Apunts de mecànica de fluids

Carles Batlle

Universitat Politècnica de Catalunya —BARCELONATECH

Departament de Matemàtiques i Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials
EPSEVG, Av. V. Balaguer 1, 08800 Vilanova i la Geltrú

Índex

Presentació

Aquestes notes recullen una primera versió del material de mecànica de fluids per a l'assignatura *Models Matemàtics de la Física*. Es veuen els elements bàsics de la descripció matemàtica de la mecànica de fluids, i s'obtenen les equacions de balanç (de massa, de moment, d'energia) i les equacions de Navier-Stokes, amb algunes aplicacions i casos especials.

El material cobert és, essencialment, el dels capítols 3 i 4 de la quarta edició de [1], encara que ometent algunes parts més aplicades, i també amb un ordre i tractament lleugerament diferents.

Vilanova i la Geltrú, març-abril de 2022

1 La descripció matemàtica de la mecànica de fluids

Les quantitats que descriuen un medi, com ara la densitat $\rho(t, \vec{x})$, o la velocitat local $\vec{u}(t, \vec{x})$, $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, són sempre mitjanes obtingudes sobre un volum prou gran al voltant del punt $\vec{x}$ per no observar el caràcter discret (atòmic o molecular) del medi. Per exemple, la densitat $\rho(t, \vec{x})$ és

$$\rho(t, \vec{x}) = \frac{1}{|V_R(\vec{x})|} \int_{V_R(\vec{x})} \tilde{\rho}(t, \vec{y})\, \mathrm{d}^3 y,$$

on $V_R(\vec{x})$ és una regió de dimensions típiques R al voltant de $\vec{x}$, $|V_R(\vec{x})|$ és el seu volum i $\tilde{\rho}$ és la densitat microscòpica, que pot variar molt ràpidament en l'escala interatòmica o intermolecular.

Alhora, aquest volum ha de ser prou petit per a que les quantitats no hi variïn massa. Per tant, la dimensió típica de la regió on es calculen les mitjanes, R, ha de ser tal que

$$a \ll R < L,$$

on a és la distància interatòmica o intermolecular i L és el valor típic de la distància més petita que volem descriure. En general, aquest R existeix per a la majoria de medis i situacions d'interès i per tant la descripció com a medi continu té sentit. Encara que la major part del que direm s'aplica a tota mena de medis continus, ens referirem tota l'estona a fluids (líquids o gasos), i direm que la matèria continguda en un d'aquests volums de grandària típica R és una **partícula de fluid**. Les coordenades d'espai d'una partícula de fluid són les d'un punt qualsevol contingut a la regió $V_R(\vec{x})$ considerada; per construcció, suposarem que les magnituds d'interès no depenen del punt específic que es seleccioni en $V_R(\vec{x})$.

Tot el que direm sobre fluids en tres dimensions d'espai s'aplica a fluids en una o dues dimensions, amb les adaptacions de notació que calgui. Com que el nostre espai és tridimensional, s'entén que quan diem que considerem un fluid uni- o bidimensional estem considerant que les magnituds no depenen de dues o d'una, respectivament, de les dimensions d'espai.

1.1 Coordenades lagrangianes i eulerianes. Derivada material

Sigui $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ la posició d'una partícula de fluid en $t = 0$. Les components d'$\vec{a}$ són les **coordenades lagrangianes** de la partícula. Per a $t > 0$ aquesta partícula passarà a estar en una posició $\vec{x}$ que dependrà de t i de la coordenada euleriana $\vec{a}$: $\vec{x} = \Phi_t(\vec{a})$. Això permet definit una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t, \vec{a}) & \longmapsto & \vec{x} = \Phi_t(\vec{a}) \end{array}$$

que s'anomena un **flux** del fluid. Per a $\vec{a}$ donada, t parametritza una corba en $\mathbb{R}^3$, amb $\Phi_0(\vec{a}) = \vec{a}$. Per a $t > 0$ donat podem considerar el vector tangent a aquesta corba,

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi_t(\vec{a}).$$

Si ara considerem totes les corbes obtingudes a partir de les partícules de fluid contingudes en un cert volum $W \subset \mathbb{R}^3$ en $t = 0$, tindrem, per a $t > 0$, un **camp de velocitats** $\vec{u}(t, \vec{x})$ que en cada punt de $\vec{x} \in \Phi_t(W)$ dóna la velocitat de la partícula de fluid que passa per aquell punt per al t donat. Per raons físiques, suposarem que per a cada $t > 0$ l'aplicació Φ estableix un difeomorfisme entre W i $\Phi_t(W)$.

Les components de $\vec{x} = \Phi_t(\vec{a})$ s'anomenen **coordenades eulerianes** de la partícula de fluid i, a diferència de les lagrangianes, van canviant amb el temps. Nosaltres emprarem quasi exclusivament les coordenades eulerianes, però veurem que les lagrangianes són útils, per exemple, a l'hora de demostrar el teorema del transport.

Tal com hem dit, el camp de velocitats $\vec{u}(t, \vec{x})$ és tal que en cada punt dóna la velocitat en temps t, i per tant

$$\vec{u}(t, \Phi_t(\vec{a})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(\vec{a}). \tag{1}$$

Sigui $f(t, \vec{x})$ una magnitud que depèn tant del temps com de l'espai, i suposem que $\vec{x}$ és la coordenada euleriana d'una partícula de fluid, amb coordenada lagrangiana $\vec{a}$. Com que $\vec{x}$ varia en el temps, la variació total de f en el temps, que denotarem per $D_t f$ o Df/Dt, serà (introduïm per un moment la notació vectorial per a Φ_t per a quedi clar que dóna un vector de $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} D_t f(t, \vec{x}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, \Phi_t(\vec{a})) = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\Phi}_t(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}(t, \vec{x}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) f. \end{aligned} \tag{2}$$

L'operador diferencial

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \tag{3}$$

s'anomena **derivada material**, **derivada convectiva** o **derivada substancial**, i dóna la variació temporal d'una quantitat calculada en un punt arrossegat pel moviment del fluid. El segon terme de la derivada material és, de fet, la derivada direccional en la direcció de $\vec{u}$.

Conveni d'Einstein d'índexs repetits. Símbol de Lévi-Civita

A partir d'ara emprarem el conveni de que quan en una expressió hi apareix un índex repetit s'entén que aquest índex està sumat sobre el seu rang. Per exemple, escriurem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

en lloc de

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

Usarem també el símbol de Lévi-Civita, ϵ_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, 3$, tal que

$$\epsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si dos índexs són iguals,}$$

i

$$\epsilon_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} = \mathrm{sign}(\sigma),$$

on σ és qualsevol element del grup simètric. Per exemple,

$$\epsilon_{132} = -1, \;\; \epsilon_{312} = 1, \;\; \epsilon_{121} = 0.$$

En termes del símbol de Lévi-Civita i el conveni d'Einstein, el determinant d'una matriu 3×3 amb elements A_{ij} és

$$\det A = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k},$$

a on, segons el conveni d'Einstein, hi ha una triple suma sobre i, j, k des de 1 fins a 3. De la mateixa manera, la component i del rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ d'un camp vectorial $\vec{F}$ a $\mathbb{R}^3$ és

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k.$$

El símbol de Lévi-Civita es pot generalitzar a un nombre arbitrari de dimensions (el producte vectorial, i per tant el rotacional, no!).

1.2 Teorema del transport

Sigui $W \subset \mathbb{R}^3$ una regió de l'espai que conté un fluid en $t = 0$ i sigui W_t el volum que, en $t > 0$, conté les partícules de fluid que estaven en W en $t = 0$. Donada una magnitud $f(t, \vec{x})$ volem calcular com

$$\int_{W_t} f(t, \vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x$$

varia en el temps. Per fer-ho efectuarem un canvi de variables a la integral, passant de les coordenades eulerianes a les lagrangianes, de manera que

$$\int_{W_t} f(t, \vec{x}) \, \mathrm{d}^3 x = \int_W f(t, \Phi_t(\vec{a})) J(t, \vec{a}) \, \mathrm{d}^3 a, \tag{4}$$

on

$$J(t, \vec{a}) = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{a}} \right| = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial a_i} \frac{\partial x_2}{\partial a_j} \frac{\partial x_3}{\partial a_k} \tag{5}$$

és el Jacobià del canvi de coordenades, que assumirem que és positiu sobre tota la regió. Tindrem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} &= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial^2 x_3}{\partial t\partial a_k}\right)\\
&= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial u_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial u_3}{\partial a_k}\right)\\
&= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial u_3}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial a_k}\right)\\
&= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k} + \frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial a_k}\right),
\end{aligned}$$

on en el darrer pas hem usat que les sumes sobre l col·lapsen a un únic valor degut a les propietats del determinant. Queda llavors[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} &= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial x_1}{\partial a_i}\frac{\partial x_2}{\partial a_j}\frac{\partial x_3}{\partial a_k}\\
&= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) J = (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\, J. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Emprant aquest resultat tindrem llavors

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_W f(t,\Phi_t(\vec{a}))J(t,\vec{a})\,\mathrm{d}^3a\\
&= \int_W \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t,\Phi_t(\vec{a}))J(t,\vec{a}) + f(t,\Phi_t(\vec{a}))(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(t,\Phi_t(\vec{a}))J(t,\vec{a})\right]\mathrm{d}^3a\\
&= \int_W \left[D_t f(t,\Phi_t(\vec{a})) + f(t,\Phi_t(\vec{a}))(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(t,\Phi_t(\vec{a}))\right] J(t,\vec{a})\mathrm{d}^3a. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Finalment, desfent el canvi, obtenim el **teorema del transport** o **teorema de Reynolds**,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} f(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = \int_{W_t}\Big(D_t f(t,\vec{x}) + f(t,\vec{x})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(t,\vec{x})\Big)\,\mathrm{d}^3x. \qquad (8)$$

Si posem la forma explícita de la derivada material, agrupem termes i emprem el teorema de la divergència, tenim

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} f &= \int_{W_t}\Big(\partial_t f + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\Big) = \int_{W_t}\Big(\partial_t f + \vec{\nabla}\cdot(f\vec{u})\Big)\\
&= \int_{W_t}\partial_t f\,\mathrm{d}^3x + \int_{\partial W_t} f\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{A}, \qquad (9)
\end{aligned}$$

[1]Aquest càlcul no és més que una re-obtenció de la derivada de Lie de la forma de volum per a aquest cas particular.

on ∂W_t és la frontera de W_t, orientada positivament cap a l'exterior, i $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{n}\,\mathrm{d}A$. En aquesta forma, el teorema ens diu que la variació en el temps de la integral de f sobre un volum que es mou amb el fluid és igual a la integral de la variació explícita de f respecte al temps més el flux de f a través de la superfície que envolta el volum.

1.3 Equació de continuïtat. Fluids incompressibles

Considerem el cas que la quantitat d'interès és la massa continguda en la regió W_t. Com que la regió s'està movent amb el fluid, la seva massa serà sempre la mateixa, i per tant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} \rho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = 0.$$

Emprant el teorema del transport, això implica que

$$\int_{W_t}\Big(D_t\rho(t,\vec{x}) + \rho(t,\vec{x})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}(t,\vec{x})\Big)\,\mathrm{d}^3x = 0.$$

Si assumim que ρ i $\vec{u}$ són de classe C^1 respecte de $\vec{x}$, de manera que el que apareix dins la integral és una funció contínua, obtenim l'**equació de continuïtat**

$$D_t\rho + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0, \tag{10}$$

que és l'expressió diferencial de la conservació de la massa. Alternativament, desenvolupant la derivada material i agrupant els termes de derivades d'espai,

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0. \tag{11}$$

L'equació de continuïtat es pot obtenir també a partir d'un volum fix W que no es mou amb el fluid. En aquest cas tenim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W} \rho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = \int_W \frac{\partial\rho}{\partial t}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x.$$

Això no és, però, zero, degut a que el flux del fluid pot fer entrar o sortir massa a través de la frontera ∂W de W. De fet, també podem calcular la variació temporal de la massa com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W} \rho(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = -\int_{\partial W}\rho(t,\vec{x})\vec{u}(t,\vec{x})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

ja que $\rho\vec{u}\cdot\vec{n}$, amb $\vec{n}$ la normal orientada cap a l'exterior, és la quantitat de massa que surt per unitat de superfície i temps en un punt donat de ∂W.

Igualant les dues expressions tenim

$$\int_W \frac{\partial\rho}{\partial t}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x = -\int_{\partial W}\rho(t,\vec{x})\vec{u}(t,\vec{x})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A,$$

i, usant el teorema de la divergència,

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,\vec{x})\,\mathrm{d}^3x + \int_W \vec{\nabla}\cdot(\rho(t,\vec{x})\vec{u}(t,\vec{x}))\,\mathrm{d}^3x = 0.$$

Finalment, ajuntant les integrals i emprant de nou l'hipòtesi de C^1, s'obté l'equació de continuïtat.

Un flux es diu que és **incompressible** si ρ és constant sobre una trajectòria d'una partícula de fluid. Per tant,

$$\text{flux incompressible} \;\Leftrightarrow\; D_t\rho(t,\vec{x}) = 0. \tag{12}$$

Com que

$$D_t\rho = \partial_t\rho + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho,$$

això vol dir que, en general, per a un flux incompressible ρ és constant a l'espai si i sols si també ho és en el temps (el cas que $\vec{u}$ sigui ortogonal a $\vec{\nabla}\rho$ no és genèric).

Combinant la condició d'incompressibilitat amb l'equació de continuïtat (10) tenim que

$$\text{flux incompressible} \;\Leftrightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0, \tag{13}$$

ja que no pot ser $\rho = 0$.

1.4 Deformació local del fluid

Siguin $\vec{x}$, $\vec{y}$ dos punts del fluid en un instant t, amb $\vec{y} = \vec{x} + \vec{h}$. Volem relacionar les velocitats del fluid en els dos punts. Expandint a primer ordre al voltant de $\vec{x}$ tindrem

$$\vec{u}(t,\vec{y}) = \vec{u}(t,\vec{x}) + (\vec{\nabla}\vec{u})(t,\vec{x})\vec{h}, \tag{14}$$

on

$$(\vec{\nabla}\vec{u})(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}(t,\vec{x}) \tag{15}$$

és la derivada de la funció $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ per a temps fixat. Si descomponem $\vec{\nabla}\vec{u}$ en les seves parts simètrica i antisimètrica obtindrem

$$D = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 & \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 & 2\partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 \\ \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1 & \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2 & 2\partial_3 u_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} - (\vec{\nabla}\vec{u})^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2 & \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 & 0 & \partial_3 u_2 - \partial_2 u_3 \\ \partial_1 u_3 - \partial_3 u_1 & \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

on

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \tag{19}$$

és la **vorticitat** del flux.

Hom pot veure que, en termes de $\vec{\omega}$, l'acció de S sobre un vector és

$$S\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{h}. \tag{20}$$

Podem per tant escriure, a primer ordre en $\vec{h}$,

$$\vec{u}(t,\vec{y}) = \vec{u}(t,\vec{x}) + D(t,\vec{x})\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{\omega}(t,\vec{x}) \times \vec{h}. \tag{21}$$

L'evolució de $\vec{h} = \vec{y} - \vec{x}$ amb el flux serà llavors

$$\frac{\mathrm{d}\vec{h}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{u}(t,\vec{y}) - \vec{u}(t,\vec{x}) = D(t,\vec{x})\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{\omega}(t,\vec{x}) \times \vec{h}. \tag{22}$$

Anem ara a estudiar en detall les dues contribucions a l'evolució temporal d'$\vec{h}$.

Com que $D(t,\vec{x})$ és simètrica, es pot diagonalitzar en una base ortonormal. Siguin d_i, $i = 1,2,3$ els valors propis, dependents de t i de $\vec{x}$, de $D(t,\vec{x})$. La contribució d'aquest terme a l'evolució temporal de les components $\tilde{h}_i$ de $\vec{h}$ en aquesta base serà

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{h}_i}{\mathrm{d}t} = d_i(t,\vec{x})\tilde{h}_i. \tag{23}$$

És immediat veure llavors que[2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{h}_1\tilde{h}_2\tilde{h}_3) = (d_1 + d_2 + d_3)\tilde{h}_1\tilde{h}_2\tilde{h}_3. \tag{24}$$

Com que la traça d'una matriu és invariant sota canvis de base, tindrem

$$d_1 + d_2 + d_3 = \mathrm{tr}(D) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \tag{25}$$

Per tant la velocitat de variació d'un element de volum que es mou al voltant d'una partícula de fluid és la divergència del camp de velocitats. Això és el que ja havíem vist en el teorema del transport al calcular el ritme de variació del Jacobià.

En el cas particular que el flux sigui **estacionari**, és a dir, que no depengui explícitament del temps, tindrem que tant D com S seran independents del temps, i podrem integrar les equacions (23), que en aquest cas seran

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{h}_i}{\mathrm{d}t} = d_i(\vec{x})\tilde{h}_i, \tag{26}$$

[2] Noteu que, de fet, estem calculant la derivada del volum generat per tres vectors ortogonals que experimenten dilatacions en les seves pròpies direccions.

amb solució $\tilde{h}_i(t) = \tilde{h}_i(0) \exp d_i(\vec{x})t$. Tindrem per tant que, localment, els elements de fluid s'estan expandint (si $d_i > 0$) o contraent (si $d_i < 0$) en les direccions de la base ortonormal. La matriu $D(\vec{x})$ s'anomena **tensor de velocitat de deformació** del flux.

La segona contribució a l'evolució de $\vec{h}$,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{h}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t, \vec{x}) \times \vec{h} \tag{27}$$

correspon a una rotació local, que no altera per tant el volum. En el cas que el flux sigui estacionari, hom pot integrar explícitament el resultat i obtenir $\vec{h}(t) = e^{St}\vec{h}(0)$, i es pot demostrar que la matriu $\exp(tS)$ és una matriu de rotació d'angle $\frac{t}{2}||\vec{\omega}||$ al voltant de l'eix donat per $\vec{\omega}$.

Per tant, localment, el flux del fluid deforma i rota els elements de volum (com passa, de fet, amb qualsevol transformació lineal a $\mathbb{R}^3$ generada pel flux d'un camp vectorial). Veurem que el tensor de deformació (*strain tensor*) juga un paper fonamental en la caracterització dels fluids.

Problemes

1. **Conveni d'Einstein (o de Voigt) d'índexs repetits.** Si A, B i C són matrius i $\vec{a}$ és un vector (amb les dimensions que pertoqui en cada cas), interpreteu les expressions següents:
   (a) A_{ii}.
   (b) $A_{ij}B_{jk}$.
   (c) $A_{ij}a_i$.
   (d) $A_{ij}B_{ki}C_{kj}$.

2. Demostreu que, si f i $\vec{F}$ són una funció escalar i vectorial, respectivament, llavors
   $$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

3. **Símbol de Lévi-Civita.** Demostreu que
   (a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$.
   (b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$.
   (c) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

4. Demostreu, emprant si convé les propietats del símbol de Lévi-Civita, que
   (a) $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$,
   (b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$,

(c) $\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$,

(d) $\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G})$,

(e) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$,

(f) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$,

(g) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$.

5. Deduïu el balanç de massa per a fluids en una i dues dimensions, tant en forma integral com diferencial.

6. Demostreu que la derivada material satisfà la regla de Leibniz.

7. Escriviu l'enunciat del teorema del transport per a una dimensió d'espai, i demostreu-lo directament (derivant la integral, sense utilitzar el canvi de variables).

8. Escriviu el teorema del transport per al cas que $f(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) g(t, \vec{x})$, i utilitzeu l'equació de continuïtat per simplificar el resultat.

9. Aquest problema és per demostrar que $e^{\mathbf{S}t}$ és una rotació, i determinar-ne les seves característiques.

   (a) Demostreu que $\mathbf{S}$ té valors propis $0, \pm i\frac{||\vec{\omega}||}{2}$, i que el nucli és el subespai generat per $\vec{\omega}$.

   (b) Demostreu que $\mathbf{R} = e^{\mathbf{S}t}$ és una matriu de rotació, és a dir, que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ i que $\det \mathbf{R} = 1$. Per a aquest darrer resultat podeu emprar la relació, vàlida per a qualsevol matriu A,
   $$\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}.$$

   (c) Demostreu que $||\mathbf{R}\vec{v}|| = ||\vec{v}||$, on $\vec{v}$ és un vector qualsevol.

   (d) Demostreu que l'eix de rotació de $\mathbf{R}$ ve donat per $\vec{\omega}$.

   (e) Sigui $\vec{a}$ un vector perpendicular a $\vec{\omega}$. Si actuem amb $\mathbf{R}$ sobre aquest vector i calculem l'angle entre el vector resultant i l'original haurem determinat l'angle de la rotació.

      i. Demostreu que, si $\vec{\omega} \cdot \vec{a} = 0$, llavors $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) = -||\vec{\omega}||^2 \vec{a}$.

      ii. Emprant el resultat anterior, expandint en sèrie l'exponencial $\exp(\mathbf{S}t)$ i usant que $\mathbf{S}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{a}$, calculeu $\mathbf{R}\vec{a}$.

      iii. Calculeu l'angle entre $\vec{a}$ i $\mathbf{R}\vec{a}$.

2 Equacions de balanç. Fluids newtonians. Les equacions de Navier-Stokes

2.1 Balanç de la quantitat de moviment

Suposem de nou que tenim un volum W_t que es mou amb el flux del fluid. La quantitat de moviment que conté és

$$\vec{P}_{W_t}(t) = \int_{w_t} \rho(t,\vec{x})\vec{u}(t,\vec{x})\ \mathrm{d}^3x.$$

Considerem una component d'aquest vector i calculem la seva derivada temporal, emprant el teorema del transport:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{w_t} \rho(t,\vec{x})u_i(t,\vec{x})\ \mathrm{d}^3x &= \int_{W_t} \left(D_t(\rho u_i) + \rho u_i \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\ \mathrm{d}^3x \\ &= \int_{W_t} \rho D_t u_i\ \mathrm{d}^3x, \end{aligned} \tag{28}$$

on en el darrer pas hem emprat la regla de Leibniz per a D_t i usat l'equació de continuïtat.

Tenint en compte que el volum W_t té massa constant, la quantitat obtinguda ha de ser, d'acord amb la segona llei de Newton, igual a la component i de la força total que actua sobre W_t. Les forces que actuen sobre un volum de fluid poden ser de dues classes:

- Forces volúmiques, produïdes per forces externes, com ara la gravetat, o un camp electromagnètic si el fluid està carregat elèctricament. La força total d'aquest tipus serà

  $$\int_{W_t} \rho(t,\vec{x}) f_i(t,\vec{x})\ \mathrm{d}^3x, \tag{29}$$

  on $\vec{f}$ és la força per unitat de massa, de manera que ρf_i és la força per unitat de volum en la direcció i. Per exemple, en un camp gravitatori constant, $\vec{f} = -g\hat{z}$, amb $\hat{z}$ el vector unitari en la direcció vertical.

- Forces de superfície, produïdes per l'acció del fluid circumdant a W_t. La caracterització d'aquestes forces depèn de l'orientació de la superfície, de manera que la força per unitat de superfície en la direcció i ve donada per $\sigma_{ij}n_j$, amb n_i les components de la normal, i la força total sobre W_t per

  $$\int_{\partial W_t} \sigma_{ij} n_j\ \mathrm{d}A. \tag{30}$$

  La matriu Σ, amb components σ_{ij} s'anomena **tensor d'esforços** (*stress tensor*) i, a més de poder dependre de t i $\vec{x}$, depèn també de l'estat del fluid (aquesta dependència caracteritza el tipus de fluid).

Tenint en compte els dos tipus de força, obtenim l'**equació de balanç de la quantitat de moviment**,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{w_t}\rho(t,\vec{x})u_i(t,\vec{x})\;\mathrm{d}^3x = \int_{W_t}\rho(t,\vec{x})f_i(t,\vec{x})\;\mathrm{d}^3x + \int_{\partial W_t}\sigma_{ij}n_j\;\mathrm{d}A \tag{31}$$

$$= \int_{W_t}\rho(t,\vec{x})f_i(t,\vec{x})\;\mathrm{d}^3x + \int_{W_t}\partial_j\sigma_{ij}\;\mathrm{d}^3x \tag{32}$$

on en el darrer pas hem emprat el teorema de la divergència. Ajuntant les integrals i suposant la continuïtat del que queda dins la integral obtenim l'**equació de Cauchy** del moviment d'un fluid,

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{33}$$

o, alternativament, expandint la derivada material,

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_i = \rho f_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{34}$$

que és no-lineal en les velocitats degut al darrer terme de l'esquerra.

Hom pot demostrar, suposant certes hipòtesis de caire físic, que el tensor d'esforços Σ és simètric, de manera que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, i nosaltres assumirem aquesta simetria (vegeu la Secció 4.6 de [1]).

2.2 Fluids newtonians

En un fluid en repòs o que no presenta viscositat sols hi ha components de la força superficial en la direcció normal, de manera que

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \tag{35}$$

on p és la pressió termodinàmica ($p = R\rho T$ per a un gas ideal). El signe negatiu indica que la força és en direcció contrària a la normal, de manera que el volum de fluid és comprimit pel fluid que l'envolta (òbviament, per la tercera llei de Newton, l'acció és recíproca). Els fluids que satisfan (35) s'anomenen **fluids ideals**.

En certes circumstàncies, limitar-nos a una interacció d'aquest tipus entre parts del fluid pot ser una bona aproximació, però, en general, cal considerar l'existència de forces en direccions diferents de la normal. Això és essencialment degut a la natura microscòpica del fluid i al moviment aleatori de les partícules que el constitueixen. Si imaginem que tenim dues capes de fluid en contacte però movent-se a velocitats diferents, les molècules de la part més ràpida es difondran cap a la part més lenta, i a l'inrevés, de manera que hi haurà una transferència neta de quantitat de moviment entre les dues capes. Per a gradients raonables del camp de velocitats, aquest efecte, que dóna lloc als fenòmens de viscositat, és important.

Si el fluid presenta viscositat i està en moviment, apareixeran esforços en la direcció tangencial i modificarem (35) per tenir això en compte:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \tag{36}$$

Suposarem que p és encara la pressió termodinàmica, o que no difereix massa d'ella (físicament, això vol dir que el temps que tarden les molècules del fluid en assolir l'equilibri termodinàmic és molt més petit que l'escala de temps en el que el flux varia). Les τ_{ij} són les components del **tensor d'esforços desviatòric**.

Anem ara a establir una sèrie d'hipòtesis sobre τ_{ij} que porten a la definició dels **fluids newtonians**.

Suposarem en primer lloc que les components de τ_{ij} depenen de manera lineal de les del tensor de velocitat de deformació del flux D, que anomenarem e_{ij},

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

Per tant (recordem que estem emprant el conveni d'Einstein tota l'estona)

$$\tau_{ij} = K_{ijmn} e_{mn}, \tag{37}$$

on les K_{ijmn} són les components d'un tensor de rang 4, i que té per tant 81 components. Requerirem ara que el fluid sigui **isotròpic**, és a dir, que no hi ha direccions privilegiades. Això es dóna a la pràctica per a la majoria de fluids d'interès i, matemàticament, es tradueix en que les components del tensor K hagin de ser les mateixes a qualsevol base ortonormal. Es pot llavors demostrar[2] que aquestes 81 components es redueixen a sols 3, i que K ha de ser de la forma

$$K_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\delta_{im}\delta_{jn} + \gamma\delta_{in}\delta_{jm}. \tag{38}$$

Tenint en compte a més que σ_{ij}, i per tant també τ_{ij}, és simètric, hom veu que ha de ser $\mu = \gamma$ i queda llavors

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= (\lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\delta_{im}\delta_{jn} + \mu\delta_{in}\delta_{jm})e_{mn}\\ &= \lambda\delta_{ij}e_{nn} + \mu e_{ij} + \mu e_{ji} = \lambda\delta_{ij}e_{nn} + 2\mu e_{ij}.\end{aligned}$$

Posant-ho tot a σ_{ij} obtenim

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{nn} + 2\mu e_{ij}. \tag{39}$$

Fixem-nos que, com que els elements diagonals de e_{ij} poden ser diferents, els σ_{ij} poden també ser diferents degut al darrer terme de (39), el que indicaria que la pressió efectiva no és igual en totes les direccions. Aquest no és el cas d'un fluid en repòs, però si que pot manifestar-se quan hi ha un flux, és a dir, quan $\tau_{ij} \neq 0$.

Si calculem la traça de (39)

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= -3p + 3\lambda e_{nn} + 2\mu e_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu)e_{ii} \\ &= -3p + (3\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}\cdot\vec{u},\end{aligned} \tag{40}$$

podem obtenir una expressió per a la pressió p

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}. \tag{41}$$

Podem definir una **pressió mecànica** com la mitjana dels termes diagonals de σ_{ij},

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = p - \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{u}. \tag{42}$$

Per a fluids incompressibles, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ i llavors $p = \bar{p}$ (de fet, per a materials incompressibles la pressió termodinàmica p no es pot definir). A més, en aquest cas, (39) esdevé

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{43}$$

amb p la pressió mecànica.

Si el flux del fluid és compressible llavors les pressions no són iguals i tenim

$$p - \bar{p} = \kappa\vec{\nabla}\cdot\vec{u}, \tag{44}$$

on

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \tag{45}$$

és el **coeficient de viscositat volumètrica**, o segon coeficient de viscositat, mentre que μ és el **coeficient de viscositat**. En principi, κ és mesurable, però no està clar en quins casos i condicions és zero. La hipòtesi

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0$$

s'anomena **hipòtesi de Stokes**. Suposant que es compleix, tant si el flux és incompressible com si no, el tensor de tensions queda en la forma

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{46}$$

amb p la pressió termodinàmica si el flux és compressible i la mecànica si no ho és. Els fluids que satisfan (46) s'anomenen **fluids newtonians**, i són els més habituals, encara que n'hi ha molts de comuns, com ara el plasma sanguini, tintes, pintures, xarops i suspensions diverses, que s'allunyen en més o menys grau d'aquest cas, generalment degut a que no satisfan la relació (37), sigui per la no-linealitat o per efectes més complicats.

2.3 Equacions de Navier-Stokes

Posant la forma de σ_{ij} donada per (46) per a un fluid newtonià en l'equació diferencial del balanç del moment (33), resulta

$$\begin{aligned}\rho D_t u_i &= \rho f_i + \partial_j \left(-\left(p + \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \right) \\ &= \rho f_i - \partial_i p + \partial_j \left(2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu \delta_{ij} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \right), \end{aligned} \tag{47}$$

que és la forma més general de les equacions de Navier[3]-Stokes.[4] Suposant que μ és constant en l'espai (no sempre passa: μ depèn en general de la temperatura i aquesta pot variar en l'espai) tenim

$$\begin{aligned}\rho D_t u_i &= \rho f_i - \partial_i p + \mu \partial_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \frac{2}{3}\mu \partial_i (\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) \\ &= \rho f_i - \partial_i p + \mu \partial_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \frac{2}{3}\mu \partial_i \partial_j u_j \\ &= \rho f_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j u_i + \frac{1}{3}\mu \partial_i \partial_j u_j. \end{aligned} \tag{48}$$

Finalment, dividint per ρ i expandint la derivada material s'obté la forma més usual de les equacions de Navier-Stokes,

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = f_i - \frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{\mu}{\rho}\, \partial_j^2 u_i + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\, \partial_i \partial_j u_j, \tag{49}$$

o, en forma vectorial,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho}\, \Delta \vec{u} + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\, \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}). \tag{50}$$

En general, la presència de viscositat fa que la velocitat relativa del fluid respecte a la frontera hagi de ser zero, encara que en casos de densitat molt baixa pot ser que això no es compleixi. D'una banda, la component normal de la velocitat ha de ser zero degut a que les partícules de fluid no poden travessar la paret. D'altra banda, d'acord amb la descripció microscòpica de la interacció entre parts del fluid, cal esperar que les partícules del fluid en contacte amb les parets que el contenen tinguin una velocitat tangencial nul·la respecte al mateix, degut a la interacció amb els àtoms o molècules del material de les parets. La condició de velocitat tangencial zero, coneguda com *no-slip condition*, es pot verificar experimentalment seguint partícules o substàncies traçadores que s'introdueixin en el fluid. La condició de frontera per a les equacions de Navier-Stokes juga també un paper important en la generació de vorticitat en el flux.

[3] Claude-Louis Marie Henri Navier, 1785-1836.
[4] Sir George Gabriel Stokes, 1819-1903.

Si el fluid és ideal, és a dir, $\mu = 0$, les equacions de Navier-Stokes esdevenen les **equacions d'Euler**,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p. \tag{51}$$

En aquest cas no hi ha derivades segones, i en la frontera del fluid sols cal imposar que la component normal de la velocitat sigui zero, fet que reflecteix que el fluid no pot travessar la frontera, hi hagi o no interacció amb el material de les parets.

Les equacions de Navier-Stokes (o les equacions d'Euler), són un sistema de 3 equacions en derivades parcials, respecte al temps i l'espai, a les que s'ha d'afegir l'equació de continuïtat, de manera que, en total, hi ha 4 equacions diferencials. El nombre de variables implicades és, però, 5, ja que tenim les tres components del camp de velocitats, la densitat i la pressió (la força externa $\vec{f}$ vé donada, si hi és). Per obtenir l'equació que falta, cal distingir si el fluid és o no compressible. Si ho és, llavors es pot definir la pressió termodinàmica i existirà una equació d'estat

$$p = p(\rho, T),$$

on T és la temperatura termodinàmica, que de moment suposarem donada (i per tant no és una variable), i això permet eliminar la pressió de l'equació de Navier-Stokes, de manera que queden 4 equacions amb 4 variables dependents. Si el fluid no és compressible, llavors tenim

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0,$$

i queda un sistema de 5 equacions per a les 5 variables dependents. En qualsevol cas, tal com hem dit, tot això s'ha de completar amb les condicions de frontera pertinents i les condicions inicials que es donin.

Cal tenir present que les equacions són no lineals, i això fa que l'existència de solucions i l'estudi del seu caràcter sigui un problema matemàticament complicat (vegeu el tercer Millennium Prize Problem).

2.4 Balanç de l'energia mecànica

A l'igual que passa en mecànica de partícules, el balanç d'energia mecànica no és un principi independent, i es pot obtenir del balanç de la quantitat de moviment.

A partir de l'equació de Cauchy

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

multiplicant per u_i i sumant sobre i tenim

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right) = \rho u_i f_i + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{52}$$

amb $u_i^2 = ||\vec{u}||^2$. Aquesta és l'equació de balanç de l'energia mecànica. Si introduïm l'energia cinètica per unitat de massa

$$e = \frac{1}{2}u_i^2, \tag{53}$$

i afegim i restem $\sigma_{ij}\partial_j u_i$, podem escriure l'equació com

$$\rho D_t e = \rho u_i f_i + \partial_j(u_i\sigma_{ij}) - \sigma_{ij}\partial_j u_i. \tag{54}$$

Aquesta equació és general per a qualsevol fluid. Si ara emprem la forma de σ_{ij} per a un fluid newtonià, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2/3\mu\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$, tindrem

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\partial_j u_i &= -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + 2\mu\partial_j u_i\,\frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2\\ &= -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + 2\mu\mathrm{tr}(DD^T) - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})^2,\end{aligned}$$

on hem emprat que

$$\partial_j u_i(\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

degut a que sols la part simètrica de $\partial_j u_i$ contribueix al resultat. En efecte, si tenim dues matrius A anti-simètrica, $A^T = -A$, i S simètrica, $S^T = S$, llavors

$$\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}((AS)^T) = \mathrm{tr}(S^TA^T) = -\mathrm{tr}(SA) = -\mathrm{tr}(AS),$$

on hem emprat la propietat cíclica de la traça, i per tant $\mathrm{tr}(AS) = 0$.

Tenint a més en compte que $\mathrm{tr}(I) = 3$ i que $\mathrm{tr}(D) = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$, podem escriure el resultat anterior com

$$\sigma_{ij}\partial_j u_i = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + 2\mu\,\mathrm{tr}\left(\left(D - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,I\right)\left(D - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,I\right)^T\right).$$

Definint

$$\phi = 2\mu\,\mathrm{tr}\left(\left(D - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,I\right)\left(D - \frac{1}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,I\right)^T\right) \geq 0, \tag{55}$$

on hem emprat que els valors propis d'una matriu semidefinida positiva no poden ser negatius, podem escriure el balanç d'energia mecànica com

$$\rho D_t e = \rho u_i f_i + \partial_j(u_i\sigma_{ij}) + p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \phi. \tag{56}$$

Aquest balanç en forma diferencial es pot convertir en un d'integral si l'integrem sobre un volum W_t que es mou amb el fluid,

$$\int_{W_t}\rho D_t e\,\mathrm{d}^3x = \int_{W_t}\left(\rho u_i f_i + \partial_j(u_i\sigma_{ij}) + p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \phi\right)\,\mathrm{d}^3x. \tag{57}$$

Emprant ara que, del teorema del transport i de l'equació de continuïtat, es dedueix

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} \rho e \, \mathrm{d}^3x = \int_{W_t} \rho D_t e \, \mathrm{d}^3x, \tag{58}$$

podem re-escriure (57) com

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} \rho e \, \mathrm{d}^3x = \int_{W_t} \left(\rho u_i f_i + p \, \vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \phi\right) \, \mathrm{d}^3x + \int_{\partial W_t} u_i \sigma_{ij} n_j \, \mathrm{d}A, \tag{59}$$

on també hem emprat el teorema de Gauss per obtenir la integral sobre la frontera de W_t. Aquesta forma del balanç d'energia mecànica ens diu que el ritme de variació de l'energia cinètica és degut al treball fet per les forces externes ($\rho u_i f_i$ per unitat de volum), al treball fet per la resta de fluid a través de la frontera ($u_i \sigma_{ij} n_j$ per unitat de superfície) i al treball degut a la compressibilitat del propi fluid ($p \, \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ per unitat de volum), menys l'energia que es perd ($\phi \geq 0$) degut a la viscositat. Cal remarcar que el treball degut a la compressibilitat és important en moltes aplicacions, com ara en el cas de les turbines de gasos, i que les pèrdues per viscositat expliquen, per exemple, perquè els rius arriben als seus estuaris amb velocitats molt petites.

2.5 Balanç d'energia: primer principi de la termodinàmica

Hem vist en la secció anterior que part del treball fet sobre un fluid no es converteix en energia cinètica del mateix, sinó que es perd degut a la viscositat, és a dir, a la interacció entre molècules corresponents a partícules de fluid amb diferents velocitats. Aquesta energia, però, no es pot perdre, però per tenir-la en compte s'ha d'introduir el concepte de calor i el primer principi de la termodinàmica, el principi de conservació de l'energia, que és independent del balanç d'energia mecànica.

Per fer-ho em d'introduir una nova variable, l'energia interna, que porta la comptabilitat de l'energia cinètica de les molècules deguda al seu moviment tèrmic microscòpic (diferent de la velocitat macroscòpica per pertànyer a una partícula de fluid) i també de l'energia potencial que poden tenir per la interacció entre elles. En el cas d'un gas ideal l'energia sols té la contribució deguda al moviment tèrmic, mentre que en els gasos no ideals i en els líquids apareix una energia potencial (per exemple, les forces de van der Waals en el cas dels gasos).

Si U designa l'energia interna d'un sistema qualsevol, llavors el primer principi de la termodinàmica[3] estableix que, en un procés arbitrari, la seva variació ΔU satisfà

$$\Delta U = Q - W, \tag{60}$$

on W és el treball fet pel sistema i Q és la calor que absorbeix. Per raons històriques, es considera positiu el treball fet per un sistema sobre el seu entorn i també positiu la quantitat de calor que passa de l'entorn cap al sistema. Això es degut a que la termodinàmica va néixer de l'estudi dels motors tèrmics, que absorbeixen calor i proporcionen treball.

En la seva formulació bàsica, el primer principi es formula per a sistemes amb energia mecànica constant. Com que aquest no és el cas d'un fluid que experimenta un flux, cal particularitzar-lo. Si anomenen ε l'energia interna per unitat de massa, la conservació de l'energia total del fluid contingut en la regió W_t que es mou amb el flux estableix que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t}\rho(e+\varepsilon)\,\mathrm{d}^3x=\int_{W_t}\rho\,\vec{u}\cdot\vec{f}\,\mathrm{d}^3x+\int_{\partial W_t}u_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}A-\int_{\partial W_t}\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A. \tag{61}$$

Els dos primers termes de la dreta són el treball fet **sobre** el fluid contingut en W_t per les forces externes i per la resta de fluid (i amb signe canviat seria el treball que fa el fluid de W_t sobre el seu entorn), i el darrer terme, sense el signe menys, és el flux de calor que **surt** de W_t per la seva frontera, amb $\vec{q}$ la quantitat de calor per unitat de superfície i temps en una certa direcció (i per tant amb el signe negatiu és el que entra). No hem posat el treball fet per la compressibilitat degut a que aquest és un treball intern entre les partícules del fluid de W_t. Si combinem això amb (59) per a eliminar e, queda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t}\rho\,\varepsilon\,\mathrm{d}^3x+\int_{W_t}(p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}-\phi)\,\mathrm{d}^3x=-\int_{\partial W_t}\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A, \tag{62}$$

que és la versió del primer principi per a fluids, i que és independent de l'equació de balanç de l'energia mecànica. Convertint la integral de superfície en una de volum, i emprant el teorema del transport per a $\rho\varepsilon$ i la hipòtesis de continuïtat habitual, obtenim la forma diferencial del primer principi per a fluids

$$\rho D_t\varepsilon=-\vec{\nabla}\cdot\vec{q}-p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\phi. \tag{63}$$

D'aquesta equació, o de (62), veiem que tant el treball degut a la compressibilitat com la generació de calor degut a la viscositat contribueixen als canvis de l'energia interna.

En general, el flux de calor en un fluid és degut als gradients de temperatura. El model més habitual és el de la llei de Fourier,

$$\vec{q}=-k\vec{\nabla}T, \tag{64}$$

on $k>0$ és un coeficient de conductivitat que depèn del fluid. Posant això a (63) i suposant que k no depèn de l'espai, tenim

$$\rho D_t\varepsilon=k\Delta T-p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\phi. \tag{65}$$

Resumint, en total hom té 3 conjunts d'equacions diferencials,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})=0,\quad \text{eq. de continuïtat} \tag{66}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u}+\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\,\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}),\quad \text{eqs. de Navier-Stokes} \tag{67}$$

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\varepsilon=k\Delta T-p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u}+\phi,\quad \text{conservació de l'energia} \tag{68}$$

amb ϕ, que depèn de les derivades de $\vec{u}$, donada per (55). El nombre de variables dependents de $t, \vec{x}$ que apareixen en aquestes 5 equacions és 7: les tres components de $\vec{u}$, ρ, p, T i ε. Si el fluid és compressible, hom té una equació d'estat que dóna p en termes de la densitat i la temperatura absoluta, $p = p(\rho, T)$, i a més l'energia interna també es pot expressar llavors en termes de ρ i T, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. Si el flux del fluid és incompressible, no es pot eliminar p en termes de ρ i T, però s'ha d'afegir l'equació d'incompressibilitat $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. A més, en general, en aquest cas es té $\varepsilon = \varepsilon(T)$. En qualsevol cas, el nombre d'equacions diferencials independents iguala el nombre de variables que queden i es pot solucionar el sistema afegint les condicions de contorn i inicials pertinents.

2.6 Teorema de Bernoulli

Donat un flux amb camp de velocitats $\vec{u}(t, \vec{x})$ definim les seves **línies de corrent** (*streamlines*) com les corbes integrals del camp vectorial $\vec{u}$ a temps t fixat. Si les parametritzem amb s, les línies de corrent corresponents a congelar el camp de velocitats en t obeeixen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s} = \vec{u}(t, \vec{x}(s)). \tag{69}$$

Les corbes integrals del camp de velocitats, que són les trajectòries que segueixen les partícules de fluid satisfan, en canvi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{u}(t, \vec{x}(t)). \tag{70}$$

Si el flux és estacionari, $\vec{u}(t, \vec{x}) = \vec{u}(\vec{x})$, les trajectòries i les línies de corrent coincideixen.

Considerem ara un fluid newtonià ideal ($\mu = 0$) i tal que la força externa és conservativa, de manera que deriva d'un potencial,

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi. \tag{71}$$

Per exemple, $\varphi(\vec{x}) = gz$ si tenim un camp gravitatori constant en la direcció vertical. L'equació d'Euler esdevé llavors

$$\rho D_t \vec{u} = -\rho \vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla} p,$$

o, component a component,

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i \varphi - \frac{1}{\rho}\partial_i p. \tag{72}$$

Emprant que

$$\epsilon_{ilm}\omega_i = \epsilon_{ilm}\epsilon_{ijk}\partial_j u_k = (\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{jm})\partial_j u_k = \partial_l u_m - \partial_m u_l,$$

el terme $u_j \partial_j u_i$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} u_j \partial_j u_i &= u_j(\partial_j u_i - \partial_i u_j) + u_j \partial_i u_j = -u_j \epsilon_{kij}\omega_k + u_j \partial_i u_j \\ &= -\epsilon_{ijk} u_j \omega_k + \frac{1}{2}\partial_i ||\vec{u}||^2 = -(\vec{u} \times \vec{\omega})_i + \frac{1}{2}\partial_i ||\vec{u}||^2, \end{aligned}$$

i l'equació (72) esdevé

$$\partial_t u_i + \partial_i \left(\frac{1}{2}||\vec{u}||^2 \right) + \frac{1}{\rho}\partial_i p + \partial_i \varphi = (\vec{u} \times \vec{\omega})_i. \tag{73}$$

Aquesta és l'equació d'Euler per a un fluid qualsevol sotmès a una força exterior conservativa.

Fem ara la hipòtesis addicional que ρ és una funció de p. Un flux així s'anomena **barotròpic**. Aquest és el cas, per exemple, d'un flux isotèrmic d'un gas ideal, per al que es té $p/\rho =$ constant. Per a un flux barotròpic tenim que

$$\frac{1}{\rho(p)}\partial_i p = \partial_i I(p),$$

on $I(p)$ és una primitiva de $1/\rho(p)$ respecte de p. Queda llavors

$$\partial_t u_i + \partial_i B = (\vec{u} \times \vec{\omega})_i, \tag{74}$$

on

$$B = \frac{1}{2}||\vec{u}||^2 + I(p) + \varphi \tag{75}$$

és la **funció de Bernoulli**. Si el flux és estacionari, això es redueix, en notació vectorial, a

$$\vec{\nabla} B = \vec{u} \times \vec{\omega}. \tag{76}$$

Sigui $\vec{x}(s)$ una línia de corrent del flux estacionari. La derivada de B al llarg de la línia de corrent serà, emprant (76),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}B(\vec{x}(s)) = \vec{\nabla} B(\vec{x}(s)) \cdot \vec{u}(\vec{x}(s)) = \vec{u}(\vec{x}(s)) \times \vec{\omega}(\vec{x}(s)) \cdot \vec{u}(\vec{x}(s)) = 0.$$

Per tant

$$\frac{1}{2}||\vec{u}(\vec{x})||^2 + I(p(\vec{x})) + \varphi(\vec{x}) = \text{constant sobre les línies de corrent}, \tag{77}$$

que és l'enunciat del teorema de Bernoulli. A més, si el flux és irrotacional, és a dir, si $\vec{\omega} = 0$, llavors

$$\frac{1}{2}||\vec{u}(\vec{x})||^2 + I(p(\vec{x})) + \varphi(\vec{x}) = \text{constant arreu}. \tag{78}$$

2.7 Balanç d'entropia: segon principi

El segon principi de la termodinàmica[3] permet definir una funció de l'estat del sistema, l'entropia, tal que, en un procés espontani d'un sistema aïllat, no pot mai decréixer. Aquesta funció, S, té unes variacions ΔS que, en termes de les de U i V, han d'obeir l'equació de Gibbs

$$T\Delta S = \Delta U - p\Delta V.$$

L'equació de Gibbs per unitat de massa és,

$$T\Delta s = \Delta\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}\Delta\rho,$$

on s'ha utilitzat que el volum per unitat de massa és $v = V/m = 1/\rho$. D'aquí podem calcular la derivada material de l'entropia per unitat de massa,

$$TD_t s = D_t\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D_t\rho. \tag{79}$$

Si inserim ara l'equació del balanç d'energia tèrmica i l'equació de continuïtat obtenim

$$\rho D_t s = -\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \frac{\phi}{T} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{1}{T^2}\vec{q}\cdot\vec{\nabla}T + \frac{\phi}{T}. \tag{80}$$

Finalment, emprant la llei de Fourier $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$, això esdevé

$$\rho D_t s = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2 + \frac{\phi}{T}. \tag{81}$$

El primer terme del costat dret és la variació d'entropia degut a la variació de $\vec{q}/T$ al llarg de la trajectòria de les partícules de fluid, i és un terme reversible ja que no implica conducció de calor. Els dos darrers termes representen la producció irreversible d'entropia deguda a la conducció de calor i a la dissipació. Pel segon principi, no poden ser negatius, i això requereix que μ i k no siguin negatius. Com que aquest és el cas, el segon principi de la termodinàmica ja està incorporat en la formulació presentada. Si el fluid és no viscós i no hi ha conducció de calor, l'entropia es conserva al llarg de les trajectòries del flux.

La interpretació dels termes que apareixen a (81) és més clara si integrem l'equació sobre un volum fixat a l'espai W. En primer lloc, emprant l'equació de continuïtat es pot veure que

$$\rho D_t s = \partial_t(\rho s) + \vec{\nabla}\cdot(\rho s\vec{u}) \tag{82}$$

Si substituïm això a (81) i integrem sobre el volum fixat W, el primer terme és simplement la derivada respecte al temps de la integral, i passant el segon cap a la dreta i aplicant el teorema de la divergència en dos dels termes queda

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_W \rho s\,\mathrm{d}V &= -\int_{\partial W} \rho s\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \\
&- \int_{\partial W} \frac{1}{T}\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \\
&+ k\int_W \frac{1}{T^2}\left(\vec{\nabla}T\right)^2\mathrm{d}V \\
&+ \int_W \frac{\phi}{T}\,\mathrm{d}V.
\end{aligned} \tag{83}$$

El primer terme és el flux d'entropia degut al fluid que creua la frontera de W, mentre que el segon és el flux d'entropia degut al flux de calor. Aquests dos termes de superfície, però, no augmenten ni disminueixen l'entropia global de l'Univers, ja que el seu efecte es compensa pels termes iguals i de signe contrari que s'haurien d'incloure en el balanç del fluid que rodeja a W.[5] El tercer terme és positiu i representa la producció d'entropia degut a la conducció irreversible de calor dins del fluid, mentre que el quart també es positiu i descriu la creació d'entropia degut a la dissipació.

Problemes

10. Considereu l'equació de continuïtat i l'equació de Navier-Stokes en una dimensió d'espai,

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0,$$
$$\partial_t u + u\partial_x u = f - \frac{1}{\rho}\partial_x p + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_x^2 u.$$

Sigui un observador que es mou amb velocitat constant relativa β respecte al sistema en el que es donen les equacions anteriors ("sistema del laboratori"), de manera que les seves mesures d'espai i temps, x', t', estan relacionades amb les del laboratori per

$$x' = x - \beta t, \quad t' = t.$$

Les magnituds que apareixen en els dos sistemes estan relacionades per

$$\rho'(t', x') = \rho(t, x), \quad p'(t', x') = p(t, x), \quad u'(t', x') = u(t, x) - \beta, \quad f'(t', x') = f(t, x).$$

Demostreu que les equacions de Navier-Stokes són les mateixes per a aquest observador. Aquest és el punt fonamental de la invariància Galileana de les equacions de Navier-Stokes. Això no és quelcom que puguem donar per suposat per a qualsevol equació. Per exemple, l'equació d'ones de l'electromagnetisme

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi = \partial_x^2 \phi$$

no té la mateixa forma si es transforma de la mateixa manera, i s'obté, usant $\phi'(t', x') = \phi(t, x)$,

$$\frac{1}{c^2}\left(\beta^2 \partial_{x'}^2 \phi' + \partial_{t'}^2 \phi' - 2\beta \partial_{t'} \partial_{x'} \phi'\right) = \partial_{x'}^2 \phi'.$$

De fet, l'equació d'ones considerada és invariant sota transformacions de Lorentz, no de Galileu.

[5] Si W és tot el fluid, llavors el primer terme no hi és degut a la condició de frontera sobre $\vec{u}$, i el segon s'ha de discutir incloent la font que proporciona el flux de calor i les característiques d'aquest flux.

11. Calculeu, aplicant el teorema de Bernoulli, la velocitat de sortida de l'aigua d'un dipòsit per un orifici de diàmetre petit comparat amb la secció del dipòsit.

12. Reproduïu tots els passos de la secció 2.7 (Balanç d'entropia: segon principi). Demostreu, en particular, que
$$\rho D_t s = \partial_t(\rho s) + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{u}).$$

3 Nombre de Reynolds. Flux irrotacional

3.1 El nombre de Reynolds

Sigui un fluid homogeni, amb $\rho(t, \vec{x}) = \rho_0$, i per tant incompressible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Suposant també que $\mu = \mu_0$ és constant i definint la viscositat cinemàtica $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$, les equacions de Navier-Stokes queden
$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu_0 \Delta \vec{u}. \tag{84}$$
Suposem que el flux que estem considerant té alguna longitud característica L, i també una velocitat característica U. Per exemple, L pot ser la dimensió d'un obstacle en el fluid, i U la velocitat del fluid lluny de l'obstacle. Podem llavors definir també un temps característic $T = L/U$ i unes magnituds sense dimensions,
$$\vec{u} = U\vec{u}\,', \quad \vec{x} = L\vec{x}\,', \quad t = Tt\,', \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{L}\vec{\nabla}\,', \quad \partial_t = \frac{1}{T}\partial_{t\,'}, \tag{85}$$
de manera que en les noves variables (84) esdevé
$$\partial_{t\,'}\vec{u}\,' + (\vec{u}\,' \cdot \vec{\nabla}\,')\vec{u}\,' = -\vec{\nabla}\,'\left(\frac{p}{U^2\rho_0}\right) + \frac{\nu_0}{LU}\Delta\,'\vec{u}\,',$$
o, introduint la pressió adimensional $p' = p/(U^2\rho_0)$,
$$\partial_{t\,'}\vec{u}\,' + (\vec{u}\,' \cdot \vec{\nabla}\,')\vec{u}\,' = -\vec{\nabla}\,'p\,' + \frac{\nu_0}{LU}\Delta\,'\vec{u}\,'.$$
Suprimint les primes i definint el **nombre de Reynolds**
$$\mathrm{Re} = \frac{LU}{\nu_0} \tag{86}$$
queda finalment
$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{u}. \tag{87}$$
Totes les quantitats que apareixen a (87), incloent-hi el nombre de Reynolds, són sense dimensions. El nombre de Reynolds indica la importància relativa dels efectes de viscositat: són importants per a Re petit i disminueixen en importància a mesura que Re creix.

Si considerem dos fluxos incompressibles amb dimensions diferents però amb la mateixa geometria, les solucions de les equacions de Navier-Stokes seran iguals en les variables adimensionals si els nombres de Reynolds també són iguals. Això s'utilitza experimentalment per a obtenir conclusions sobre un flux utilitzant models a escala.

Suposem per exemple que tenim un submarí amb $L_1 = 200\,\mathrm{m}$, $U_1 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. L'aigua del mar té una viscositat cinemàtica $\nu_1 = 1.83 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, i per tant el nombre de Reynolds del flux d'aquest submarí serà

$$\mathrm{Re} = \frac{U_1 L_1}{\nu_1} = 0.55 \cdot 10^9.$$

Si volem tenir un model a escala equivalent amb $L_2 = 5\,\mathrm{m}$ en amoníac ($\nu_2 = 3 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$), caldrà que el flux del canal on el posem tingui una velocitat de

$$U_2 = \frac{\nu_2}{L_2}\,\mathrm{Re} = 33\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

El nombre de Reynolds també dóna una indicació sobre l'aparició de fluxos turbulents. Per a nombres de Reynolds inferiors a 2000 es pot assegurar que el flux no serà turbulent (flux laminar), mentre que si el nombre de Reynolds és superior a 4000 es pot estar força segur de que apareixeran fenòmens de turbulència.

3.2 Flux irrotacional

Sigui un fluid ideal ($\mu = 0$) amb forces externes conservatives, $\vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi$, incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$) i tal, a més, que $\vec{\nabla}\rho = 0$. De l'equació d'Euler tenim llavors

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{u} &= -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \vec{\nabla}\varphi - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \\ &= -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \vec{\nabla}\varphi - \left(\frac{1}{2}\vec{\nabla}(||\vec{u}||^2) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})\right),\end{aligned}$$

on hem emprat

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

amb $\vec{F} = \vec{G} = \vec{u}$. El darrer terme conté el camp de vorticitat, i queda

$$\partial_t \vec{u} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(||\vec{u}||^2) + \vec{u} \times \vec{\omega}.$$

Si ara prenem el rotacional d'aquesta equació, tots els termes amb gradients desapareixen i resulta

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) \\ &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) \qquad (88) \\ &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}, \qquad (89)\end{aligned}$$

on hem emprat la condició d'incompressibilitat i que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$. Passant cap a l'esquerra segon terme de la dreta queda finalment

$$D_t \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \tag{90}$$

Aquesta equació indica que, per a fluids ideals amb densitat homogènia i forces externes conservatives, si la vorticitat és inicialment zero ho seguirà sent en temps posteriors quan seguim una partícula de fluid. La aparició de vorticitat, si no hi és inicialment, requereix de forces no conservatives o d'esforços tangencials deguts a la viscositat.

Suposem ara que, a més de totes les condicions esmentades (homogeneïtat, fluid ideal, forces externes conservatives), el nostre flux és estacionari i bidimensional i irrotacional, és a dir, $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ arreu i per a tot instant de temps. Això implica que el camp de velocitats és de la forma

$$\vec{u}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), 0).$$

La condició de incompressibilitat esdevé

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \tag{91}$$

i la de vorticitat nul·la és

$$\partial_x v - \partial_y u = 0. \tag{92}$$

Aquestes dues equacions impliquen, en virtut del teorema de Green, que els camps $(-v, u)$ i (u, v) siguin conservatius, respectivament. Existeixen per tant funcions $\psi(x, y)$ i $\phi(x, y)$ tals que

$$v = -\partial_x \psi, \quad u = \partial_y \psi, \tag{93}$$

$$u = \partial_x \phi, \quad v = \partial_y \phi. \tag{94}$$

La funció ψ s'anomena **funció de corrent**, i les seves corbes de nivell són les línies de corrent. Efectivament, si $(x(s), y(s))$ és una línia de corrent, $x' = u$, $y' = v$, tindrem que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \psi(x(s), y(s)) = \partial_x \psi u + \partial_y \psi v = (-v)u + uv = 0,$$

i per tant $(x(s), y(s))$ és una corba de nivell, i també es pot demostrar a l'inrevés.

Per la seva banda, ϕ s'anomena **potencial de velocitat**, donat que el seu gradient proporciona el camp de velocitats. Les dues funcions estan relacionades per

$$\partial_x \phi = \partial_y \psi, \quad \partial_y \phi = -\partial_x \psi, \tag{95}$$

que no són més que les equacions de Cauchy-Riemann per a $\phi + i\psi$. Això, juntament amb la condició de que ϕ, ψ siguin C^1, fa que

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

sigui una funció holomorfa, anomenada potencial complex de velocitats. Aquest fet permet utilitzar la teoria de funcions de variable complexa, i en particular les transformacions conformes, per a resoldre problemes de mecànica de fluids en dues dimensions, suposant que el flux satisfaci totes les condicions que hem anat introduint (en particular, ser estacionari, incompressible, irrotacional i sense viscositat). Hom pot d'aquesta manera, en el camp de l'aerodinàmica, estudiar el perfil de pressions al voltant d'una superfície sustentadora.

Noteu que, per ser $w(z)$ holomorfa,

$$\begin{aligned} w'(z) &= \partial_x w(z) = \partial_x \phi(x,y) + i\partial_x \psi(x,y) \\ &= u(x,y) - iv(x,y), \end{aligned}$$

i per tant les components del camp de velocitats es poden llegir de la derivada de w.

Problemes

13. Esbrineu, a partir de l'equació de Navier-Stokes, les dimensions físiques de la viscositat cinemàtica, i verifiqueu que el nombre de Reynolds no té dimensions físiques.

14. Demostreu que les corbes de nivell de la funció de corrent són línies de corrent.

15. Sigui
$$\psi(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 > 1.$$
    (a) Demostreu que és una funció harmònica i, suposant que és una funció de corrent, calculeu el camp de velocitats.
    (b) Demostreu que el camp de velocitats s'anul·la quan ens acostem als punts $(\pm 1, 0)$, i dibuixeu, aproximadament, les línies de corrent.
    (c) Calculeu el camp de pressions.

16. Calculeu i dibuixeu aproximadament els camps de velocitat associats als potencials complexos (definits en cada cas, si no s'indica, sobre el domini que pertoqui)
    (a) $w(z) = A \log z$, $A > 0$.
    (b) $w(z) = -iA \log z$, $A > 0$.
    (c) $w(z) = Uz$, $U > 0$.
    (d) $w(z) = U(z + a^2/z)$, $U > 0$, per a $|z| > a$.

17. L'equació de Stokes.
    (a) Determineu les dimensions de μ.

(b) Amb la mateixa notació emprada per arribar a l'equació de Navier-Stokes original, demostreu que

$$p' = \frac{L}{\mu U} p$$

també és una pressió adimensional. Efectueu l'adimensionalització de l'equació de Navier-Stokes amb aquesta p', i escriviu el resultat en termes del nombre de Reynolds.

(c) A partir de l'equació sense dimensions obtinguda en l'apartat anterior, considereu el cas que Re $\to 0$. L'equació que en resulta s'anomena *equació de Stokes adimensional*:

$$\vec{\nabla}' p' = \Delta' \vec{u}'. \tag{96}$$

És una equació lineal i sense derivades temporals, i per tant el camp de velocitats solució de la mateixa sols pot variar en el temps si ho fan les condicions de frontera. Aquesta equació, juntament amb la condició de incompressibilitat, descriu el moviment de fluids quan els efectes deguts a la viscositat són dominants. Aquest és el cas, per exemple, del flux de lava o de quitrà (degut a l'elevada viscositat i les baixes velocitats), i també el flux al voltant dels éssers microscòpics que es desplacen en l'aigua, com ara els paramecis, degut en aquest cas a la seva petita grandària. Aquests éssers utilitzen la superfície del seu cos per variar les condicions de frontera del flux i generar així variacions temporals del camp de velocitats que els impulsen en la direcció que volen.

(d) Demostreu que si restaureu les dimensions a (96) s'obté $\vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{u}$, que s'anomena, simplement, equació de Stokes.

(e) Considereu l'equació de Stokes i la condició d'incompressibilitat,

$$\vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{u}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Demostreu que

i. La pressió i les components del camp de vorticitat són funcions harmòniques.

ii. Les components del camp de velocitat són funcions bi-harmòniques, és a dir, satisfan l'equació $\Delta^2 \phi = 0$.

18. Sigui un flux viscós, homogeni i incompressible entre dues plaques planes paral·leles situades a $y = 0$ i $y = d > 0$, respectivament, i sense forces externes. Cerquem solucions estacionàries de la forma $\vec{u}(x, y, z) = (u(x, y), 0, 0)$ i a on p sigui sols una funció de x, $p(x, y, z) = p(x)$, amb $p(0) = p_1$ i $p(L) = p_2$, amb $L > 0$ i $p_1 > p_2$, de manera que el fluid és empès per la pressió en la direcció positiva de l'eix X.

(a) Calculeu el camp de velocitats i la pressió.

(b) Calculeu el camp de vorticitat.

(c) Calculeu la força total que fa el fluid sobre una àrea d'un metre quadrat d'una de les plaques, i el gradient de la pressió i el Laplacià del camp de velocitats en els punts que estan en contacte amb elles.

(d) Com que el camp és estacionari, l'energia cinètica de qualsevol volum fix del fluid no varia en el temps. Com es fa això compatible amb la presència de dissipació?

19. Sigui un fluid ideal ($\mu = 0$) 2-dimensional a la regió $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Suposem que el flux és estacionari, incompressible i irrotacional, i que ve donat pel potencial complex

$$w(z) = \frac{1}{2}Az^2, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

amb A una constant positiva.

(a) Calculeu la funció de corrent i el potencial de velocitat. A partir de la funció de corrent, dibuixeu aproximadament les línies de corrent en el semiplà superior.

(b) Calculeu el camp de velocitats i verifiqueu que el flux és incompressible i irrotacional.

(c) Calculeu, suposant que no hi ha forces externes, el camp de pressions. Repetiu el càlcul suposant que hi ha un camp gravitatori constant en la direcció y.

Referències

[1] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Tryggvason, G. (2016). Fluid mechanics (Sixth edition.). Academic Press.

[2] Jog, C. S., A Concise Proof of the Representation Theorem for Fourth-Order Isotropic Tensors, *J. of Elasticity* (2006) 85: 119-124, DOI 10.1007/s10659-006-9074-0

[3] Fermi E. (1956), Thermodynamics. Dover.