfície esfèrica de radi a i centre (x_0, y_0, z_0) es pot representar mitjançant

$$\Phi(u, v) = (x_0 + a \sin u \cos v, y_0 + a \sin u \sin v, z_0 + a \cos u),$$

amb $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, és a dir, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi)$. En components (vegeu la figura 14),

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + a \sin u \cos v, \\ y(u, v) &= y_0 + a \sin u \sin v, \\ z(u, v) &= z_0 + a \cos u. \end{aligned}$$

◇ S'ha d'insistir en que la representació paramètrica d'una superfície té dos paràmetres, ja que una superfície és un objecte bidimensional; la representació paramètrica d'una corba té un paràmetre, donat que una corba és un objecte unidimensional.

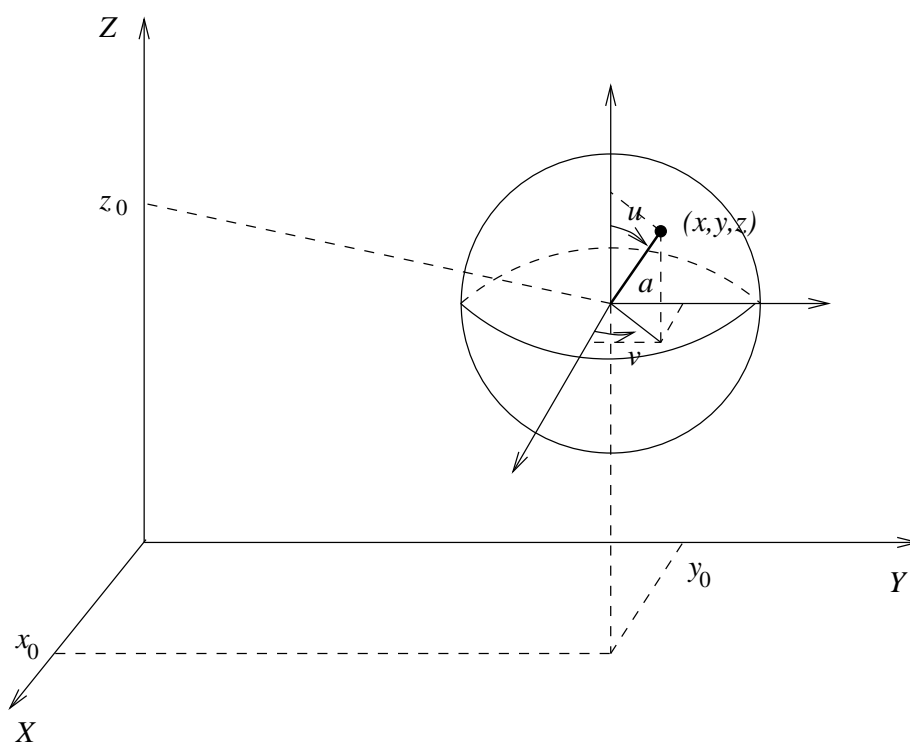


Figura 14: Descripció d'una esfera en coordenades esfèriques de radi fixat.

Sigui Φ de classe C^1 donada. Fixem un valor del paràmetre $u = u_0$ i fem variar v . Obtindrem una funció $\Phi_{u_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Phi_{u_0}(v) = \Phi(u_0, v),$$

és a dir, la representació paramètrica d'una corba a \mathbb{R}^3 , corba que viu sobre la superfície $S = \Phi(D)$. Anàlogament, fixant $v = v_0$ podem construir $\Phi_{v_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb

$$\Phi_{v_0}(u) = \Phi(u, v_0).$$

Si $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, les dues corbes així obtingudes es creuaran, al menys, en el punt (x_0, y_0, z_0) (vegeu la figura 15). Podem ara considerar els

vectors tangents a aquestes dues corbes en el punt (x_0, y_0, z_0) :

$$\vec{T}_v = \Phi'_{u_0}(v)|_{v=v_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right),$$

$$\vec{T}_u = \Phi'_{v_0}(u)|_{u=u_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Com que els vectors \vec{T}_u i \vec{T}_v són tangents a corbes contingudes a la superfície,

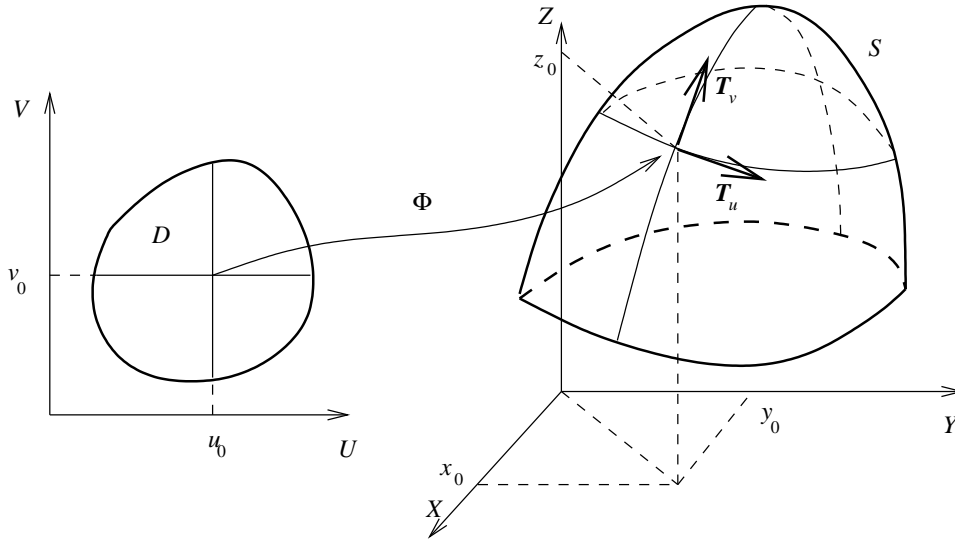


Figura 15: Vectors tangents a la superfície

seran tangents a la superfície i, si no són paral·lels, determinaran un pla tangent a la superfície en el punt (x_0, y_0, z_0) . Un vector normal a aquest pla serà

$$\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)}.$$

Exemple 13 Demostreu que aquest vector normal és paral·lel al vector normal de la superfície en forma implícita, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$, si aquest és diferent de zero. Per exemple, si $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, llavors

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{\nabla} f.$$

Aquest darrer exemple demostra que $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ i $\vec{\nabla}f$ defineixen el mateix pla tangent. Hi pot haver, però, un problema si

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)_{(u_0, v_0)} = 0,$$

ja que llavors $\vec{T}_u \times \vec{T}_v = 0$ mentre que $\vec{\nabla}f \neq 0$. Això vol dir que la parametrització escollida per a la superfície és “dolenta”, al menys per al punt considerat. Canviant de parametrització, és a dir, canviant de Φ , podrem calcular un vector normal en aquest formalisme. Una parametrització s’anomena **regular** en un punt si $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq 0$. Si una superfície admet una parametrització regular i C^1 en un punt, aleshores existeix el pla tangent a la superfície en el punt.

Exemple 14 Sigui el con $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Una possible parametrització és (vegeu la figura 16)

$$\begin{cases} x(u, v) = u \cos v & u \in (-\infty, +\infty) \\ y(u, v) = u \sin v & v \in [0, 2\pi) \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

Tenim

$$\begin{aligned} \vec{T}_u &= (\cos v, \sin v, 1), \\ \vec{T}_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0), \\ \vec{T}_u \times \vec{T}_v &= (-u \cos v, -u \sin v, u). \end{aligned}$$

El punt $(0, 0, 0) = \Phi(0, \text{qualsevol cosa})$ pertany al con (és el vèrtex) i en ell

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v|_{(0, \text{qualsevol cosa})} = 0.$$

Aquest no és, per tant, un punt regular d’aquesta parametrització. En aquest cas el problema no s’arregla, però, canviant de parametrització: el con no té pla tangent en el punt $(0, 0, 0)$, tal com és obvi gràficament i queda confirmat pel fet que, si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $\vec{\nabla}f(0, 0, 0) = 0$. Noteu, però, que totes les funcions són C^1 .

Estem ara ja en condicions de calcular l’àrea d’una superfície parametritzada.

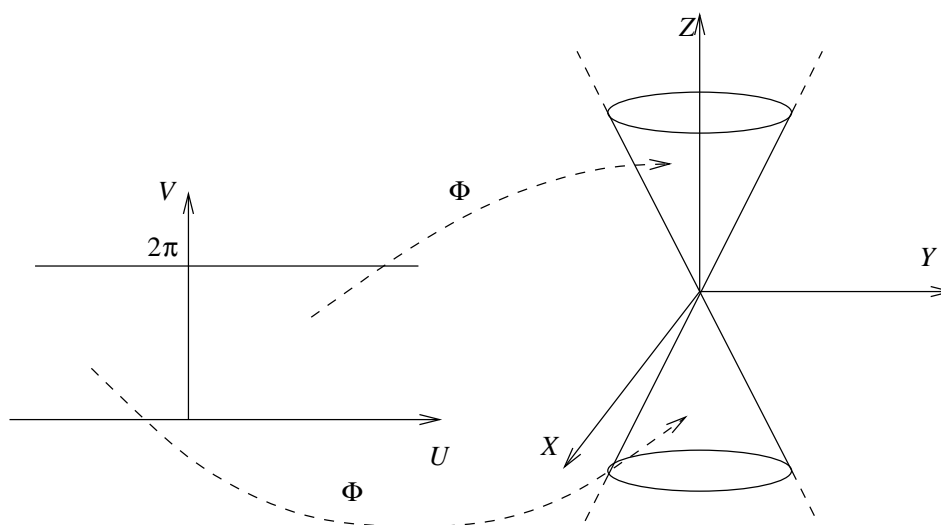


Figura 16: Parametrizació d'un con

Sigui $S = \Phi(D)$, amb Φ de classe C^1 , i regular i injectiva excepte, possiblement, en un nombre finit de punts o corbes de D . Aleshores, l'àrea de la superfície és

$$A(S) = \int \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv.$$

◇ Tal com passava amb les corbes, això no dependrà de la parametrizació C^1 , regular i injectiva escollida.

La definició donada és raonable si es té en compte el següent. Imaginem una partició de D en rectangles. Sigui un rectangle amb vèrtex inferior esquerra (u_0, v_0) i costats Δu i Δv . Si aquests costats són prou petits, la imatge del rectangle serà, aproximadament, un paral·lelogram (vegeu la figura 17). Podem aproximar la superfície pel conjunt de tots aquests paral·lelograms, calcular la seva àrea, sumar i fer el límit quan $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$. Els quatre costats del rectangle considerat tindran, dins d'aquesta aproximació, imat-

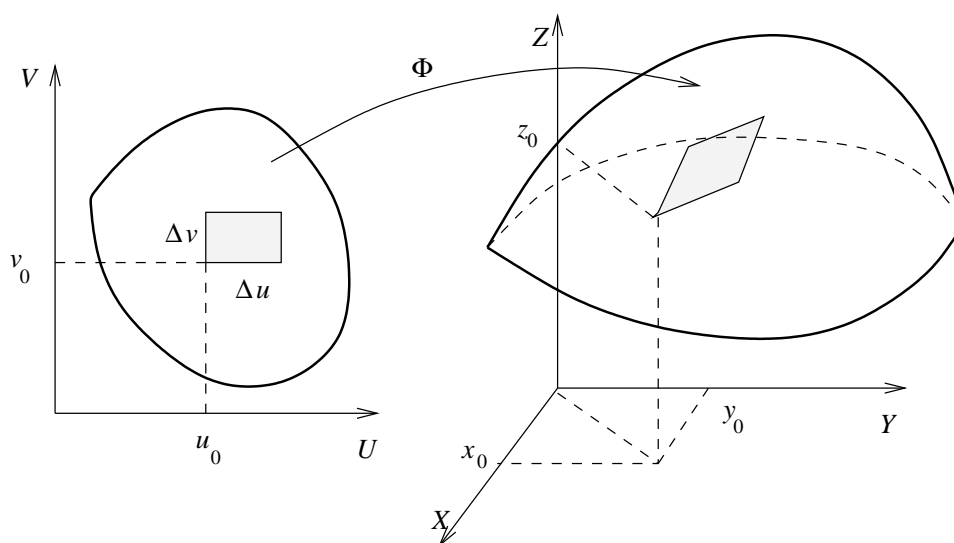


Figura 17: Aproximació de l'àrea d'una superfície

ges donades per

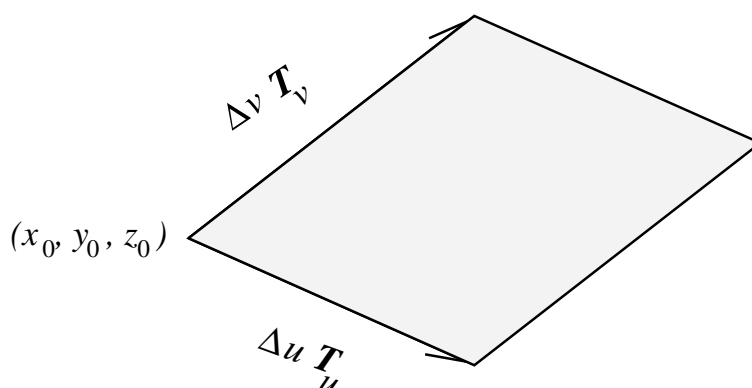
$$\begin{aligned}
 (u_0, v_0) &\mapsto (x_0, y_0, z_0), \\
 (u_0 + \Delta u, v_0) &\mapsto \left(x_0 + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, y_0 + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u, z_0 + \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u\right) \\
 &= (x_0, y_0, z_0) + \Delta u \vec{T}_u, \\
 (u_0, v_0 + \Delta v) &\mapsto (x_0, y_0, z_0) + \Delta v \vec{T}_v, \\
 (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) &\mapsto (x_0, y_0, z_0) + \Delta u \vec{T}_u + \Delta v \vec{T}_v.
 \end{aligned}$$

El paral·lelogram que s'obté està dibuixat a la figura 18. L'àrea d'aquest paral·lelogram és igual al mòdul del producte vectorial dels vectors que defineixen els seus costats:

$$\|(\Delta u \vec{T}_u) \times (\Delta v \vec{T}_v)\| = \Delta u \Delta v \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|.$$

Llavors

$$A(S) = \lim_{\max\{\Delta u, \Delta v\} \rightarrow 0} \sum_{\text{rectangles}} \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \Delta u \Delta v = \iint_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, du \, dv.$$

Figura 18: Imatge d'un rectangle de D

Exemple 15 Càlcul de l'àrea d'una superfície esfèrica de radi a . Anomenant θ, ϕ als parametres, agafem

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \phi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = a \sin \theta \sin \phi & 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = a \cos \theta \end{cases}$$

Llavors

$$\begin{aligned} \vec{T}_\theta &= (a \cos \theta \cos \phi, a \cos \theta \sin \phi, -a \sin \theta), \\ \vec{T}_\phi &= (-a \sin \theta \sin \phi, a \sin \theta \cos \phi, 0), \\ \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi &= (a^2 \sin^2 \theta \cos \phi, a^2 \sin^2 \theta \sin \phi, a^2 \sin \theta \cos \theta), \\ \|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| &= a^2 \sqrt{\sin^2 \theta} = a^2 |\sin \theta| = a^2 \sin \theta \quad \text{ja que } 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} A(\text{esfera de radi } a) &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi a^2 \sin \theta \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

◇ En aquest exemple hem treballat, de fet, amb coordenades esfèriques amb radi fixat, però **no cal posar cap mena de Jacobià** a la integral doble: el factor $\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\|$ ja ho té tot en compte, tal com es dedueix del raonament que hem efectuat.

◇ En aquest exemple, la normal $\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi$ apunta cap a l'exterior de l'esfera. Per exemple, en el punt $(a, 0, 0) = \Phi(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ tenim $\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi = (a^2, 0, 0)$. Si haguèssim canviat l'ordre dels paràmetres, considerant primer ϕ i segon θ , hauriem obtingut una normal cap dintre. En el càlcul precedent això és irrellevant, ja que finalment sols el mòdul de la normal importa.

6 Superfícies orientables i no orientables

A la darrera secció hem parlat de “normal cap dintre” i “normal cap fora” en el cas d'una superfície esfèrica. Anem ara a precisar una mica això.

Una **superfície orientable** és una superfície amb dos costats: un s'anomena “exterior” o positiu i l'altra “interior” o negatiu (les denominacions exterior i interior no tenen massa sentit en el cas de superfícies obertes, però les emprarem igualment). A cada punt (x, y, z) de S es poden escollir dos vectors normals \vec{n}_1 i \vec{n}_2 amb $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ (vegeu la figura 19). En termes d'una parametrització es té, per exemple, $\vec{n}_1 = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$, $\vec{n}_2 = \vec{T}_v \times \vec{T}_u$. **Orientar la superfície** vol dir escollir quin dels dos vectors normals és el positiu.

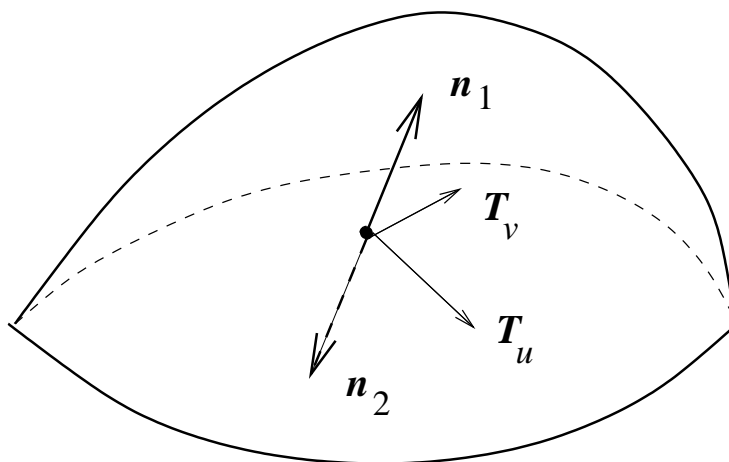


Figura 19: Les dues normals d'una superfície amb dos costats

Si hem parlat de superfícies orientables voldrà dir que n'hi ha de no orientables, és a dir, superfícies amb un sol costat. L'exemple més senzill és l'anomenada **cinta de Moebius**, que pot obtenir-se ajuntant els costats

oposats d'un rectangle, però torsionant-lo. Referint-nos a la figura 20, A es fa coincidir amb A' i B amb B' . El resultat, amb $b = 1$ i $a = 3$, es mostra a la figura 21. Aquesta superfície té una sola cara. Si comencem en un punt i ens anem movent, sense creuar la vora, al final acabem en el mateix punt però a l'altra banda: no hi ha manera de distingir dues cares.

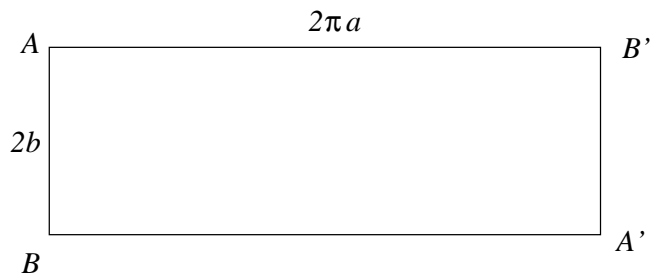


Figura 20: Generació d'una cinta de Moebius

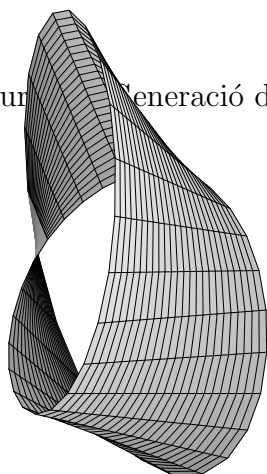


Figura 21: Una cinta de Moebius

Una possible parametrització d'una cinta de Moebius de radi a i alçada $2b$ és

$$\begin{cases} x = (a + br \sin \frac{\phi}{2}) \cos \phi \\ y = (a + br \sin \frac{\phi}{2}) \sin \phi \\ z = br \cos \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \phi \in [0, 2\pi) \\ r \in [-1, 1] \end{array}$$

Els vectors tangents són

$$\begin{aligned}\vec{T}_r &= \left(b \sin \frac{\phi}{2} \cos \phi, b \sin \frac{\phi}{2} \sin \phi, b \cos \frac{\phi}{2} \right), \\ \vec{T}_\phi &= \left(-(a + br \sin \frac{\phi}{2}) \sin \phi + \frac{b}{2} r \cos \frac{\phi}{2} \cos \phi, \right. \\ &\quad \left. (a + br \sin \frac{\phi}{2}) \cos \phi + \frac{b}{2} r \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi, \right. \\ &\quad \left. -\frac{b}{2} r \sin \frac{\phi}{2} \right).\end{aligned}$$

Un vector normal és

$$\begin{aligned}\vec{T}_\phi \times \vec{T}_r &= \left(\frac{b^2}{2} r \sin \phi + b \cos \frac{\phi}{2} \cos \phi (a + br \sin \frac{\phi}{2}), \right. \\ &\quad \left. -\frac{b^2}{2} r \cos \phi + b \cos \frac{\phi}{2} \sin \phi (a + br \sin \frac{\phi}{2}), \right. \\ &\quad \left. -b \sin \frac{\phi}{2} (a + br \sin \frac{\phi}{2}) \right).\end{aligned}$$

Llavors, si calculem el vector normal en el punt $(a, 0, 0)$, que correspon a $r = 0$, $\phi = 0$, tenim

$$\left(\vec{T}_\phi \times \vec{T}_r \right)_{\substack{r=0 \\ \phi=0}} = (ab, 0, 0).$$

D'altra banda, si donem la volta,

$$\lim_{\phi \rightarrow 2\pi} \left(\vec{T}_\phi \times \vec{T}_r \right)_{r=0} = (-ab, 0, 0),$$

és a dir, que, sense creuar cap vora, hem tornat al mateix punt però ara “mirem” en direcció contrària.

Les superfícies no orientables juguen un paper fonamental en certes teories de les interaccions fonamentals de la Natura, però nosaltres sols les recordarem per avisar que certs teoremes, com el de Stokes, sols s'apliquen a superfícies orientables.

7 Integrals de superfície de funcions escalars i vectorials

Tal com havíem fet en el cas de corbes, una vegada sabem com calcular l'àrea d'una superfície, no hi ha cap problema en definir integrals de funcions sobre superfícies.

Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i sigui Φ una parametrització C^1 , i injectiva quasi a tot arreu, d'una superfície S , $S = \Phi(D)$. Definim llavors

$$\int_{\Phi} f = \int \int_D f(\Phi(u, v)) \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv.$$

◇ Com que això no dependrà de la parametrització injectiva escollida, té sentit parlar de la integral sobre la superfície S , i s'escriu

$$\int_S f.$$

Si f representa, per exemple, la càrrega elèctrica per unitat de superfície, llavors la integral anterior és la càrrega elèctrica total de la superfície.

Sigui ara $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un camp vectorial i sigui de nou $S = \Phi(D)$ una superfície parametritzada, amb les mateixes condicions que abans. Definim la integral de \vec{F} sobre S

$$\int_{\Phi} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

com la integral de la funció escalar

$$F_N = \vec{F} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

és a dir, de la component de \vec{F} normal a cada punt de la superfície. Per tant

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Phi} \vec{F} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \int \int_D \vec{F} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \|\vec{n}\| \, dudv \\ &= \int \int_D \vec{F} \cdot \vec{n} \, dudv. \end{aligned}$$

◇ Igual que abans, això no depèn de la bona parametrització de S que s'agafi, de manera que s'escriu

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

amb la diferència, però, que pot haver-hi un canvi de signe, cosa que es veu directament ja que si \vec{n} canvia de signe també ho fa la integral. Això no passava per a funcions escalars, ja que allí teniem el mòdul de \vec{n} .

◇ En el contexte de la Física, $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ s'anomena el **flux** de \vec{F} a través de S .

◇ Si S és una superfície tancada, s'escriu

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Donada una superfície S orientada, direm que la parametrització $\Phi(u, v)$ preserva l'orientació de S si $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ defineix una normal positiva, és a dir, que apunta en el mateix sentit que previament havíem definit com a positiu per a S , i direm que inverteix l'orientació en cas contrari. Obviament, si $\Phi : (u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ preserva l'orientació, aleshores $\Phi^- : (v, u) \mapsto \Phi(u, v)$ la inverteix.

Podem ara enunciar el teorema d'independència de les integrals respecte a la bona parametrització escollida.

Teorema

Sigui S una superfície orientada i siguin Φ_1 i Φ_2 dues parametritzacions de la mateixa, injectives quasi a tot arreu. Aleshores, si f és un camp escalar i \vec{F} un camp vectorial, tenim

$$\int_{\Phi_1} f = \int_{\Phi_2} f,$$

mentre que

$$\int_{\Phi_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \pm \int_{\Phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

on el signe $+$ val si Φ_1 i Φ_2 preserven o inverteixen simultàniament l'orientació de S , i el $-$ en cas que una la inverteixi i l'altra la preservi. \square

La demostració es deixa com exercici al lector, que es pot inspirar en la corresponent demostració per a corbes. Caldrà definir el concepte de parametritzacions equivalents, etc.

Part II

Teoremes integrals

8 L'operador nabra i les seves propietats

L'operador nabra, designat per $\vec{\nabla}$, és un operador diferencial vectorial³ que, en coordenades cartesianes, té la forma, a \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Cada una de les components és un operador de derivació i, com a tal, obeeix les regles de derivació. Quan $\vec{\nabla}$ actua sobre funcions escalars o vectorials s'obtenen diverses quantitats importants:

- **gradient** d'una funció escalar $f(x, y, z)$, és un camp vectorial donat per

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &\equiv \text{grad } f. \end{aligned}$$

En un punt (x, y, z) donat, $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ apunta en la direcció en el que el valor de f augmenta el més ràpidament possible.

- **divergència** d'una funció vectorial $\vec{F}(x, y, z)$, és una funció escalar, producte escalar de $\vec{\nabla}$ i \vec{F} ,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &\equiv \text{div } \vec{F}. \end{aligned}$$

³Un operador diferencial vectorial és un vector les components del qual contenen operacions de derivació.

- **rotacional** d'una funció vectorial $\vec{F}(x, y, z)$, és un camp vectorial, producte vectorial de $\vec{\nabla}$ i \vec{F} ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_x, F_y, F_z) \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &\equiv \text{rot } \vec{F}.\end{aligned}$$

- **Laplacià** d'una funció escalar $f(x, y, z)$, és una funció escalar, la divergència del gradient de f ,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= (\vec{\nabla})^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

- Laplaciana d'un camp vectorial \vec{F} , és un camp vectorial format pels Laplacians de les components,

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z).$$

Evitem les notacions $\text{grad } f$, $\text{div } \vec{F}$ i $\text{rot } \vec{F}$ ja que utilitzen de forma inconsistent la notació vectorial.

El fet que $\vec{\nabla}$ sigui alhora un vector i un operador de derivació fa que tingui les propietats d'ambdós tipus d'objectes. Les més importants són les següents:

1. $\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$,
2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$,
3. $\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$,
4. $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$,
5. $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$,

6. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}),$
7. $\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}),$
8. $\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}),$
9. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0,$
10. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0,$
11. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$

La demostració d'aquestes igualtats és un simple càlcul,⁴ que es deixa al lector, el qual podrà, si ho intenta, descobrir el significat d'algunes de les expressions dels membres drets (significat que, d'altra banda, és el més obvi). Aquest càlcul, però, es simplifica, en els casos més complicats, si s'utilitza l'anomenat conveni de sumació d'Einstein, juntament amb una representació intel·ligent dels vectors, de $\vec{\nabla}$ i del producte vectorial, tal com es mostra a l'apèndix.

Per acabar aquesta secció, parlarem una mica de canvis de coordenades. En concret, volem saber com s'expressa el Laplacà en coordenades no cartesianes, qüestió aquesta força útil, per exemple per a resoldre problemes d'electrostàtica.

Per concretar, imaginem que volem treballar amb coordenades cilíndriques a \mathbb{R}^3 (o coordenades polars a \mathbb{R}^2):

$$\begin{cases} x = r \cos \phi & r \in [0, +\infty) \\ y = r \sin \phi & \phi \in [0, 2\pi) \\ z = z & z \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Sigui ara una funció $f(r, \phi, z)$ de la que, a través de la dependència de les coordenades cilíndriques de les cartesianes, volem calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r, \phi, z).$$

Aplicant la regla de la cadena tenim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r, \phi, z) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z},$$

⁴A les propietats 9-11 es suposa que els camps són C^2

i anàlogament si volem calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$. Expressant-ho tot vectorialment tindrem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Això es pot escriure, amb notació matricial compacte i autoexplicativa, com

$$\vec{\nabla}_{(x,y,z)} f = M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)} f.$$

Pensant una mica, es veu que la matriu M és

$$M = \left(\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)} \right)^{-1} \right)^T,$$

on

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)}$$

és la derivada de l'aplicació que expressa les coordenades cartesianes en termes de les cilíndriques:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hom obté així

$$M = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{1}{r} \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relació $\vec{\nabla}_{(x,y,z)} f = M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)} f$ pot llegir-se, prescindint de la funció f , com

$$\vec{\nabla}_{(x,y,z)} = M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)},$$

que expressa de manera compacta com canvien les derivades parcials al canviar de sistema de coordenades. Per a un sistema de coordenades (u, v, w) qualsevol es té

$$\vec{\nabla}_{(x,y,z)} = M \vec{\nabla}_{(u,v,w)},$$

amb

$$M = \left(\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right)^{-1} \right)^T.$$

Tornant al nostre problema, serà,

$$\nabla_{(x,y,z)}^2 f = \vec{\nabla}_{(x,y,z)} \cdot \vec{\nabla}_{(x,y,z)} f = (M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)}) \cdot (M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)} f).$$

S'ha de tenir en compte que les derivades que hi ha en el primer $\vec{\nabla}_{(r,\phi,z)}$ actuen tant sobre el segon M com sobre f . Hom té

$$M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)} = \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$M \vec{\nabla}_{(r,\phi,z)} f = \left(\cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi}, \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Multiplicant escalarment aquests dos vectors s'arriba a que

$$\nabla_{(x,y,z)}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

El membre de la dreta és el que s'anomena el Laplaciana en coordenades cilíndriques. Simbòlicament, prescindint de la funció f ,

$$\begin{aligned} \nabla_{(r,\phi,z)}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Exemple 16 *Demostreu que el Laplaciana en coordenades esfèriques*

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi & \rho \in [0, +\infty) \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, \pi/2] \\ z = \rho \cos \theta & \phi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

val

$$\nabla_{(\rho,\theta,\phi)}^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

9 El teorema de Green en el pla

El teorema de Green relaciona integrals de camps vectorials sobre corbes tancades en el pla amb integrals dobles sobre les regions tancades per les mateixes, i pot ser considerat com un cas particular del teorema de Stokes a l'espai, que veurem a la secció següent. Presentarem primer un enunciat restringit i veurem després com es pot estendre a regions més generals.

Teorema de Green (restringit)

Sigui $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un camp vectorial C^1 a \mathbb{R}^2 i sigui D una regió de tipus 3 de \mathbb{R}^2 . Aleshores

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C^+} P dx + Q dy,$$

on C^+ és la corba tancada que envolta D , orientada en sentit antihorari. \square

El que farem serà veure que per regions de tipus 1 tenim que

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{C^+} P dx,$$

mentre que

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{C^+} Q dy$$

per a regions de tipus 2. Per a regions de tipus 3 ambdós enunciats seran vàlids i, presos conjuntament, demostraran l'enunciat.

Si D és de tipus 1, aleshores és de la forma representada a la figura 22. Tindrem que $C^+ = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ i

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy.$$

Com que \vec{F} és de classe C^1 , la derivada $\partial P/\partial y$ serà contínua i per tant podrem aplicar la regla de Barrow per a calcular la integral respecte a y , $\forall x$:

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b dx P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} = \int_a^b (P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))) dx.$$

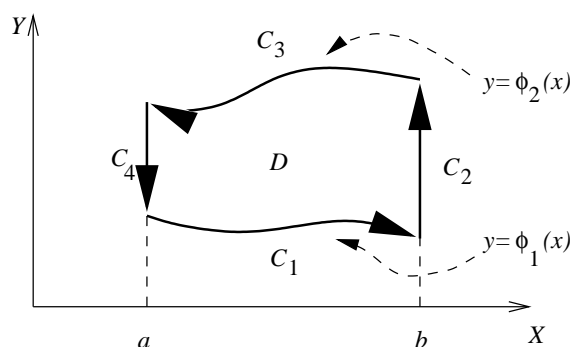


Figura 22: Una regió de tipus 1

Resulta, però, que

$$\begin{cases} x = x \\ y = \phi_1(x) \end{cases} \quad x \in [a, b],$$

és una parametrització de la corba C_1 orientada segons el dibuix, mentre que

$$\begin{cases} x = x \\ y = \phi_2(x) \end{cases} \quad x \in [a, b],$$

és una parametrització de C_3 orientada en sentit contrari al del dibuix. Per tant

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, \phi_1(x)) \, dx &= \int_{C_1} P(x, y) \, dx, \\ - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) \, dx &= - \int_{C_3^-} P(x, y) \, dx = \int_{C_3} P(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\int_{C_2} P(x, y) \, dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) \, dx,$$

ja que en aquestes corbes el vector tangent té component x nul·la. Per tant

$$\begin{aligned} & \int \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} \, dx dy \\ &= \int_{C_1} P(x, y) \, dx + \int_{C_3} P(x, y) \, dx \\ &= \int_{C_1} P(x, y) \, dx + \int_{C_2} P(x, y) \, dx + \int_{C_3} P(x, y) \, dx + \int_{C_4} P(x, y) \, dx \\ &= \int_{C^+} P(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

De la mateixa manera es demostra el resultat referent a regions de tipus 2 (feu-ho), i això completa la demostració.

El teorema de Green es pot estendre a regions de tipus més general. Sigui per exemple la regió mostrada a la figura 23. Aquesta regió es pot dividir en regions de tipus 3, per exemple tal com mostra la figura 24. Referint-nos a ella, tenim que $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ i $C^+ = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Com que les tres regions són de tipus 3, podem aplicar l'anterior teorema de Green i serà (prescindim dels integrants)

$$\begin{aligned} \int \int_{D_1} &= \oint_{C_1 \cup C_4^- \cup C_5^-} = \int_{C_1} + \int_{C_4^-} + \int_{C_5^-} = \int_{C_1} - \int_{C_4} - \int_{C_5}, \\ \int \int_{D_2} &= \oint_{C_2 \cup C_4} = \int_{C_2} + \int_{C_4}, \\ \int \int_{D_3} &= \oint_{C_3 \cup C_5} = \int_{C_3} + \int_{C_5}. \end{aligned}$$

Recollint tots aquests resultats tenim

$$\int \int_D = \int \int_{D_1} + \int \int_{D_2} + \int \int_{D_3} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = \oint_{C^+},$$

i per tant el teorema de Green també és vàlid en aquest cas. Hem demostrat per tant el

Teorema de Green

Sigui $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un camp vectorial de classe C^1 en una regió $D \in \mathbb{R}^2$ tancada per una corba C^+ , de classe C^1 a trosos i orientada en sentit antihorari. Aleshores

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy = \oint_{C^+} P \, dx + Q \, dy.$$

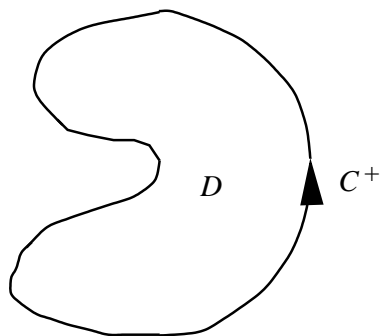


Figura 23: Una regió qualsevol

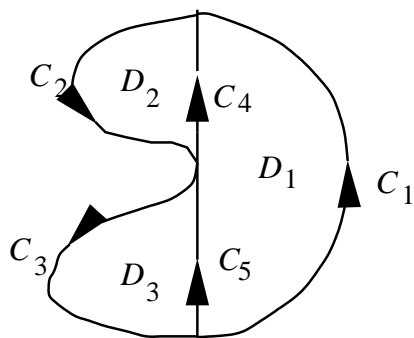


Figura 24: La regió anterior dividida en regions de tipus 3

□

De fet, podem anar més enllà i, amb un conveni adient, veure que el teorema de Green és vàlid per a regions amb “forats”. Per exemple, la regió de la figura 25, limitada per la corba exterior Γ i la corba interior γ , es pot descomposar en regions sense forats, tal com mostra la figura 26. Aplicant

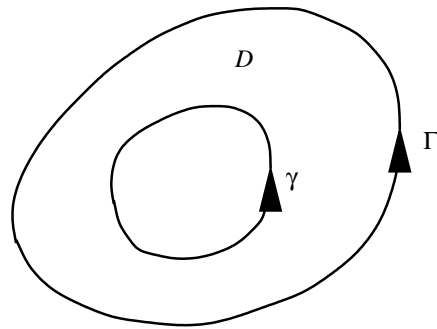


Figura 25: Una regió foradada

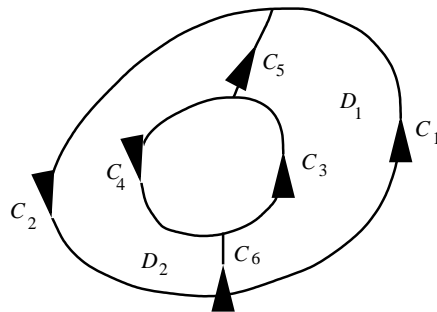


Figura 26: Una descomposició de la regió anterior

el teorema de Green a les regions \$D_1\$ i \$D_2\$ tenim

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} &= \int_{C_1} - \int_{C_5} - \int_{C_3} - \int_{C_6}, \\ \iint_{D_2} &= \int_{C_6} - \int_{C_4} + \int_{C_5} + \int_{C_2}, \\ \iint_D &= \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_{C_1} + \int_{C_2} - \int_{C_3} - \int_{C_4} \\ &= \oint_{\Gamma} - \oint_{\gamma} = \oint_{\Gamma} + \oint_{\gamma^-}. \end{aligned}$$

Per tant, el teorema de Green és aplicable a regions amb forats, sempre que la corba interior (o les corbes interiors) s'agafi en sentit negatiu (horari).

En qualsevol cas, és important que les corbes tancades considerades es

puguin orientar en sentit antihorari, i això exclou les corbes que s'autotallen (corbes no simples), tal com mostra l'exemple següent.

Exemple 17 Sigui la corba plana C amb parametrització $\sigma(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$ donada per

$$\begin{cases} x(\phi) = \cos \phi \\ y(\phi) = \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}\right) \sin \phi \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

La corba està dibuixada a la figura 27. Cal observar que $\sigma(\pi/2) = \sigma(3\pi/2) =$

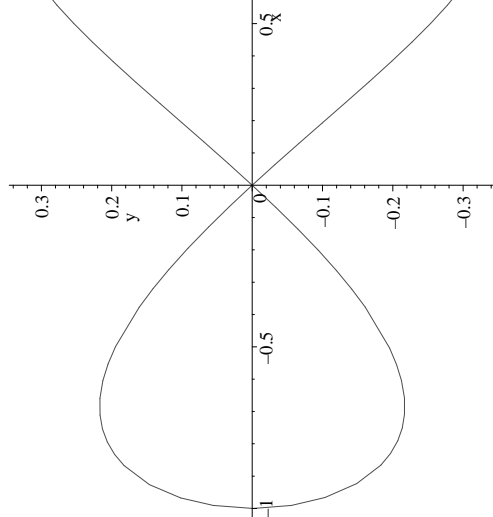


Figura 27: Una corba no simple

$(0, 0)$, és a dir, la corba es talla a ella mateixa en el punt $(0, 0)$, i que el sentit de recorregut és quadrants $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, i no quadrants $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (llavors diríem que la corba es “toca” en lloc de es “talla”), ja que

$$\begin{aligned} \sigma'(\pi/2) &= (-1, -1/2), \\ \sigma'(3\pi/2) &= (1, -1/2). \end{aligned}$$

Encara que això ja es veu en el dibuix, hom pot comprovar que $x(\pi + \epsilon) = x(\pi - \epsilon)$ i $y(\pi + \epsilon) = -y(\pi - \epsilon)$. Com que $\sigma(\pi) = (-1, 0)$, això indica que la

corba és simètrica respecte a l'eix de les X . Fixem-nos que aquesta corba no té orientació definida: el lòbul de la dreta és antihorari però el de l'esquerra és horari. Com que el teorema de Green és vàlid aplicat a cada un dels lòbuls amb orientació antihorària, ja es veu que no serà aplicable a la corba donada. Considerem per exemple el camp vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (y, 0) \equiv (P(x, y), Q(x, y)).$$

D'una banda tindrem

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{l} &= \oint_C y \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}) \sin \phi (-\sin \phi) \, d\phi \\ &= -\pi + \frac{32\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

D'altra banda

$$\begin{aligned} \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int \int (-1) dx dy = -\text{àrea}(D) \\ &= -2(\text{àrea}(LSD) + \text{àrea}(LSE)), \end{aligned}$$

on LSD és el (semi)lòbul superior dret i LSE l'esquerra. L'àrea d'aquests semilòbuls és difícil de calcular directament. Resulta, però, que sobre ells sí que podem aplicar el teorema de Green i tindrem

$$\begin{aligned} \text{àrea}(LSD) &= \int \int_{LSD} \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{FLSD} (-y) \, dx = - \oint_{FLSD} y \, dx, \end{aligned}$$

on $FLSD$ és la corba que limita LSD recorreguda en sentit antihorari. Aquesta corba tancada té dues components: un tros d'eix X , que anomenarem \mathcal{R} , i un tros de la corba original, corresponent als valors del paràmetre entre $\phi = 0$ i $\phi = \pi/2$, que anomenarem \mathcal{C} . Tenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} y \, dx &= 0 \text{ per ser } y = 0 \text{ sobre } \mathcal{R}, \\ \int_{\mathcal{C}} y \, dx &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}) \sin \phi (-\sin \phi) \, d\phi \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{64\sqrt{2} - 56}{60}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\text{àrea}(LSD) = \frac{\pi}{4} - \frac{64\sqrt{2} - 56}{60}.$$

De la mateixa manera es veu que

$$\begin{aligned} \text{àrea}(LSE) &= \oint_{FLSE} (-y) dx = \oint_{-FLSD} y dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 - \sqrt{2} \sin \frac{\phi}{2}) \sin \phi (-\sin \phi) d\phi = \frac{14}{15} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = -2 \left(\frac{-16\sqrt{2}}{15} + \frac{28}{15} \right) = \frac{32\sqrt{2} - 56}{15},$$

i els dos resultats són diferents, tal com era d'esperar pel que hem comentat.

No tant sols s'ha d'anar amb compte amb les corbes que s'autointersecten, sino que s'ha de vigilar que els camps vectorials siguin C^1 , tal com es veu en el següent cas.

Exemple 18 Sigui $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ i el camp vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Aquest camp vectorial no és C^1 en el punt $(0, 0) \in D$, i per tant no podem emprar el teorema de Green. En efecte, el càlcul directe de la integral de \vec{F} sobre la frontera de D és, amb la parametrització $\sigma(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\sigma'(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)$,

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} (-\sin \phi, \cos \phi) \cdot (-\sin \phi, \cos \phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = 2\pi, \end{aligned}$$

mentre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_D (0) dx dy = 0.$$

Exemple 19 *Repetiu l'exemple 18 amb el mateix camp vectorial però agafant ara la corona $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, de manera que el punt singular queda fora de D .*

L'exemple 17 ha mostrat una aplicació del teorema de Green, que permet calcular integrals dobles sobre regions els límits de les quals no es poden posar en forma explícita senzilla, però sí que es coneix una forma paramètrica simple dels mateixos. En concret, es té que, sota les condicions en que es pot aplicar el teorema de Green,

$$\text{àrea}(D) = - \oint_{C^+} y dx = \oint_{C^+} x dy = \frac{1}{2} \oint_{C^+} (-y dx + x dy).$$

En el cas general de voler calcular

$$\int \int_D f(x, y) dx dy,$$

podrem emprar el teorema de Green sempre que existeixin P i Q tals que

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

10 El teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona integrals de superfície amb integrals sobre corbes a \mathbb{R}^3 . En una versió més moderna [Spi], el teorema de Stokes conté com a casos particulars “tots” els teoremes integrals, desde la regla de Barrow, passant pel teorema de Green, el teorema de Stokes clàssic i el teorema de Gauss, fins a teoremes corresponents en espais de dimensió superior. Nosaltres, però, ens limitarem al teorema de Stokes clàssic.

Teorema de Stokes

Sigui S una superfície amb parametrització $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^2 , injectiva a quasi tot arreu, i tal que D té per vora una corba tancada ∂D de

classe C^1 a trosos i que no es talla a ella mateixa. Sigui \vec{F} un camp vectorial de classe C^1 . Aleshores

$$\int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

on $C = \Phi(\partial D)$ és la vora de S , C^+ és el sentit induït al recórrer ∂D en sentit antihorari amb els paràmetres (u, v) i S^+ està orientada segons $\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$.
□

Els elements gràfics del teorema es troben a la figura 28.

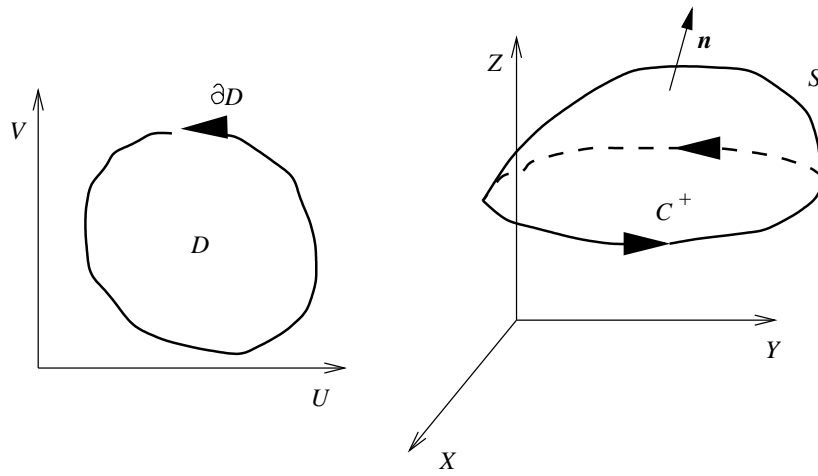


Figura 28: Per il·lustrar el teorema de Stokes

La demostració és relativament senzilla, utilitza el teorema de Green, i l'única dificultat està en les orientacions. Sigui $\vec{F} = (P, Q, R)$. Tenim que

$$\begin{aligned} \int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &+ \left. \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] du dv. \end{aligned}$$

Si aconseguim veure que

$$\oint_{C^+} P \, dx = \int \int_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] \, dudv, \quad (1)$$

i anàlogament pels termes proporcionals a Q i R , haurem demostrat el teorema de Stokes. Sigui

$$g(u, v) = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Llavors

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(g \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(g \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + g \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - g \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

Si ara fem que Φ de classe C^2 i, en particular, té derivades segones creuades iguals, queda

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(g \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(g \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} \\ & \quad - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Per tant, el membre dret de (1) és

$$\int \int_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(g \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(g \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] \, dudv,$$

i, aplicant el teorema de Green al camp vectorial $(g \frac{\partial x}{\partial u}, g \frac{\partial x}{\partial v})$, cosa que podem fer ja que aquest camp és C^1 a D , serà

$$\oint_{\partial D} g \frac{\partial x}{\partial u} \, du + g \frac{\partial x}{\partial v} \, dv, \quad (2)$$

amb ∂D en sentit antihorari.

Anem ara a transformar el membre esquerra de (2), treient profit del fet que C^+ és la imatge de ∂D per Φ . Sigui $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrització de ∂D . Llavors $\Phi \circ \alpha$ serà una parametrització de C^+ , $\Phi \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb components, tenint en compte que $\alpha(t) = (u(t), v(t))$,

$$(\Phi \circ \alpha)(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

i amb vector velocitat

$$(\Phi \circ \alpha)'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \text{altres components} \right).$$

Llavors

$$\oint_{C^+} P \, dx = \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt.$$

Però això és precisament l'expressió paramètrica de la integral sobre ∂D (en el pla) del camp vectorial

$$\begin{aligned} & \left(P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}, P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\ &= \left(g \frac{\partial x}{\partial u}, g \frac{\partial x}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

que és el que tenim a (2). Queda per tant demostrat el que volíem.

◇ A l'enunciat del teorema de Stokes està implícit que la superfície S ha de ser orientable.

◇ El teorema de Stokes també és vàlid si D , i, per tant, S , tenen forats. L'orientació és llavors segons s'havia discutit per al teorema de Green amb forats.

◇ Si S és una superfície tancada no té vora i, aleshores

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = 0.$$

◇ En alguns casos la imatge de ∂D per Φ és quelcom més que la vora de S . En concret, $\Phi(\partial D)$ pot recórrer la vora, moure's sobre l'interior de S i tornar a la vora (vegeu l'exemple 20). En aquest cas, el teorema de Stokes segueix éssent vàlid, ja que el que es fa de més es fa dues vegades, una en cada sentit, i en total s'anulla.

◇ Si no tenim tercera dimensió, de manera que $S = D$, $C^+ = \partial D$, $x = u$, $y = v$, el teorema de Stokes es redueix al teorema de Green.

Exemple 20 *Sigui el cilindre sense tapadores*

$$\begin{cases} x = \cos \phi & \phi \in [0, 2\pi) \\ y = \sin \phi & z \in [0, 1] \\ z = z \end{cases}$$

els elements gràfics del qual es troben a la figura 29. El tros de cilindre té

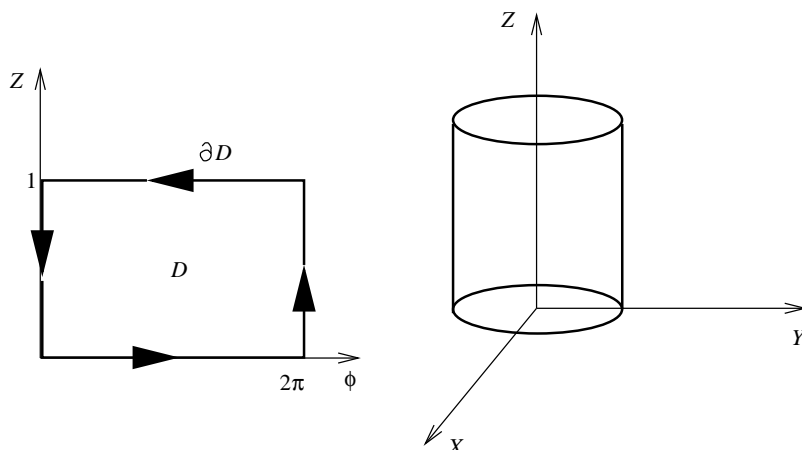


Figura 29: Un cilindre obert per dalt i per baix

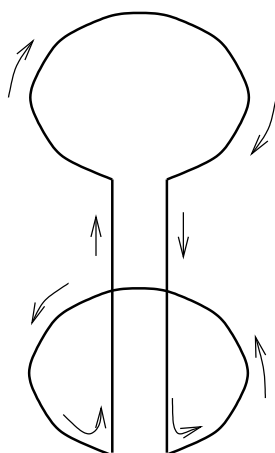
una vora formada per dues circumferències. La imatge de ∂D conté, però, a més, dues rectes, que es mostren a la figura 30. Les dues rectes són, però, la mateixa, recorreguda en els dos sentits, i qualsevol integral d'un camp vectorial s'anulla quan es consideren les dues rectes. Cal notar que les dues circumferències tenen orientacions ben definides, fixades per l'orientació antihorària de ∂D . El vector normal que fixa l'orientació de S és, amb aquesta elecció dels paràmetres,

$$\vec{n} = \vec{T}_\phi \times \vec{T}_z = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos \phi, \sin \phi, 0),$$

que correspon a una normal “cap a fora”, tal com es pot veure, per exemple, dibuixant-lo per a $\phi = 0$.

11 Camps conservadors

Un camp vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ a \mathbb{R}^3 , o $\vec{F}(x, y)$ a \mathbb{R}^2 , s'anomena **conservador** (altrement també anomenat “conservatiu”) si la integral del mateix entre dos

Figura 30: Imatge de la vora de D

punts A i B de \mathbb{R}^3 , o de \mathbb{R}^2 , no depèn de la corba que s'agafi per unir els dos punts. Volem ara donar criteris operatius per a decidir si un camp és o no conservador. El teorema de Stokes serà fonamental.

Teorema de caracterització de camps conservadors

Sigui \vec{F} un camp vectorial C^1 a \mathbb{R}^3 , excepte, possiblement, en un nombre finit de punts. Aleshores les quatre afirmacions següents són equivalents:

1. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, C qualsevol corba tancada,
2. \vec{F} és conservador,
3. $\vec{F} = \vec{\nabla}f$, on f és una funció escalar que s'anomena el **potencial** de \vec{F} ,
4. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

□

Demostrarem que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, i això demostrarà l'equivalència. Suposarem que \vec{F} és C^1 a tot \mathbb{R}^3 i ja comentarem després què passa si no és així.

$1 \Rightarrow 2$ Siguin dues corbes C_1 i C_2 entre A i B (figura 31). Aleshores

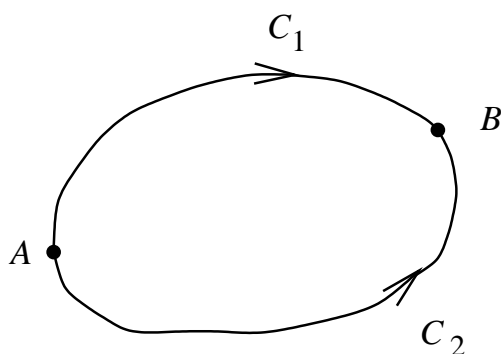


Figura 31: Dues corbes entre dos punts

$C = C_1 \cup C_2^-$ serà una corba tancada i

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}, \end{aligned}$$

d'on

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

i \vec{F} és conservador.

2 \Rightarrow 3 Si \vec{F} és conservador, podrem calcular la seva integral entre $(0, 0, 0)$ i (x, y, z) seguint qualsevol corba i sempre tindrem el mateix resultat, que serà una funció de (x, y, z) :

$$f(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Calcularem primer aquesta integral seguint la corba de la figura 32, formada per tres segments paral·lels als tres eixos en l'ordre indicat:

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3.$$

Tindrem

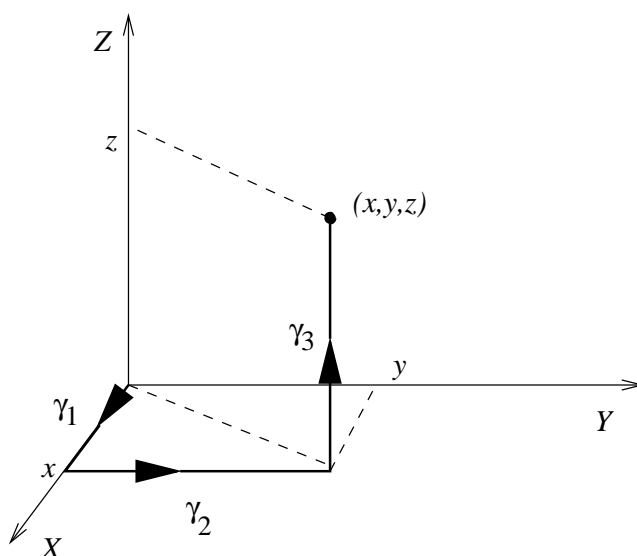


Figura 32: Una corba entre \$(0, 0, 0)\$ i \$(x, y, z)\$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^x \vec{F}(t, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dt = \int_0^x F_x(t, 0, 0) dt,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^y \vec{F}(x, t, 0) \cdot (0, 1, 0) dt = \int_0^y F_y(x, t, 0) dt,$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^z \vec{F}(x, y, t) \cdot (0, 0, 1) dt = \int_0^z F_z(x, y, t) dt,$$

i

$$f(x, y, z) = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^x F_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_y(x, t, 0) dt + \int_0^z F_z(x, y, t) dt.$$

Derivant ara aquesta expressió respecte a \$z\$ obtenim

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = F_z(x, y, z).$$

Anàlogament, seguint les corbes que pareixen a la figura 33, veuriem que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = F_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = F_y(x, y, z).$$

En conjunt,

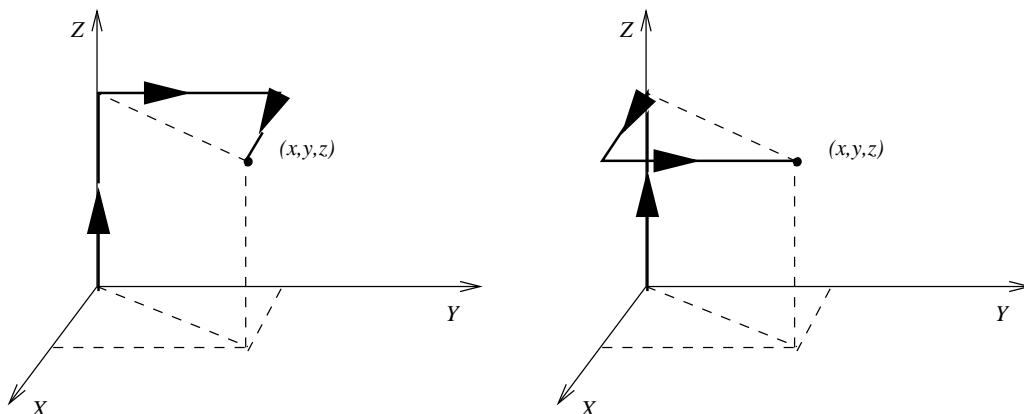


Figura 33: Dues altres corbes entre $(0, 0, 0)$ i (x, y, z)

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \vec{\nabla} f(x, y, z),$$

tal com volíem demostrar. Aquesta demostració és constructiva, ja que proporciona un mètode per a calcular f donat \vec{F} .

$3 \Rightarrow 4$ Es obvi, ja que, per les propietats de $\vec{\nabla}$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0.$$

$4 \Rightarrow 1$ Sigui S una superfície orientada qualsevol amb vora C . Aleshores, pel teorema de Stokes,

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \int_{S^+} \vec{0} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Amb això queda completada la demostració del teorema.

◇ Si \vec{F} té punts singulars, els passos de les demostracions anteriors es poden fer esquivant aquests punts i el teorema es demostra igualment. Naturalment, les corbes i superfícies que hi apareixen han d'evitar els punts singulars. Per exemple, si $(0, 0, 0)$ és un punt singular de \vec{F} , la demostració de $2 \Rightarrow 3$ es pot fer canviant $(0, 0, 0)$ per qualsevol altre punt fixat (aquesta

llibertat correspon a afegir una constant a f , però això no canvia \vec{F}). Si \vec{F} és, però, singular sobre un objecte de dimensió 1 o més gran, aleshores pot haver-hi problemes. Per exemple, si \vec{F} és singular sobre una línia infinita i C encercla aquesta línia, aleshores no es pot trobar cap S on poguem aplicar el teorema de Stokes i no es pot demostrar que $4 \Rightarrow 1$.

◇ El teorema és vàlid a \mathbb{R}^2 canviant el teorema de Stokes pel de Green. La condició de rotacional nul es redueix a

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

Ara, però, n'hi ha prou amb un punt singular per tal que no es pugui demostrar $4 \Rightarrow 1$: en el pla no hi ha una tercera dimensió per on fer passar la superfície amb vora C que no contingui el punt singular (repasseu l'exemple 18).

◇ Per les raons exposades, els camps Newtonians a \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{F} = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \alpha \text{ constant},$$

que deriven del potencial $f = -\alpha \frac{1}{r}$, són conservadors malgrat ser singulars a l'origen.

◇ A Física, s'anomena potencial a

$$-f = \mathcal{U}$$

i llavors

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{U}.$$

◇ Quan hom té una singularitat que espatlla $4 \Rightarrow 1$, per exemple un punt a \mathbb{R}^2 , el resultat del teorema segueix éssent vàlid si ens restringim a corbes que no envoltin la singularitat. Això és una altra manera de posar de manifest que un punt singular no és cap problema a \mathbb{R}^3 : a \mathbb{R}^3 una corba no pot envoltar un punt.

Del teorema demostrat s'en dedueix l'anomenat teorema del gradient, que permet calcular les integrals de camps conservadors conegut el seu potencial.

Teorema del gradient

Sigui \vec{F} un camp conservador i f el seu potencial, $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Aleshores

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A).$$

□

La demostració és immediata. Sigui γ una corba qualsevol entre A i B i sigui $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrització de la mateixa. Aleshores

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t)) \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t))z'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) dt = f(\sigma(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

12 El teorema de Gauss. Camps solenoïdals

El teorema de Gauss (o de la divergència) relaciona integrals sobre superfícies tancades amb integrals de volum. Donarem la versió per a regions de tipus 4 i després veurem com es pot estendre.

Teorema de Gauss

Sigui V una regió de tipus 4 a \mathbb{R}^3 , és a dir, una regió tal que qualsevol recta paral·lela a qualsevol eix coordinat entra i surt de V com a màxim una vegada, i sigui S^+ la superfície tancada que envolta V , orientada cap a l'exterior. Sigui \vec{F} un camp vectorial de classe C^1 a V . Aleshores

$$\oint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx dy dz.$$

□

Hem de demostrar que

$$\int_V \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{S^+} (F_x, F_y, F_z) \cdot d\vec{s}.$$

Si demostrem que

$$\int_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \oint_{S^+} (0, 0, F_z) \cdot d\vec{s},$$

i anàlogament per a F_y i F_z haurem, degut a la linealitat de les integracions i del producte escalar, demostrat el resultat.

Com que V és de tipus 4, serà, en particular, de tipus 1, i la superfície tancada S serà de la forma $S_1 \cup S_2$, amb S_1 i S_2 descrites, respectivament, per $z = \phi_1(x, y)$ i $z = \phi_2(x, y)$, amb $(x, y) \in \mathcal{U}$, éssent \mathcal{U} la projecció del volum V sobre el pla XY (vegeu la figura 34).

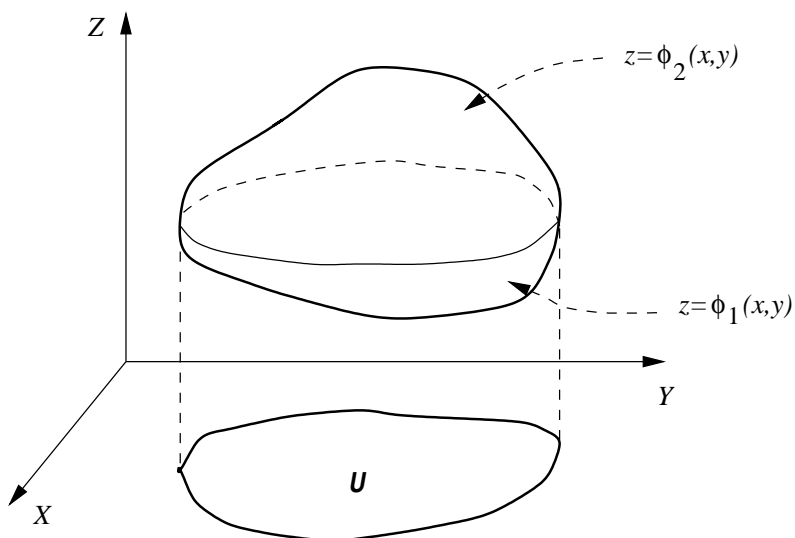


Figura 34: Una regió de tipus 4 pensada com a regió de tipus 1

Tindrem

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{U}} dx dy \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \\ &= \int \int_{\mathcal{U}} F_z(x, y, z) \Big|_{z=\phi_1(x,y)}^{z=\phi_2(x,y)} \\ &= \int \int_{\mathcal{U}} dx dy [F_z(x, y, \phi_2(x, y)) - F_z(x, y, \phi_1(x, y))]. \end{aligned}$$

D'altra banda, podem calcular $\oint_{S^+} (0, 0, F_z) \cdot d\vec{s}$ amb la parametrització

que volguem. En concret, emprem $S = S_1 \cup S_2$ i parametritzem S_1 amb

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \phi_1(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{U}$$

i anàlogament per a S_2 . El vector normal a S_1 és

$$\begin{aligned} \vec{T}_x &= \left(1, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right), \\ \vec{T}_y &= \left(0, 1, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right), \\ \vec{n}_1 &= \vec{T}_x \times \vec{T}_y = \left(-\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}, 1\right), \end{aligned}$$

mentre que per a S_2 , de forma anàloga,

$$\vec{n}_2 = \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}, 1\right).$$

Tant \vec{n}_1 com \vec{n}_2 apunten en la direcció positiva de l'eix Z . Per tant, si S^+ està orientada amb la normal cap a fora, serà

$$S^+ = S_1^- \cup S_2,$$

i així

$$\begin{aligned} \oint_{S^+} (0, 0, F_z) \cdot d\vec{s} &= - \int_{S_1} (0, 0, F_z) \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} (0, 0, F_z) \cdot d\vec{s} \\ &= - \int \int_{\mathcal{U}} dx dy F_z(x, y, \phi_1(x, y))(n_1)_z \\ &\quad + \int \int_{\mathcal{U}} dx dy F_z(x, y, \phi_2(x, y))(n_2)_z \\ &= \int \int_{\mathcal{U}} dx dy (F_z(x, y, \phi_2(x, y)) - F_z(x, y, \phi_1(x, y))), \end{aligned}$$

que és el que volíem. La demostració és anàloga per a les altres components, emprant que V és de tipus 2 i 3 respectivament, i això completa la demostració del teorema de Gauss.

Si el volum considerat no és de tipus 4, el descomposarem en volums que ho siguin i aplicarem el teorema de Gauss a cada un d'ells. La contribució

de les superfícies comunes s'anulla i s'obté el teorema de Gauss per a la regió total. Per exemple, referint-nos a la figura 35, el volum total $V = V_1 \cup V_2$ està limitat per $S = S_1 \cup S_2$. Si orientem la superfície de separació, S_3 , cap a la dreta i dotem S_1 i S_2 amb l'orientació de S^+ , tindrem

$$\oint_{S_1 \cup S_3} = \int_{V_1}, \quad \oint_{S_2 \cup S_3^-} = \int_{V_2},$$

de manera que

$$\int_V = \int_{V_1} + \int_{V_2} = \int_{S_1} + \int_{S_3} + \int_{S_2} - \int_{S_3} = \int_{S_1} + \int_{S_2} = \oint_{S^+},$$

tal com volíem.

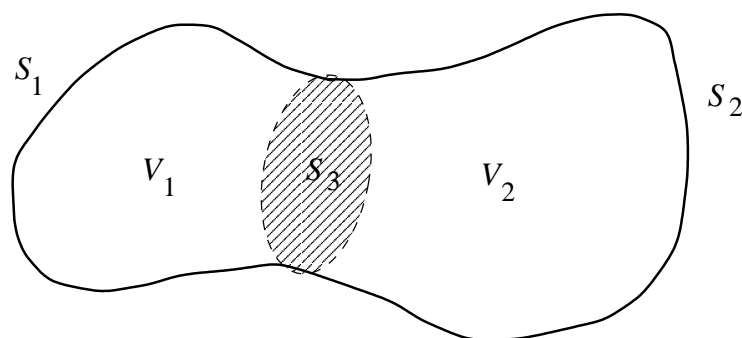


Figura 35: El teorema de Gauss per a un volum qualsevol

El teorema de Gauss és també vàlid si V té forats interiors, agafant, però, l'orientació de la cavitat cap a dintre. Per exemple, a la figura 36 tenim que $V_1 = V_2 \cup V$. Podem aplicar el teorema de Gauss tant a V_1 com a V_2 , resultant

$$\oint_{S_1^+} = \int_{V_1}, \quad \oint_{S_2^+} = \int_{V_2}.$$

Llavors

$$\oint_{S_1^+} = \int_{V_1} = \int_{V_2} + \int_V = \oint_{S_2^+} + \int_V,$$

d'on

$$\int_V = \oint_{S_1^+} - \oint_{S_2^+} = \oint_{S_1^+} + \oint_{S_2^-},$$

que és el teorema de Gauss per a la regió amb cavitat.

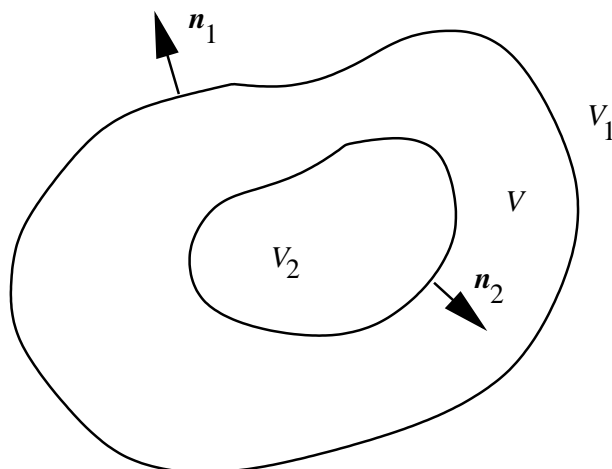


Figura 36: Una regió amb cavitat. V_2 és la cavitat, V la regió que ens interessa i V_1 és la regió més la cavitat.

Exemple 21 *Existeix, en dues dimensions, quelcom equivalent al teorema de Gauss?*

Un camp s'anomena **solenoidal** si, donada una corba tancada C^+ qualsevol a l'espai, aleshores el flux de \vec{F} a través de qualsevol superfície oberta S^+ que tingui per vora C^+ no depèn de la S^+ que s'agafi. El següent teorema permet identificar fàcilment els camps solenoidals.

Teorema de caracterització de camps solenoidals

Sigui \vec{F} un camp vectorial C^1 a tot \mathbb{R}^3 . Aleshores les quatre afirmacions següents són equivalents:

1. per a qualsevol superfície tancada S es té

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

2. \vec{F} és solenoidal,
3. $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$, on \vec{G} s'anomena el **potencial vector** de \vec{F} ,
4. $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$.

□

La demostració es deixa com exercici. El més senzill és demostrar $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 1$, $3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 3$, $4 \Rightarrow 1$ i $1 \Rightarrow 4$. D'aquestes implicacions, $4 \Rightarrow 1$ i $1 \Rightarrow 4$ utilitzen el teorema de Gauss, mentre que $4 \Rightarrow 3$, que és la demostració més complicada, es pot fer constructivament agafant

$$\begin{aligned} G_x(x, y, z) &= \int_0^z F_y(x, y, t) dt - \int_0^y F_z(x, t, 0) dt, \\ G_y(x, y, z) &= - \int_0^z F_x(x, y, t) dt, \\ G_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Llavors és immediat veure que $(\vec{\nabla} \times \vec{G})_x = F_x$ i que $(\vec{\nabla} \times \vec{G})_y = F_y$, mentre que $(\vec{\nabla} \times \vec{G})_z = F_z$ requereix emprar que \vec{F} té divergència nul·la. Noteu que l'especificació de \vec{G} és prou arbitrària, ja que hi podem afegir qualsevol gradient. Podeu fer-ho si voleu obtenir un \vec{G} més simètric respecte a les tres variables.

◇ És imprescindible que \vec{F} no tingui cap punt singular, ja que sino no es pot emprar el teorema de Gauss: el volum que queda dins la superfície tancada contindrà necessàriament el punt singular si aquest està dins de la mateixa! Naturalment, es pot donar una versió reduïda del teorema en presència de punts singulars sempre que les superfícies tancades que es considerin no els continguin, ni siguin escombrats quan canviem de superfície oberta amb vora fixada. D'altra banda, l'afirmació $3 \iff 4$ és local i és vàlida a tot arreu on els camps existeixin. Ara bé, la definició de camp solenoïdal no és local i s'han de tenir en compte les restriccions esmentades.

Exemple 22 *Retornant al teorema de caracterització de camps conservadors, podrieu donar una demostració local, inspirada en el que acabem de veure i en la construcció de f que allà donàvem, de que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ implica que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$?*

13 Les equacions de Maxwell

Les equacions de Maxwell descriuen el comportament de camps electromagnètics en presència o no de medis materials, i constitueixen el fonament teòric de quasi tota la nostra tecnologia.

En els cursos elementals de Física s'acostumen a deduir les equacions de Maxwell en forma integral en el buit. Formulades en termes del camp elèctric \vec{E} i la inducció magnètica \vec{B} són:

1. llei de Coulomb

$$\oint_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dx dy dz,$$

2. absència de monopols magnètics

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$$

3. llei de Faraday-Henry

$$\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S^+} \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

4. llei d'Ampere-Maxwell

$$\oint_{C^+} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S^+} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Aquí ϵ_0 i μ_0 són, respectivament, la constant dielèctrica i la permeabilitat magnètica del buit, ρ és la densitat de càrrega elèctrica lliure (l'única que pot haver-hi en el buit) i \vec{j} és la densitat de corrent lliure. La contribució essencial de James Clerk Maxwell (1831-1879) va ser modificar la llei d'Ampere, afegint la darrera peça de la quarta equació, en part per raons de simetria. Les conseqüències experimentals d'aquesta modificació les va confirmar Hertz l'any 1887, al produir i detectar ones electromagnètiques.

No sempre és convenient treballar amb les equacions de Maxwell en forma integral i, en particular, quan hom les ha de resoldre, a partir de ρ i \vec{j} i condicions inicials i/o de contorn donades, és convenient tenir equacions diferencials equivalents. Això és el que permeten els teoremes de Stokes i Gauss.

Comencem amb la primera equació. Emprant el teorema de Gauss, el membre de l'esquerra s'escriu com

$$\oint_{S^+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dx dy dz.$$

Queda així

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dx dy dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dx dy dz.$$

Com que això ha de ser vàlid per a qualsevol volum V , les funcions que s'integren hauran de ser iguals. Obtenim així

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

De la mateixa manera, a partir de la segona equació de Maxwell s'obté

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Agafem ara la tercera equació. Usant el teorema de Stokes, la integral de l'esquerra esdevé

$$\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}.$$

Tenint en compte, a més, que considerem S immòbil a l'espai,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S^+} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S^+} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}.$$

Queda així

$$\int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \int_{S^+} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}.$$

De nou, tenint en compte que la superfície S és qualsevol,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Anàlogament, de l'equació d'Ampere-Maxwell s'obté

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Hem obtingut així les equacions de Maxwell en forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Aquestes equacions són igualment vàlides en medis materials [Ja] si ρ representa la densitat de càrrega total (lliure + polarització) i \vec{j} la densitat de corrent total (lliure + polarització + magnetització), encara que llavors és més convenient introduir el desplaçament elèctric \vec{D} ,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

on \vec{P} és la polarització del medi, i el camp magnètic \vec{H} ,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

on \vec{M} és la magnetització del medi. En general, \vec{P} i \vec{M} dependran de \vec{E} i \vec{B} de forma molt complicada (anisotròpica, no lineal,...). Amb aquestes noves variables, les equacions de Maxwell queden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{lliure} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_{lliure} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Nosaltres treballarem amb les equacions de Maxwell en la forma (1)-(4).

Tenint en compte que les dues darreres equacions són vectorials, les equacions de Maxwell són, de fet, $1 + 1 + 3 + 3 = 8$ equacions amb $3 + 3 = 6$ incògnites (les tres components de \vec{E} i les tres de \vec{B}). De fet, \vec{E} i \vec{B} no són funcionalment “independents” es poden expressar en termes de quantitats més fonamentals, anomenades **potencials electromagnètics**.

L'equació (2), $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, ens està dient que \vec{B} és un camp solenoïdal⁵ i, per tant, serà el rotacional d'un altre vector:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5)$$

El vector \vec{A} s'anomena **potencial vector**. Anant amb això a l'equació (3), tenim

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

⁵En realitat, tal com hem discutit a la secció anterior, si \vec{B} té alguna singularitat no serà solenoïdal, però la implicació $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ continuarà éssent localment vàlida.

és a dir,

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Això ens està dient que el vector entre parèntesis és un camp conservador,⁶ i, per tant, serà el gradient d'un camp escalar:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi. \quad (6)$$

El signe “-” s'agafa per conveni i la quantitat ϕ s'anomena **potencial escalar**. Quan no hi ha dependència temporal, ϕ es redueix al tradicional potencial electrostàtic. Fixem-nos que, en general, el camp elèctric no és conservador: el seu rotacional no és zero.

Les equacions (5) i (6) indiquen com obtenir \vec{E} i \vec{B} donats ϕ i \vec{A} . Tal com veurem més endavant, l'operació inversa no és possible, ja que hi ha molts \vec{A} i ϕ que proporcionen els mateixos \vec{E} i \vec{B} . Per arribar a (5) i (6) sols hem usat (2) i (3). Podem ara intentar expressar (1) i (4) en termes de \vec{A} i ϕ . Anant a (1) tenim

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

és a dir

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

mentre que, de (4),

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

i, emprant les propietats de l'operador nabla per desenvolupar el doble rotacional, resulta

$$-\nabla^2 \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}. \quad (8)$$

⁶Val el mateix tipus de comentari que hem fet respecte a $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Repasseu la secció sobre camps conservadors.

Les equacions (7) i (8) contenen la física de les equacions de Maxwell, mentre que (5) i (6) sols són un canvi de variables matemàtic.⁷ Fixem-nos que (7) i (8) són quatre equacions amb quatre incògnites.

Tal com hem dit, hi ha molts ϕ i \vec{A} que produeixen els mateixos \vec{E} i \vec{B} . En efecte, si a (5) i (6) fem el canvi

$$\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\phi, \\ \phi &\longrightarrow \phi - \frac{\partial\phi}{\partial t},\end{aligned}$$

amb ϕ una funció $\phi(t, x, y, z)$ qualsevol, s'obtenen els mateixos \vec{E} i \vec{B} . Pot demostrar-se que es pot emprar aquesta llibertat per triar uns potencials electromagnètics que verifiquin la relació, anomenada galga de Lorentz,⁸

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (9)$$

Amb aquesta condició, (7) i (8) es simplifiquen i resulta

$$-\nabla^2\phi + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (10)$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{j}. \quad (11)$$

Si no tenim càrregues ($\rho = 0$) ni corrents ($\vec{j} = 0$),⁹ això és

$$\begin{aligned}\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \nabla^2\phi, \\ \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \nabla^2\vec{A},\end{aligned}$$

és a dir, tant ϕ com cadascuna de les components de \vec{A} verifiquen equacions d'ona a l'espai amb velocitat de propagació

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

⁷No hem d'oblidar, però, que, al menys clàssicament, sols podem mesurar \vec{E} i \vec{B} , i no ϕ i \vec{A} .

⁸Moltes altres galgues són possibles, però aquest és el més interessant per al que volem fer.

⁹Aquesta situació sols es pot donar en el buit. En qualsevol medi material ρ i \vec{j} tenen contribucions de polarització i/o magnetització que no poden menysprear-se completament.

que, una vegada posats els valors experimentals de les constants dielèctrica i de permeabilitat magnètica, resulta ser la velocitat de la llum en el buit. Això va ser la confirmació de que la llum era un fenomen electromagnètic.

Exemple 23 Posant $\rho = 0$ i $\vec{j} = 0$ directament a les equacions de Maxwell (1)(2)(3)(4), deduiu, sense passar pels potencials electromagnètics, que les components de \vec{E} i \vec{B} també satisfan equacions d'ona amb velocitat $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$:

$$\begin{aligned}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \nabla^2\vec{E}, \\ \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \nabla^2\vec{B}.\end{aligned}$$

A Manipulacions vectorials avançades

El conveni de sumació d'Einstein permet desfer-se dels símbols de sumatori. En concret, estableix que quan en un monomi, és a dir, un bloc que no està format per la suma d'altres, hi ha un índex repetit, aleshores s'entén que hi ha un sumatori sobre els valors de l'índex. Per exemple, si a \mathbb{R}^3 tenim dos vectors $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, el seu producte escalar és

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Amb el conveni d'Einstein això és simplement

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i.$$

Un exemple més complicat és el següent. Si tenim una matriu A amb elements A_{ij} , aleshores l'operació $\vec{a} = A\vec{b}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

que implica

$$\begin{aligned}a_1 &= A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3, \\ a_2 &= A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3, \\ a_3 &= A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3,\end{aligned}$$

s'expressa, amb el conveni d'Einstein, com

$$a_i = A_{ij}b_j.$$

Aquest darrer exemple mostra una propietat important del conveni: quan tenim una igualtat, els índex lliures, és a dir, els índex no repetits, han de ser els mateixos als dos costats. Si els dos costats són escalars, aleshores no hi pot haver cap índex lliure. En el cas de vectors, hi ha d'haver un índex lliure (el mateix a ambdós costats), que correspon a les seves components.

Exemple 24 *Si A, B, \dots són matrius de les dimensions adients i \vec{a}, \dots són vectors, interpreteu les següents expressions:*

1. A_{ii} (sol: traça de la matriu A)
2. $A_{ij}B_{jk}$ (sol: element (ik) del producte AB)
3. $A_{ij}a_i$ (sol: element j del vector $A^T\vec{a}$)
4. $A_{ij}B_{ki}C_{kj}$ (sol: traça de AC^TB)

Per tal de poder aplicar això a les operacions amb l'operador $\vec{\nabla}$ el representarem mitjançant

$$\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3),$$

amb $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, etc. Amb això tindrem, per exemple,

$$(\vec{\nabla}f)_i = \partial_i f,$$

que vol dir que la component i -ésima del gradient de f és la derivada respecte de la variable i -ésima de f . Per la seva banda, la divergència (un escalar!) es representarà com

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_i F_i.$$

Què passa, però, amb el rotacional? Per tal de poder representar-lo amb aquesta notació, haurem d'introduir un objecte amb tres índex, ϵ_{ijk} , definit per

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= +1, \\ \epsilon_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} &= \text{sign}(\sigma)\epsilon_{ijk}, \\ \epsilon_{ijk} &= 0 \text{ si dos índex són iguals.} \end{aligned}$$

Aquí $\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)$ designa una permutació de ijk , és a dir, una reordenació dels índex, i $\text{sign}(\sigma)$ és igual a $(-1)^{N(\sigma)}$, on $N(\sigma)$ és el nombre de transposicions, és a dir, intercanvis d'elements, que s'han de fer per passar de ijk a $\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)$. Per exemple,

$$312 \longrightarrow 132 \longrightarrow 123,$$

de manera que en aquest cas $N = 2$ i, per tant,

$$\epsilon_{312} = (-1)^2 \epsilon_{123} = +1.$$

En canvi,

$$321 \longrightarrow 231 \longrightarrow 213 \longrightarrow 123,$$

$N = 3$ i $\epsilon_{321} = (-1)^3 \epsilon_{123} = -1$. Això permet calcular ϵ_{ijk} amb els tres índex diferents, mentre que si s'en repeteix algun el resultat és, per definició, zero:

$$\epsilon_{112} = \epsilon_{113} = \epsilon_{111} = \epsilon_{122} = \dots = \epsilon_{333} = 0.$$

Fixeu-vos que, siguin quins siguin els índex, es tindran igualtats del tipus

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{kji} = \dots$$

Utilitzant ϵ_{ijk} el producte vectorial de dos vectors s'escriu

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

La millor manera de veure-ho és comprovant-ho directament. Per exemple

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ &\text{(ha de ser } j = 2, k = 3 \text{ o } j = 3, k = 2) \\ &= \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \end{aligned}$$

tal com ha de ser. Podem ara ja representar el rotacional:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k.$$

Tot això sembla una forma relativament críptica d'escriure expressions altrament trivials. El fet important, però, és que ϵ_{ijk} gaudeix de propietats

que simplifiquen molt les demostracions en les que intervé. Algunes d'elles són les següents:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} &= 2\delta_{il}, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},\end{aligned}$$

on hem introduït la **delta de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} &= \epsilon_{ij1}\epsilon_{l j 1} + \epsilon_{ij2}\epsilon_{l j 2} + \epsilon_{ij3}\epsilon_{l j 3} \\ &\quad \epsilon_{i11}\epsilon_{l11} + \epsilon_{i21}\epsilon_{l21} + \epsilon_{i31}\epsilon_{l31} \\ &+ \epsilon_{i12}\epsilon_{l12} + \epsilon_{i22}\epsilon_{l22} + \epsilon_{i32}\epsilon_{l32} \\ &+ \epsilon_{i13}\epsilon_{l13} + \epsilon_{i23}\epsilon_{l23} + \epsilon_{i33}\epsilon_{l33} \\ &= 2\epsilon_{i12}\epsilon_{l12} + 2\epsilon_{i31}\epsilon_{l31} + 2\epsilon_{i23}\epsilon_{l23}\end{aligned}$$

La primera peça sols és diferent de zero si $i = l = 3$; llavors les altres peces són zero i el resultat val 2. Anàlogament, la segona peça sols és diferent de zero si $i = l = 2$, mentre que la tercera ho és si $i = l = 1$. En qualsevol cas, el resultat és 2 si $i = l$ i 0 altrament:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}.$$

Amb tota aquesta artilleria, les demostracions que impliquen l'operador nabla i productes vectorials són trivials. Per exemple, la propietat 7 de la secció 8 es demostra així:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{F} \times \vec{G})_k = \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}F_lG_m) \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j(F_lG_m) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}(\partial_jF_lG_m + F_l\partial_jG_m) \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}(\partial_jF_lG_m + F_l\partial_jG_m) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(\partial_jF_lG_m + F_l\partial_jG_m).\end{aligned}$$

Quan apareix una delta de Kronecker amb un índex sumat, el sumatori s'efectua trivialment canviant a tot arreu l'índex sumat per l'altre índex de la delta i liquidant-la. Per exemple,

$$\delta_{il}\delta_{jm}\partial_jF_lG_m = \delta_{jm}\partial_jF_iG_m = \partial_mF_iG_m.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}))_i &= \partial_m F_i G_m + F_i \partial_m G_m - \partial_l F_l G_i - F_j \partial_j G_i \\
 &= G_m \partial_m F_i - G_i \partial_l F_l + -F_j \partial_j G_i + F_i \partial_m G_m \\
 &= (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) F_i - G_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) G_i + F_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) \\
 &= \left((\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) \right)_i.
 \end{aligned}$$

Com a darrer exemple considerem la propietat 11:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{F})_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l F_m) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l F_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_j \partial_l F_m \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \delta_j \delta_l F_m = \partial_m \partial_i F_m - \partial_j \partial_j F_i \\
 &= \partial_i \partial_m F_m - \partial_j \partial_j F_i = \partial_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 F_i \\
 &= (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F})_i.
 \end{aligned}$$

Referències

- [CJ] COURANT, R., I F. JOHN, **Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático**, volum 2, Ed. Limusa, 1976.
- [Ja] JACKSON, J.D., **Electrodinámica Clásica**, Ed. Alhambra, 1980.
- [MT] MARSDEN, J.E., I A.J. TROMBA, **Cálculo Vectorial**, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [SA] SPIEGEL, M.R., I L. ABELLANAS, **Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada**, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, 1991.
- [Sp1] SPIEGEL, M.R., **Cálculo Superior**, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, 1978.
- [Sp2] SPIEGEL, M.R., **Análisis Vectorial**, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, 1977.
- [Spi] SPIVAK, MICHAEL, **Cálculo en Variedades**, Ed. Reverté, 1979.