

EQUACIONS DIFERENCIALS - ENGINYERIA INDUSTRIAL - EPSEVG

Tema 1 - Equacions diferencials

CARLES BATLLE ARNAU

Departament de Matemàtica Aplicada 4
i
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Universitat Politècnica de Catalunya

EPSEVG, Av. V. Balaguer s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú

Gener 2012

Copyright 2012 Carles Batlle (carles.batlle@upc.edu)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 License. A copy of the license can be found at <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

Índex

1	EDO, tipus i solucions	3
2	EDO de variables separades	7
3	Algunes EDO a l'enginyeria i la ciència	12
3.1	Mecànica	12
3.2	Teoria de circuits	13
3.3	Models de població	16
3.4	Desintegració radioactiva	17
4	Mètodes numèrics	18
4.1	El mètode d'Euler	18
4.2	Altres mètodes	23

1 EDO, tipus i solucions

Una equació diferencial ordinària (EDO) és una equació entre una funció $y(x)$, les seves derivades $y'(x)$, $y''(x)$, \dots , i la variable independent x , sempre que hi hagi almenys una derivada. La incògnita de l'equació és la funció $y(x)$, i en l'EDO s'escriu sempre y , y' , y'' , \dots en lloc de $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, \dots , ja que es suposa que no es coneix la solució.

L'ordre de la màxima derivada és l'ordre de l'EDO, i si y i totes les seves derivades hi apareixen linealment es diu que l'EDO és lineal. Per exemple

$y'' + 3y + x = \sin x$ és una EDO lineal de segon ordre.

$yy' = x$ és una EDO de primer ordre, no lineal.

$y^{(iv)} + y'' + y = x^4$ és una EDO lineal de quart ordre.

$y''' + \frac{x}{y} = y''$ és una EDO de tercer ordre, no lineal.

Una solució d'una EDO és una funció $y(x)$ tal que en substituir-la a l'EDO, juntament amb les derivades que calgui, en resulta una identitat. Per exemple,

$$y(x) = e^{-x} \sin x \quad (1)$$

és solució de l'EDO lineal de segon ordre

$$y'' + 2y' + 2y = 0. \quad (2)$$

Efectivament, de (1),

$$y'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(-\sin x + \cos x), \quad (3)$$

$$y''(x) = -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(-\cos x - \sin x) = -2e^{-x} \cos x, \quad (4)$$

i llavors

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = -2e^{-x} \cos x + 2(e^{-x}(-\sin x + \cos x)) + 2e^{-x} \sin x = 0.$$

Un altre exemple més interessant és

$$y(x) = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (5)$$

on C és una constant qualsevol, que és solució de

$$y' + xy = x. \quad (6)$$

En efecte, de (5),

$$y'(x) = -Cxe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i llavors

$$y'(x) + xy(x) = -Cxe^{-\frac{1}{2}x^2} + x \left(1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\right) = x.$$

El fet destacat d'aquest exemple és que qualsevol valor de la constant C ens proporciona una solució de l'EDO (5). Això no és un cas aïllat: per exemple, es fàcil veure que

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x, \quad (7)$$

amb C_1 i C_2 constants qualssevol, és solució de la EDO (2). Es diu que (5) i (7) són **solucions generals** de les seves respectives EDO. La definició general és la següent:

Donada una EDO d'ordre n , una **solució general** és una solució que conté n constants arbitràries independents.

És important destacar que les constants han de ser independents. Per exemple,

$$y(x) = (C_1 + C_2)e^{-x} \cos x \quad (8)$$

és una solució de (2), però no n'és la solució general, ja que definint $C = C_1 + C_2$ queda $y(x) = Ce^{-x} \cos x$, que sols conté una constant.

El nom de "solució general" està justificat per la següent propietat: llevat de certes EDO especials que no trobarem en aquest curs, una solució general permet obtenir totes les solucions de l'EDO donant valors a les constants arbitràries. Per exemple, si a (7) posem $C_1 = 0$ i $C_2 = 1$ obtenim (1).

Una **solució particular** d'una EDO és una solució que no conté cap constant arbitrària.

Les constants de la solució general d'una EDO es poden fixar arbitràriament donant-les-hi valors, però això és poc útil a la pràctica. Normalment, una solució particular s'obté d'una de general especificant un conjunt complet de **condicions inicials**, a partir de les quals es calculen llavors les constants.

Donada una EDO d'ordre n , un conjunt complet de condicions inicials és un conjunt dels n valors de y i de les seves derivades fins a ordre $n - 1$ en un punt x_0 , el punt inicial:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0).$$

Així,

per a una EDO d'ordre 1 cal especificar $y(x_0)$.

per a una EDO d'ordre 2 cal donar $y(x_0), y'(x_0)$.

per a una EDO d'ordre 3 cal proporcionar $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)$.

En la majoria de problemes ens trobarem $x_0 = 0$, però no sempre.

Reprenem l'EDO (2) amb solució general (7). Posem $x_0 = 0$ i busquem la solució particular que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. De (7) tenim directament

$$1 = y(0) = C_1 e^{-0} \cos 0 + C_2 e^{-0} \sin 0 = C_1 \quad (9)$$

d'on $C_1 = 1$. Derivant la solució general respecte a x ,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 e^{-x} \cos x - C_1 e^{-x} \sin x - C_2 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x \\ &= e^{-x} ((-C_1 + C_2) \cos x - (C_1 + C_2) \sin x), \end{aligned}$$

i ara podem imposar que $y'(0) = -1$:

$$-1 = y'(0) = e^{-0} ((-C_1 + C_2) \cos 0 - (C_1 + C_2) \sin 0) = -C_1 + C_2.$$

Això, juntament amb $C_1 = 1$, determina $C_2 = 0$ i la solució particular

$$y(x) = e^{-x} \cos x.$$

És força intuïtiu que per determinar els valors de, per exemple, les dues constants d'una EDO de segon ordre, calgui donar dos valors com ara $y(x_0)$ i $y'(x_0)$. Hom podria pensar si, en general, hi ha altres possibilitats, com donar els valors de y en dos punts diferents, en lloc de donar el valor de y i de y' en el mateix punt. La resposta és que això, en general, no és possible.

Sigui, per exemple, l'EDO

$$y'' + 4y = 0.$$

És immediat veure que

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

n'és la solució general. Intentem ara trobar una solució particular tal que $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$. Hom té

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1, \\ 2 &= y(\pi) = C_1 \cos 2\pi + C_2 \sin 2\pi = C_1, \end{aligned}$$

i per tant no existeix cap valor de C_1 que verifiqui les condicions (i, a més, C_2 queda lliure). En general, si es volen imposar condicions en dos punts diferents cal que l'EDO tingui algun paràmetre que es pugui variar: escollint-lo de manera adient és possible llavors obtenir una solució especificada d'aquesta manera. Aquest fet és, per exemple, la base del funcionament de tots els instruments musicals. Aquest tipus de problemes, una EDO amb condicions a diferents punts, s'anomenen problemes de frontera doble. Nosaltres no els veurem, i ens concentrarem en el tipus de condicions en un únic punt. Això té un nom especial:

S'anomena problema de valors inicials o problema de Cauchy el problema de trobar una solució $y(x)$ d'una EDO d'ordre n amb valors especificats de $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$.

A més de tractar EDO, considerarem també sistemes d'EDO, que són conjunts d'EDO per a més d'una funció de la mateixa variable independent x . Per exemple

$$\begin{aligned}y_1' + 2y_1y_2 &= \sin x, \\y_1y_2'' + 3y_2y_1' + x &= 0\end{aligned}\tag{10}$$

és un sistema d'EDO per a $y_1(x)$ i $y_2(x)$. L'ordre d'un sistema d'EDO és la suma dels ordres de les derivades màximes de les funcions que hi apareixen; en l'exemple anterior l'ordre és $1 + 2 = 3$.

La solució general d'un sistema d'EDO d'ordre n conté n constants arbitràries, que es poden determinar especificant un problema de Cauchy amb n condicions inicials per a les funcions i les seves derivades, repartides segons l'ordre de la màxima derivada de cada funció. En l'exemple (10),

com que y_1 hi apareix com a màxim amb derivada primera, cal donar $y_1(x_0)$,

com que y_2 hi surt com a màxim amb la derivada segona, cal donar $y_2(x_0)$ i $y_2'(x_0)$.

En tota aquesta presentació hem anomenat x la variable independent i $y(x)$ (amb subíndex en el cas de sistemes) la funció o funcions. Encara que aquesta és la notació que emprarem més, en poden aparèixer d'altres i, en particular, si la variable independent és el temps, s'acostuma a utilitzar punts sobre la variable per denotar les derivades, enlloc de ' al costat. Per exemple, la segona llei de Newton per a una partícula de massa m en una dimensió i subjecta a una força elàstica que obeeix la llei de Hooke és

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.\tag{11}$$

Això és una EDO d'ordre 2 per a la funció $x(t)$, amb variable independent t . En la notació que hem explicat, ho escriurem

$$m\ddot{x} = -kx.\tag{12}$$

Aquesta és, de fet, una EDO de la qual coneixem la solució general dels cursos de física (problema de l'oscil·lador harmònic):

$$x(t) = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t,\tag{13}$$

on

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\tag{14}$$

és la freqüència natural de l'oscil·lació.

Per obtenir una solució particular, cal especificar x i \dot{x} en un cert instant de temps t_0 . Escollint $t_0 = 0$ i demanant que $x(0) = x_0$ (la posició inicial), $\dot{x}(0) = v_0$ (la velocitat inicial), i emprant que

$$\dot{x}(t) = C_1\omega_n \cos \omega_n t - C_2\omega_n \sin \omega_n t,\tag{15}$$

s'obté

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2, \\v_0 &= \dot{x}(0) = C_1 \omega_n \cos 0 - C_2 \omega_n \sin 0 = C_1 \omega_n,\end{aligned}$$

d'on $C_1 = v_0/\omega_n$, $C_2 = x_0$ i la solució particular que correspon a les condicions inicials especificades és

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t. \quad (16)$$

2 EDO de variables separades

Aprendrem ara a calcular la solució general de les EDO més senzilles, les de variables separades. Per començar, considerem una EDO de la forma

$$y' = f(x), \quad (17)$$

on $f(x)$ és una funció donada. Es tracta aquí de calcular una funció $y(x)$ que doni $f(x)$ al derivar-la. Hem per tant de calcular la primitiva:

$$y(x) = \int f(x) dx + C, \quad (18)$$

on C és la constant d'integració que sabem, ara que hem parlat d'EDO, que es pot determinar imposant una condició inicial $y(x_0)$ per obtenir una solució particular. Per exemple, si tenim

$$y' = \sin x, \text{ amb } y(0) = 3,$$

la solució general és

$$y(x) = \int \sin x dx + C = -\cos x + C,$$

i la solució particular que satisfà $y(0) = 3$ s'obté de

$$3 = y(0) = -\cos 0 + C = -1 + C,$$

d'on $C = 4$ i llavors $y(x) = 4 - \cos x$.

De fet, l'equació del tipus (17) es pot generalitzar a una derivada d'ordre qualsevol, i la solució general s'obté integrant tantes vegades com l'ordre de l'EDO. Per exemple, donada l'EDO d'ordre 2

$$y'' = xe^x,$$

podem calcular $y'(x)$ integrant una vegada (s'ha de fer per parts; això ja ho sabeu fer):

$$y'(x) = \int xe^x dx + C_1 = xe^x - e^x + C_1,$$

i llavors $y(x)$ surt d'integrar de nou:

$$y(x) = \int (xe^x - e^x + C_1) dx + C_2 = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2.$$

Fixem-nos que la constant d'integració que ha aparegut en fer el primer pas apareix dins el signe integral del segon pas, i dóna el terme C_1x .

El problema de calcular la solució general de les EDO de primer ordre es complica quan el membre de la dreta és una funció tant de x com de y :

$$y' = F(x, y). \quad (19)$$

De fet, no hi ha cap tècnica general, excepte els mètodes numèrics, per solucionar totes les EDO de la forma (19). Una classe particular per a la qual sí que hi ha un mètode general és quan $F(x, y)$ és el quocient d'una funció de x i una de y :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}. \quad (20)$$

Aquestes EDO de primer ordre s'anomenen **EDO de variables separades** i el càlcul de la seva solució general es redueix a computar dues primitives, tal com veurem tot seguit.

En primer lloc, escrivim (20) com

$$g(y)y' = f(x),$$

i ara integrem els dos costats respecte a x

$$\int g(y)y' dx = \int f(x) dx \quad (\text{després posarem les constants d'integració}). \quad (21)$$

A la dreta tenim una integral respecte a x d'una funció de x , però a l'esquerra tenim una funció de y i estem integrant respecte a x . De fet, la solució que busquem és una funció $y(x)$ i, per tant, ho podem reescriure com

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int f(x) dx, \quad (22)$$

on ara ja està clar que estem integrant una funció de x . En aquesta integral de l'esquerra fem ara un canvi de variable de x a y :

$$x \rightarrow y = y(x), \quad dy = y'(x)dx, \quad (23)$$

i queda

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx. \quad (24)$$

Cada integral té una constant d'integració, i per tant hem d'escriure, de fet,

$$\int g(y) dy + C_1 = \int f(x) dx + C_2. \quad (25)$$

Passant totes les constants a una banda i posant $C = C_2 - C_1$ queda l'expressió final per a la solució general de (20):

<p>La solució general de</p> $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ <p>és</p> $\int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$

Per recordar aquest resultat, hom pot utilitzar el següent truc. En primer lloc escrivim y' com $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Ara “trenquem” la derivada en el seu numerador i el seu denominador, i passem tot el que té x a una banda i tot el que té y a l'altra:

$$g(y) dy = f(x) dx,$$

i finalment posem els signes d'integral i la constant d'integració:

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C. \quad (26)$$

En realitat, el trencament de la derivada no té sentit per si mateix, i és el canvi de variables que s'ha explicat el que permet demostrar que aquesta manipulació formal produeix el resultat correcte.

Com a primer exemple considerem la EDO no lineal

$$xy' = y^2. \quad (27)$$

Per posar-la en la forma general $y' = f(x)/g(y)$ escrivim

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y^2}},$$

i per tant veiem que

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(y) = \frac{1}{y^2},$$

i podem aplicar llavors (26). Alternativament, podem emprar el truc que hem descrit:

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow x dy = y^2 dx \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx + C.$$

Calculant les integrals obtenim

$$-\frac{1}{y} = \log |x| + C, \quad (28)$$

d'on podem aïllar y en funció de x :

$$y(x) = \frac{-1}{\log|x| + C}. \quad (29)$$

Aquesta és una solució general de l'EDO (27). Si ara volem calcular una solució particular, cal notar que no podem triar $x_0 = 0$, ja que el logaritme que apareix a (29) no està definit en aquest punt. De fet, no hi ha cap solució que passi per $x = 0$. Escollint qualsevol altre punt inicial, per exemple $x_0 = 1$, i imposant $y(1) = 1/2$, queda

$$\frac{1}{2} = y(1) = \frac{-1}{\log|1| + C} = -\frac{1}{C},$$

i per tant $C = -2$. La solució particular buscada és llavors

$$y(x) = \frac{-1}{\log|x| - 2} = \frac{1}{2 - \log|x|}.$$

Es pot demostrar que les solucions particulars de l'EDO (27) no creuen mai $x = 0$. Com que la nostra solució particular passa per $x_0 = 1$, la solució tindrà sempre $x > 0$, i podem treure el valor absolut:

$$y(x) = \frac{1}{2 - \log x}.$$

Com a segon exemple estudiarem

$$y(1 + 2x) + x(1 - y)y' = 0. \quad (30)$$

Efectuant la separació de variables queda

$$\int \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy + C$$

i, per tant, la solució general

$$\log|x| + 2x = y - \log|y| + C. \quad (31)$$

En aquesta solució general no és possible aïllar y en termes de x . Malgrat tot, és possible imposar una condició inicial. En efecte, si demanem $y(1) = e$ queda, posant $x = 1$ i $y = e$ a (31),

$$\log|1| + 2 = e - \log|e| + C,$$

d'on $C = 3 - e$ i queda la solució particular

$$\log|x| + 2x = y - \log|y| + 3 - e.$$

Si representem aquesta corba (això es pot fer amb la instrucció *implicitplot* de Maple), s'obté el resultat de la Figura 1. La corba resultant té tres components que, de fet, estan desconnectades. La

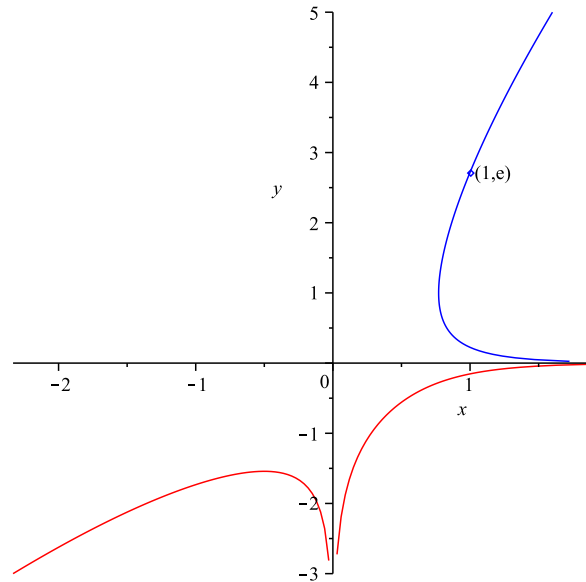


Figura 1: Gràfica de $\log|x| + 2x = y - \log|y| + 3 - e$.

component que passa pel punt $(1, e)$, en color blau, és la nostra solució particular i està continguda en el primer quadrant. Podem per tant treure els valors absoluts i queda el resultat final

$$\log x + 2x = y - \log y + 3 - e. \quad (32)$$

Com a darrer exemple d'EDO de variables separades, sigui

$$(x - 1)y' = yx. \quad (33)$$

Separant les variables obtenim

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x - 1} dx + C,$$

i, calculant les integrals,

$$\log|y| = x + \log|x - 1| + C.$$

Exponenciant els dos costats i tenint en compte les propietats de l'exponencial resulta la solució general

$$|y(x)| = e^C e^x |x - 1|.$$

El factor e^C és una constant positiva que anomenem \tilde{K} , i queda

$$|y(x)| = \tilde{K} e^x |x - 1|.$$

Si traiem els valors absoluts, poden aparèixer signes menys si qualsevol dels arguments dels valors absoluts són negatius:

$$y(x) = \pm \tilde{K} e^x (x - 1).$$

Resulta, però, que es pot veure que, seguint una solució, $x - 1$ canvia de signe si i sols si ho fa y . Per tant, per a una solució particular donada el signe és positiu o negatiu, però no pot canviar. Per tant podem escriure la forma final de la solució general com

$$y(x) = K e^x (x - 1) \quad (34)$$

on $K \neq 0$ té signe qualsevol. Si, per exemple, volem la solució particular que verifica $y(2) = -1$, ens queda

$$-1 = K e^2 (2 - 1)$$

d'on $K = -e^{-2}$ i obtenim

$$y(x) = -e^{-2} e^x (x - 1) = -e^{x-2} (x - 1). \quad (35)$$

3 Algunes EDO a l'enginyeria i la ciència

3.1 Mecànica

La segona llei de Newton per a una partícula de massa m ,

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}, \quad (36)$$

és una EDO de segon ordre en $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ (és per tant una EDO d'ordre 6). Per simplificar suposarem que estem en una dimensió i escriurem x en lloc de \vec{x} , de manera que ens queda

$$m \ddot{x} = F, \quad (37)$$

En general la força F pot dependre de la posició x , de la velocitat \dot{x} i del temps t . Els detalls d'aquesta dependència fan que l'EDO sigui d'un tipus o altre.

El cas més senzill i menys freqüent es dóna quan la força és sols una funció del temps, $F = F(t)$. Llavors la solució de la EDO es redueix a dues integracions successives, que poden ser més o menys complicades depenent de la complexitat de $F(t)$. En el cas particular en què F és constant, $F(t) = F_0$, hom té, integrant una vegada

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int F_0 dt = \frac{F_0}{m} t + C_1, \quad (38)$$

i, integrant de nou,

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (39)$$

Imposant que $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = v_0$ hom obté el conegut resultat

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m} t^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0, \quad (40)$$

on $a = F_0/m$ és l'acceleració, que és constant en aquest cas.

Quan F depèn de x o \dot{x} l'EDO resultant pot ser molt més complicada, i alguns casos els aprendrem a resoldre exactament, però en d'altres haurem d'emprar mètodes numèrics. Un cas força habitual es dona F representa l'acció d'una molla que obeeix la llei de Hooke, un fregament proporcional a la velocitat i una força externa sinusoidal:

$$F(x, \dot{x}, t) = -kx - \gamma \dot{x} + F_0 \sin \omega_0 t, \quad (41)$$

on k , γ , F_0 i ω_0 són constants positives. L'EDO que resulta,

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega_0 t, \quad (42)$$

és una lineal de segon ordre amb coeficients constants que aprendrem a resoldre en el següent tema.

Quan F no és funció de x , sinó sols de \dot{x} i t , l'EDO de segon ordre per a la posició es pot reduir a una de primer ordre per a la velocitat $v = \dot{x}$, i queda

$$m\dot{v} = F(v, t). \quad (43)$$

Si, a més, la força no depèn del temps, resulta una EDO de variables separades. Un cas molt senzill és el de fregament lineal que ja ha aparegut abans

$$m\dot{v} = -\gamma v. \quad (44)$$

L'aproximació que el fregament sigui proporcional a la velocitat deixa de ser vàlida en certes situacions, i llavors apareixen termes proporcionals al quadrat de la velocitat (aquest és el cas de la caiguda d'un objecte dins l'atmosfera). Llavors

$$m\dot{v} = -\gamma v - \kappa v^2 \approx -\kappa v^2, \quad (45)$$

on l'aproximació darrera és vàlida per a velocitats grans. Els dos tipus de fregament a (45) corresponen a físiques molt diferents i, per exemple, γ depèn de la viscositat del fluid en què es desenvolupa el moviment, mentre que κ no.

3.2 Teoria de circuits

Els elements d'un circuit elèctric imposen relacions entre el corrent i que els travessa i la diferència de voltatge v en els seus terminals.

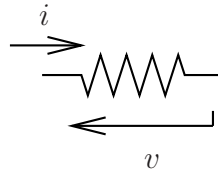


Figura 2: Resistor.

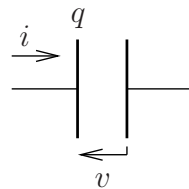


Figura 3: Condensador.

L'element més senzill és el resistor, que apareix a la Figura 2, i que estableix una relació algebraica entre v i i . En el cas lineal,

$$v = Ri, \quad (46)$$

amb $R > 0$. Hom pot tenir relacions més complicades però, per tenir dissipació i no generació, s'ha de respectar $vi \geq 0$.

Els condensadors estableixen la relació entre v i i indirectament, mitjançant una variable d'estat q , la càrrega del condensador. Això apareix representat a la Figura 3, on q és la càrrega del terminal del condensador on incideix el corrent i ; l'altre terminal té càrrega $-q$. La variació de q en el temps ve donada per i :

$$\dot{q} = i, \quad (47)$$

i v és una funció de q . En el cas lineal

$$v = \frac{q}{C}, \quad (48)$$

on $C > 0$ és la capacitat del condensador.

Els inductors, com el representat a la Figura 4, també estableixen una relació indirecta, però mitjançant el flux del camp d'inducció magnètica, ϕ , la variació temporal del qual ve donada pel voltatge:

$$\dot{\phi} = v. \quad (49)$$

El corrent és llavors una funció de ϕ , que en cas lineal es redueix a

$$i = \frac{\phi}{L}, \quad (50)$$

on $L > 0$ és l'autoinductància de l'inductor.

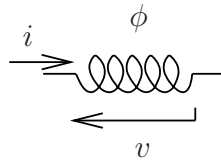


Figura 4: Inductor.

Cal notar que en tots els casos el voltatge es mesura com la diferència entre el terminal per on entra el corrent i el terminal per on surt; això es fa així per evitar l'aparició de signes negatius en les relacions presentades.

Hom pot combinar aquests elements, juntament amb d'altres com les fonts de voltatge o de corrent, i obtenir per exemple el circuit de la Figura 5. Les equacions imposades pels elements són, suposant-los lineals,

$$\dot{q} = i_C, \quad v_C = \frac{q}{C}, \quad (51)$$

$$\dot{\phi} = v_L, \quad i_L = \frac{\phi}{L}, \quad (52)$$

$$v_R = Ri_R, \quad (53)$$

i les lleis de Kirchoff imposen les següents relacions entre els voltatges i els corrents dels elements (incloent-hi la font de voltatge $v(t)$)

$$v(t) = v_C + v_L + v_R, \quad (54)$$

$$i_C = i_L = i_R. \quad (55)$$

Combinant les relacions dels elements amb les lleis de Kirchoff hom obté

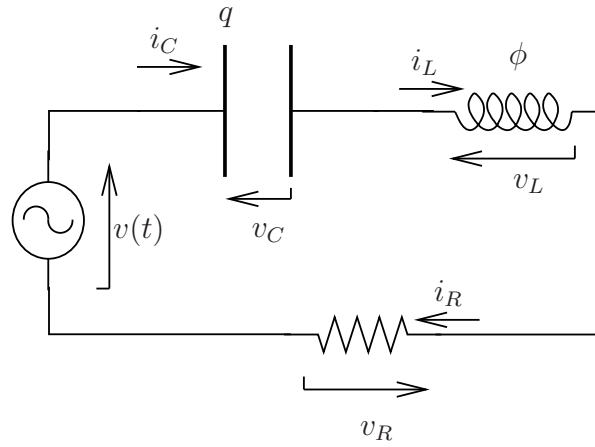
$$\dot{q} = i_C = i_L = \frac{1}{L}\dot{\phi} \quad (56)$$

i

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= v_L = v(t) - v_R - v_C = v(t) - Ri_R - \frac{q}{C} = v(t) - Ri_L - \frac{q}{C} \\ &= v(t) - \frac{R}{L}\dot{\phi} - \frac{1}{C}q, \end{aligned} \quad (57)$$

que constitueixen un parell d'EDO de primer ordre, lineals i amb els coeficients contants per a q i ϕ . Hom pot reduir això a una EDO de segon ordre per a una de les variables d'estat, per exemple q . Derivant (56) respecte al temps, emprant (57) i tornant a emprar (56) resulta

$$\ddot{q} = \frac{1}{L}\dot{\phi} = \frac{1}{L} \left(v(t) - \frac{R}{L}\dot{\phi} - \frac{1}{C}q \right) = \frac{1}{L}v(t) - \frac{R}{L}\dot{q} - \frac{1}{LC}q,$$

Figura 5: Circuit RCL amb una font de voltatge.

és a dir

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v(t), \quad (58)$$

que és formalment idèntica a (42) si s'aplica un voltatge sinusoidal $v(t) = V_0 \sin \omega_0 t$.

3.3 Models de població

Sota hipòtesis raonables, el ritme de creixement d'una població és proporcional al nombre $N(t)$ d'individus. Això correspon a una EDO per a $N(t)$ de la forma

$$\dot{N} = kN, \quad (59)$$

on $k > 0$ és una constant. Aquesta és una EDO de variables separades molt fàcil de solucionar i que apareix en altres contextos, com ara el creixement d'un capital degut als interessos. En el context de la dinàmica de poblacions, les solucions de (59) són funcions que prenen valors reals, mentre que el nombre d'individus és un nombre natural; hi ha aquí per tant una aproximació, que està justificada si N és prou gran.

L'equació (59) és molt simple, i no té en compte l'escassetat de recursos que poden posar-se de manifest quan la població creix molt. Un model més realista és

$$\dot{N} = kN - qN^2, \quad (60)$$

on $q > 0$. Si N és relativament petit, de manera que $k > qN$, la població creix, però quan N s'acosta a k/q el creixement es fa cada vegada més lent i la població no arriba mai a superar aquest valor, havent assolit el límit de suport vital del seu entorn.

El model de Lotka-Volterra representa la interacció entre dues espècies, amb poblacions x (les preses) i y (els depredadors). És un sistema no lineal donat per

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy,\end{aligned}$$

on α , β , γ i δ són paràmetres reals positius. La interpretació dels diferents termes és la següent:

- αx representa el creixement natural de la població de preses, que es suposa que tenen una font il·limitada d'aliments.
- $-\beta xy$ representa el decreixement de la població de preses degut a la seva interacció amb els depredadors, i es proporcional al producte de les dues poblacions (com més preses i més depredadors, més encontres entre les dues espècies, amb resultats fatídics per a les preses).
- $-\gamma y$ representa la dinàmica de la població de depredadors si no hi ha preses: els depredadors disminueixen a causa de la manca d'aliments.
- Finalment, δxy té en compte el creixement de la població de depredadors per les seves trobades amb les preses. El coeficients β i δ poden ser diferents perquè quan un depredador consumeix una presa es produeix una disminució immediata de x , però l'efecte sobre y és indirecte (en forma, per exemple, de més descendència). Si penseu que x , y representen les masses de les poblacions en lloc de les quantitats d'individus, llavors la diferència entre β i δ té la seva explicació en el fet que un kilogram d'aliment no es tradueix en un augment permanent de massa d'un kilogram.

3.4 Desintegració radioactiva

El nombre de desintegracions per unitat de temps d'un isòtop inestable sols depèn de la quantitat d'isòtops presents. Això proporciona una EDO molt semblant al model simple de població, però amb un canvi de signe, donat que ara la població d'isòtops inestables disminueix:

$$\dot{N} = -\lambda N, \tag{61}$$

amb $\lambda > 0$. L'invers de λ , $T = 1/\lambda$, representa la vida mitjana de l'isòtop, i pot prendre valors des de 50 ms per al radó-218 fins més de 6300 milions d'anys per l'urani-238, passant pels 200 dies per al poloni-210 o els 8033 anys del carboni-14. A les taules sobre radioactivitat s'acostuma a donar el període de semi-desintegració, $T_{\frac{1}{2}}$, que és el temps necessari perquè la quantitat de l'isòtop disminueixi fins a la meitat, i que està relacionada amb T per $T_{\frac{1}{2}} = T \log 2 < T$.

4 Mètodes numèrics

Hi ha moltes equacions diferencials per a les quals no és possible trobar una solució exacta, o solució en forma tancada. Per exemple, ningú no sap com trobar exactament la solució de

$$y'' + y^4 y' + \frac{y-1}{y^2+1} = \frac{1}{1+x}. \quad (62)$$

A la pràctica, però, sempre n'hi ha prou amb poder calcular la solució amb una certa aproximació, és a dir, amb un cert error, i saber que, si convé, es pot fer l'error més petit treballant una mica més. Això és el que fan els mètodes d'expansió en sèrie i els mètodes numèrics. Dels primers no en parlarem, ja que el seu contingut teòric ultrapassa l'abast del curs i, de fet, la seva aplicabilitat és, a la pràctica, restringida. El que veurem aquí serà una introducció als mètodes numèrics, que són els que s'utilitzen per resoldre les EDO força complexes que apareixen en tots els àmbits de la tècnica i la ciència quan es consideren els problemes que van més enllà dels models força simplificats que hem vist fins ara. Val a dir, però, que els mètodes numèrics que veurem, bàsicament el mètode d'Euler, són molt elementals, poc eficients i poc econòmics des del punt de vista computacional. A la sessió de laboratori veurem com utilitzar alguns mètodes molt més potents, disponibles en forma de rutines altament optimitzades, i que són els que s'usen industrialment.

Els mètodes numèrics per resoldre EDO tenen tots dues característiques que s'han de tenir en compte:

- sols permeten trobar solucions particulars. Cal donar, per tant, un conjunt complet de condicions inicials.
- necessiten que l'EDO o conjunt d'EDO que se'ls passa siguin totes de primer ordre.

4.1 El mètode d'Euler

Comencem per l'EDO de primer ordre amb condició inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (63)$$

La solució d'aquesta EDO és una corba $y = y(x)$ que a cada punt (x, y) del pla té un pendent $f(x, y)$, tal com mostra la Figura 6.

Podem construir aproximadament aquesta corba començant en el punt (x_0, y_0) , donat per la condició inicial, i dibuixant una recta que hi passi amb pendent $f(x_0, y_0)$ (Figura 7).

Volem calcular $y(x_1)$, amb $x_1 = x_0 + h$. Com que no coneixem la solució $y(x)$, l'aproximem per la seva recta tangent en el punt x_0 :

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (64)$$

El fet important és que, encara que no coneixem $y(x)$, sí que podem calcular la seva derivada en el punt (x_0) , ja que, segons (63),

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0). \quad (65)$$

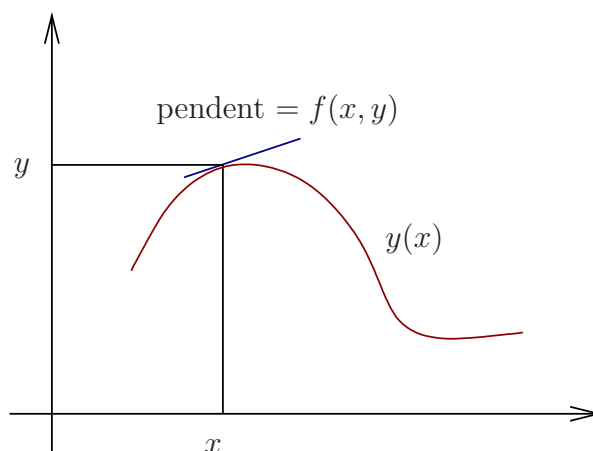


Figura 6: Interpretació de la solució $y(x)$ de $y' = f(x, y)$.

Per tant

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (66)$$

Fixem-nos (Figura 7) que, en general, $y(x_1) \neq y_1$, i que com més lluny estigui $x_1 = x_0 + h$ de x_0 , és a dir, com més gran sigui h , menys acurat serà substituir $y(x_1)$ per y_1 . El que es pot fer, si es vol anar més lluny de x_0 , és repetir el procediment partint del valor x_1 (exacte), i el valor aproximat y_1 , emprant una recta amb pendent igual a $f(x_1, y_1)$, tal com mostra la Figura 8. Fixem-nos que aquesta no és la recta tangent a la solució en el punt x_1 , ja que

- passa per (x_1, y_1) en lloc de $(x_1, y(x_1))$,
- té pendent $f(x_1, y_1)$, en lloc de pendent $f(x_1, y(x_1))$,

però ens hem de conformar amb això, ja que no coneixem $y(x)$ i no podem calcular per tant $y(x_1)$. La idea, però, és que si y_1 no és molt diferent de $y(x_1)$, les dues rectes no diferiran tampoc massa. Tenim que

$$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + y'(x_1)(x_2 - x_1) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad (67)$$

on el segon \approx és degut al fet que aproximem $y'(x_1) = f(x_1, y(x_1))$ per $f(x_1, y_1)$. Fixem-nos que l'error en aquest càlcul és, en general, menor que l'error si haguéssim aproximat y_2 mitjançant la recta tangent en el punt original (x_0, y_0) , ja que hem corregit el valor del pendent.

Aquest procediment es pot generalitzar per anar cada vegada més lluny de x_0 , i s'obté el *mètode d'Euler*:

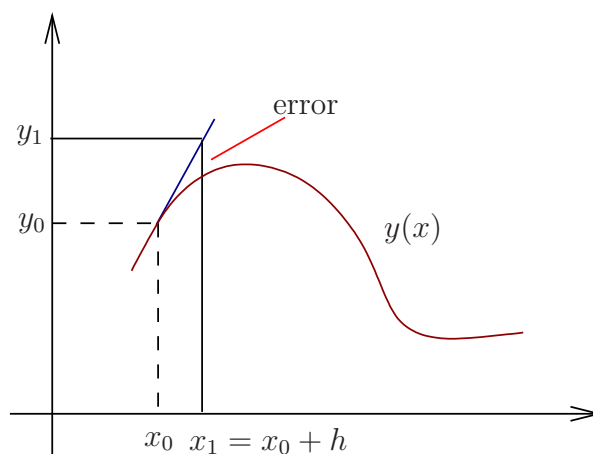


Figura 7: Construcció aproximada de la solució $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ al voltant de la condició inicial.

Mètode d'Euler. Fixat $h \neq 0$, és possible obtenir aproximacions de la solució $y(x)$ del problema de valors inicials (63), en els punts x_1, x_2, \dots, x_n , on

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mitjançant el mètode recurrent

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si hom vol obtenir la solució aproximada en punts de l'interval $[x_0, x_f]$, el millor és decidir a quants punts n es vol la solució i escollir llavors

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}. \quad (68)$$

En principi, amb x_0 i x_f fixats, com més gran sigui n , i per tant més petit h , menor serà l'error de la solució calculada pel mètode d'Euler. Fixem-nos que x_f pot estar a l'esquerra de x_0 , i llavors $h < 0$.

Sigui per exemple l'EDO

$$y' = \frac{\sin x}{y^2 + x}, \quad y(0) = 1. \quad (69)$$

Tenim $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ i, si volem calcular la solució a $[0, 10]$, posem $x_f = 10$. Escollim primer $n = 20$, de manera que

$$h = \frac{10 - 0}{20} = 0.5.$$

La Taula 1 mostra els resultats del mètode, i a la Figura 9 hi ha, en color **vermell** i enllaçats per segments, els corresponents punts. Cal notar que en $x = 0.5$ el valor de y no ha canviat respecte

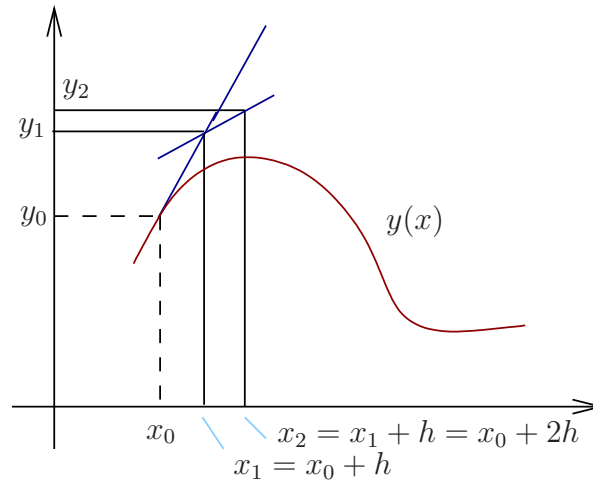


Figura 8: Extensió de la construcció aproximada de la solució més enllà de x_1 .

i	0	1	2	3	4	5	...	18	19	20
x_i	0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	...	9.0000	9.5000	10.0000
y_i	1.0000	1.0000	1.1598	1.3392	1.4906	1.5983	...	1.5699	1.5878	1.5847

Taula 1: Solució de (69) pel mètode d'Euler en $[0, 10]$ amb 20 punts.

a l'inicial. Això és degut a que en el primer pas del mètode d'Euler per al nostre problema es té $x_0 = 0$ i la derivada $y' = f(x, y)$ val zero en aquest punt:

$$y_1 = y_0 + 0.5 \frac{\sin 0}{y_0^2 + 0} = y_0 + 0 = y_0.$$

A la Figura 9 també hi apareixen representats, en **verd**, el resultat del mètode d'Euler per al mateix problema amb $n = 100$ i, com a referència, la solució "exacta", calculada, de fet, amb un mètode numèric molt més precís i eficient, en **blau**. Veiem per tant que a l'augmentar el nombre de punts del mètode d'Euler l'error disminueix, encara que el cost computacional és considerable.

El mètode d'Euler es pot utilitzar per a un nombre arbitrari d'EDO de primer ordre. Per exemple, si tenim el sistema

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \end{aligned} \quad (70)$$

amb condicions inicials $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$, els valors que s'han de calcular de forma recurrent

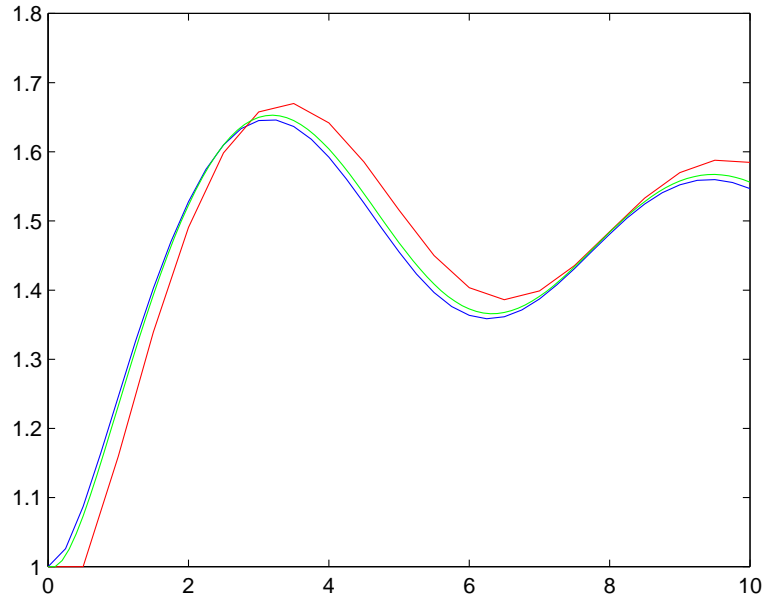


Figura 9: Solució de (69) pel mètode d'Euler en $[0, 10]$ amb 20 punts (vermell) i amb 100 punts (verd), i la solució exacta (blau).

són

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + h, & i = 1, 2, \dots, n, \\y_i &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), & i = 1, 2, \dots, n, \\z_i &= z_{i-1} + hg(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), & i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{71}$$

Com hem dit, tots els mètodes numèrics per a EDO treballen amb EDO de primer ordre. Si en tenim una d'ordre superior l'hem de reescriure com un conjunt d'EDO d'ordre 1. Per exemple, sigui la segona llei de Newton en una dimensió amb força arbitrària:

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.\tag{72}$$

Considerant la velocitat $v(t) = \dot{x}(t)$ com a nova variable dependent, a més de $x(t)$, tindrem

$$\dot{x} = v,\tag{73}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}F(t, x, v).\tag{74}$$

El mètode d'Euler per a (73), (74) calcula llavors

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i &= x_{i-1} + hv_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ v_i &= v_{i-1} + h \frac{1}{m} F(t_{i-1}, x_{i-1}, v_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (75)$$

4.2 Altres mètodes

En principi, el mètode d'Euler permet, agafant h cada vegada més petit, aproximar tan bé com es vulgui la solució d'una EDO. Hi ha, però, com a mínim, un parell de problemes amagats:

Eficiència. Si l'EDO no col·labora, cal posar valors realment petits de h i, per tant, grans de n , per obtenir un error raonable. Això suposa un cost de temps que, depenent de les circumstàncies i les especificacions, pot ser prohibitiu.

Error. Associat al fet d'haver de fer moltes operacions si n és gran, hi ha el problema de l'*error d'arrodoniment*. Els nombres reals no poden representar-se exactament en un ordinador, i s'han d'arrodonir. Això vol dir que, cada vegada que es fa una operació, és possible que es perdin dígit del resultat, i, en principi, com més operacions més informació es va perdent. A més, el mètode d'Euler, fins i tot amb una hipotètica representació exacta dels reals, introdueix per ell mateix un error, que s'anomena *error de truncament*. Els dos tipus d'error es barregen i, de fet, l'error total es pot amplificar.

La principal conclusió que s'extreu d'aquestes consideracions és que és força interessant intentar obtenir mètodes millors que els d'Euler, que requereixin menys passos, per tal de millorar l'eficiència computacional i de controlar els efectes de l'error d'arrodoniment.

Per veure com això es pot fer, comencem analitzant l'error del mètode d'Euler. Recordem el teorema del polinomi de Taylor:

Fórmula de Taylor. Si una funció y és derivable $m + 1$ vegades al voltant d'un punt x , llavors, per a qualsevol h (prou petit en valor absolut) existeix un valor c entre x i $x + h$ tal que

$$y(x + h) = \underbrace{y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(m)}(x)}{m!}h^m}_{\text{polinomi de Taylor d'ordre } m} + \underbrace{\frac{y^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}h^{m+1}}_{\text{error}}.$$

El valor c és desconegut i, per a x fixat, depèn de h . Per tant no podem calcular l'error de l'aproximació de $y(x + h)$ pel polinomi de Taylor d'ordre m ; si el coneguéssim tindríem una manera exacta de calcular $y(x + h)$. Malgrat tot, si per a m prou gran la derivada $y^{(m+1)}$ no creix massa, l'error del polinomi de Taylor d'ordre m és petit.

Els dos primers termes del polinomi de Taylor proporcionen el mètode d'Euler

$$y(x+h) \approx y_{\text{Euler}}(x+h) = y(x) + y'(x)h = y(x) + f(x, y(x))h. \quad (76)$$

Però, per la fórmula de Taylor amb $m = 1$, tenim que l'error comès en passar de $y(x+h)$ a $y_{\text{Euler}}(x+h)$ és

$$\frac{y''(c)}{2}h^2 = K(c)h^2.$$

Per tant l'error en un pas és proporcional a h^2 . En una primera anàlisi, l'error total per anar de x_0 a x_f en n passos del mètode d'Euler serà

$$\begin{aligned} K(c_1)h^2 + K(c_2)h^2 + \dots + K(c_n)h^2 &= (K(c_1) + K(c_2) + \dots + K(c_n))h^2 \\ &= nKh^2 = \frac{x_f - x_0}{h}Kh^2 = \tilde{K}h \end{aligned}$$

on K és la mitjana dels $K(c_i)$ i $\tilde{K} = (x_f - x_0)K$. Per tant l'error total d'aplicar el mètode d'Euler és proporcional al pas h . En realitat, la situació és més complicada, ja que a cada pas, excepte el primer, es parteix de valors de y que ja són erronis. Malgrat tot, una anàlisi més acurada, emprant les tècniques de l'anàlisi numèrica, dona que l'error total segueix sent proporcional a h .

L'error de cada pas del mètode d'Euler ve donat pel fet que tallem el polinomi de Taylor en $m = 1$. Hom pot pensar que si aproximem la solució per un polinomi de grau més gran que 1 obtindrem un error menor. Això és efectivament així i hom pot obtenir mètodes cada vegada més precisos per al mateix valor de h .

Mètode d'Euler millorat. Fixat $h \neq 0$, és possible obtenir aproximacions de la solució $y(x)$ del problema de valors inicials (63), en els punts x_1, x_2, \dots, x_n , on

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mitjançant el mètode recurrent

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{2}q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

on

$$\begin{aligned} p_i &= f(x_{i-1}, y_{i-1})h, \\ q_i &= f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + p_i)h. \end{aligned}$$

L'error global del mètode és de l'ordre de h^2 .

Fixem-nos que l'error millora, respecte al mètode d'Euler, en un ordre de magnitud: per exemple, amb $h = 0.1$ passa de ser de l'ordre de 0.1 a 0.01. Aquesta reducció de l'error és a canvi d'avaluar dues vegades la funció f a cada pas, en lloc d'una vegada per al mètode d'Euler, però el guany és manifest (a menys que sigui molt complicat avaluar f , cosa que pot passar en casos especials).

Mètode de Runge-Kutta de quart ordre. Fixat $h \neq 0$, és possible obtenir aproximacions de la solució $y(x)$ del problema de valors inicials (63), en els punts x_1, x_2, \dots, x_n , on

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mitjançant el mètode recurrent

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(p_i + 2q_i + 2r_i + s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

on

$$\begin{aligned} p_i &= f(x_{i-1}, y_{i-1})h, \\ q_i &= f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}p_i\right)h, \\ r_i &= f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}q_i\right)h, \\ s_i &= f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + r_i)h. \end{aligned}$$

L'error global del mètode és de l'ordre de h^4 .

La millora és de 2 ordres de magnitud respecte al mètode d'Euler millorat i de 3 respecte al mètode d'Euler, i el preu és que s'ha d'avaluar 4 vegades el membre dret de l'EDO a cada pas.

A més d'aquests mètodes, i d'altres d'ordre superior, hi ha altres vies de millora dels algorismes de càlcul numèric de solucions d'EDO:

- **Mètodes de pas variable.** L'error local de cada mètode és proporcional a una certa potència de h , però està multiplicat per un valor que depèn de derivades de la solució (i per tant de $f(x, y)$ i de les seves derivades) en punts desconeguts. Si aquestes derivades són petites (a causa, per exemple, de que $f(x, y)$ varia poc en una certa regió dels seus arguments), el factor que multiplica la potència de h pot ser molt petit i és possible augmentar h en un cert pas donat sense augmentar massa l'error. Com que les derivades esmentades poden anar canviant a mesura que construïm la solució, pot ser que a cada pas es pugui augmentar h o que s'hagi de disminuir per tal de mantenir l'error per sota d'un valor prefixat, i d'aquí el nom d'aquests mètodes. Així, hi ha mètodes d'Euler de pas variable, mètodes de Runge-Kutta de pas variable, etc.
- **Mètodes multi-pas.** Aquests són mètodes que requereixen conèixer la solució (o aproximacions de la solució) en més d'un punt per calcular-la en el punt següent. Generalment requereixen utilitzar mètodes auxiliars per calcular zeros de certes funcions que apareixen en l'algorisme, i per tant el seu cost computacional és molt elevat a cada pas. Són, però, molt efectius, i permeten obtenir la solució amb molt poc error amb valors de h relativament grans. Alguns dels mètodes més populars en aquesta categoria són el *mètode d'Adams-Bashforth*,

el mètode d'Adams-Moulton i el mètode BDF (*backward differentiation formula*). Com que aquests mètodes requereixen més d'un valor per calcular el següent, s'han de posar en marxa amb un mètode d'un sol pas (potser combinat en el següent pas amb un mètode de dos passos i així successivament). Alguns dels mètodes multi-pas són especialment efectius per a les EDO anomenades rígides (*stiff*), per a les quals els mètodes del tipus Runge-Kutta donen errors considerables per més petit que es faci h o, en el cas de pas variable, van disminuint h fins a tal punt que no s'arriba al valor final.

En les sessions de laboratori utilitzarem un mètode de la família dels Runge-Kutta. És un mètode de pas variable que, en la implementació del programari MATLAB que utilitzarem, s'anomena `ode45`.

EQUACIONS DIFERENCIALS - ENGINYERIA INDUSTRIAL - EPSEVG

Tema 2 - Transformada de Laplace

CARLES BATLLE ARNAU

Departament de Matemàtica Aplicada 4
i
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Universitat Politècnica de Catalunya
EPSEVG, Av. V. Balaguer s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú

Gener 2012

Copyright 2012 Carles Batlle (carles.batlle@upc.edu)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 License. A copy of the license can be found at <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

Índex

1	La transformada de Laplace: motivació i definició	3
2	Propietats fonamentals de la transformada de Laplace	7
3	Altres propietats de la transformada de Laplace	10
4	Solució d'EDO lineals amb coeficients constants	14
5	La funció de Heaviside	17
6	Solució de sistemes lineals per transformada de Laplace	22
A	Taules de transformades i propietats	26

1 La transformada de Laplace: motivació i definició

La transformada de Laplace és un mètode alternatiu per a la resolució d'equacions diferencials lineals amb coeficients constants. La seva importància està en que converteix equacions diferencials en equacions lineals algebraiques. Aquestes darreres equacions es poden solucionar fàcilment i el resultat s'antitransforma per obtenir la solució de l'EDO original.

Per veure més clarament el procés global, podem establir una analogia amb l'ús del logaritme per calcular productes. Si A i B són reals positius i volem calcular

$$X = AB$$

primer podem prendre el logaritme i utilitzar-ne les propietats:

$$\log AB = \log A + \log B.$$

L'operació de suma és més econòmica que el producte original. Si anomenem C el resultat de la suma

$$C = \log A + \log B,$$

podem recuperar el producte buscat amb l'antilogaritme, és a dir, l'exponencial:

$$X = e^C.$$

L'avantatge d'emprar aquest camí més llarg és, com hem dit, l'economia de la suma respecte al producte, i el fet que el logaritme i l'exponencial són operacions que es poden fer consultant les taules corresponents. Amb els mètodes electrònics de càlcul de què disposem avui en dia tot això pot semblar irrellevant, però va ser molt important fins a mitjans del segle XX.

Si $f(t)$ és una funció definida per a $t > 0$, la **transformada de Laplace** de $f(t)$ és la funció $F(s)$, que també escriurem com $\mathcal{L}\{f\}(s)$, definida per la integral impròpia

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

Algunes vegades, sobretot quan treballem amb funcions concretes, escriurem també $\mathcal{L}\{f(t)\}$, i ja es sobreentén que el resultat és una funció de s .

Aquesta definició de la transformada de Laplace és la més habitual, i s'anomena també **transformada de Laplace unilateral**, en contrast amb la **transformada de Laplace bilateral**, que té la integral de $-\infty$ a $+\infty$. La definició adoptada és la més útil per al que volem fer. Encara que no ho considerarem en aquest curs, si la funció que volem transformar té un impuls infinit en $t = 0$, llavors cal modificar lleugerament la definició (1); podeu consultar[BMZ] per a més detalls.

Fixem-nos que la transformada de Laplace pren una funció de t i retorna una funció de s (o de les variables que s'utilitzin en cada cas tant per la funció inicial com per la transformada). Com que la variable t acostuma a ser el temps, es diu que la funció $f(t)$ viu en el **domini temporal**, mentre que $F(s)$ pertany al **domini transformat** o **frequencial**.

Com que (1) és una integral impròpia, pot existir per a certs valors de s i no per a altres, i fins i tot pot ser que no existeixi per a cap valor de s . Recordem que les integrals impròpies sobre regions no fitades com ara $(0, +\infty)$ es defineixen mitjançant un límit de la integral en $(0, A)$ quan $A \rightarrow +\infty$. Per tant

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

Sigui per exemple $f(t) = t$. Tindrem, suposant $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t e^{-ts} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} t e^{-ts} - \frac{1}{s^2} e^{-ts} \right) \Big|_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} A e^{-As} - \frac{1}{s^2} e^{-As} + \frac{1}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Els diversos termes que apareixen en el límit són

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} A e^{-As} &= \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ +\infty e^{+\infty} = +\infty & \text{si } s < 0. \end{cases} \\ \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-As} &= \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ e^{+\infty} = +\infty & \text{si } s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $s = 0$, la integral és

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t e^{-0 \cdot t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A t dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^2}{2},$$

que no existeix. Tenint tot això en compte, el límit sols està definit per a $s > 0$ i llavors val $1/s^2$. Per tant

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Donarem un resultat que ens dirà quan podem assegurar que la transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ existeix, al menys per a valors de s prou grans, sense haver de fer el càlcul. Ens caldran primer un parell de conceptes sobre el comportament de les funcions.

Diem que una funció és **contínua a trossos** en $[0, +\infty)$ si és contínua en $[0, +\infty)$ o si, en qualsevol interval fitat, té com a màxim un nombre finit de discontinuïtats de salt; no pot haver-hi, per tant, discontinuïtats asimptòtiques o essencials. L'exemple paradigmàtic de funció que és contínua a trossos sense ser contínua és el senyal de pols quadrat (o rectangular) que apareix a la Figura 1.

Diem que una funció $f(t)$ és d'**ordre exponencial** α si existeixen constants $M > 0$ i $T > 0$ tals que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \text{si } t > T. \quad (3)$$

En altres paraules, una funció és d'ordre exponencial si, a partir d'un cert moment, la seva grandària és menor que el d'alguna exponencial. Cal remarcar que no cal que ho sigui sempre, sinó sols per als valors de t més grans que T . Per exemple:

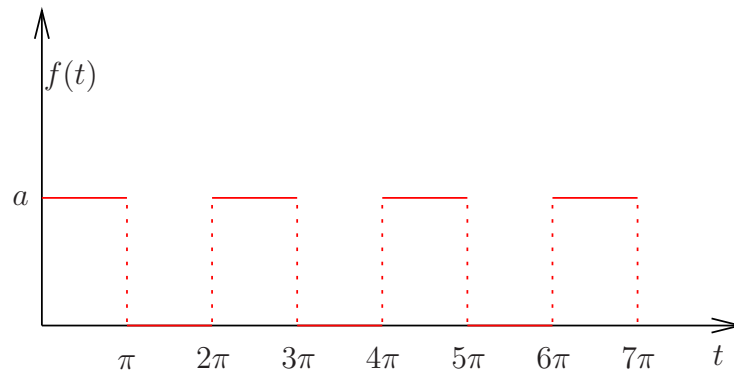


Figura 1: Un senyal de pols quadrat. A qualsevol interval (A, B) té un nombre finit de discontinuïtats de salt, encara que a $[0, +\infty)$ en té infinites.

- $f(t) = 1$ és d'ordre exponencial 0, ja que $1 \leq 2 = 2e^{0 \cdot t}$, per a tot t .
- $f(t) = \cos t$ és d'ordre exponencial 0, ja que $|\cos t| \leq 2e^{0 \cdot t}$, per a tot t .
- $f(t) = 5 - t^2$ és d'ordre exponencial α per a qualsevol $\alpha > 0$, ja que la gràfica de $e^{\alpha t}$ acaba depassant la de $|5 - t^2|$.
- $f(t) = e^{3t}$ és d'ordre exponencial α per a qualsevol $\alpha > 3$, ja que la gràfica de $e^{\alpha t}$ amb $\alpha > 3$ acaba passant per sobre de la de e^{3t} .
- $f(t) = e^{-t}$ és d'ordre exponencial α per a qualsevol $\alpha > -1$, per les mateixes raons que abans.
- $f(t) = e^{t^2}$ **no** és d'ordre exponencial: no hi ha cap α ni $M > 0$ tal que $Me^{\alpha t}$ estigui per sobre de e^{t^2} per a t prou gran.
- $f(t) = e^{-t^2}$ és d'ordre exponencial α per a qualsevol α . Com que $f(t)$ tendeix a zero quan $t \rightarrow \infty$, la seva gràfica està per sota de la de qualsevol exponencial (fins i tot negatives, donat que e^{-t^2} decau més de pressa que qualsevol exponencial).

Podem ara enunciar el resultat que garanteix l'existència de la transformada de Laplace:

Si $f(t)$ és d'ordre exponencial α i contínua a trossos en $[0, +\infty)$, llavors $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ existeix per a tot $s > \alpha$.

A les funcions que verifiquen aquestes dues condicions (ordre exponencial i contínua a trossos) les anomenarem **funcions admissibles**.

Això dóna condicions suficients per a que existeixi la transformada de Laplace per a valors prou grans de s . La condició de ser contínua a trossos garanteix l'existència de la integral sobre

cada $(0, A)$, mentre que el ser d'ordre exponencial garanteix que, al multiplicar per e^{-st} amb s prou gran, el producte resultant decau prou de pressa per a que existeixi la integral impròpia.

Totes les funcions d'interès en les aplicacions satisfan aquestes condicions, i per tant a partir d'ara assumirem que la transformada de Laplace d'una funció existeix, al menys per a valors de s prou grans. De tota manera, hi ha funcions que no tenen transformada de Laplace, algunes perquè creixen massa de pressa i d'altres perquè tenen discontinuïtats en $[0, +\infty)$ que no són de salt:

- $f(t) = e^{t^2}$. No és d'ordre exponencial i es pot demostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt$$

no existeix per a cap valor d' s .

- $f(t) = 1/t$. És d'ordre exponencial però té una discontinuïtat asimptòtica en $t = 0$. Es pot demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-st} dt$$

no existeix per a cap valor d' s , degut a l'asíptota quan $t \rightarrow 0^+$.

En canvi, $f(t) = 1/\sqrt{t}$ sí que té transformada de Laplace, malgrat no complir les condicions, degut a que la seva excursió cap a $+\infty$ en $t = 0^+$ és menys pronunciada. Les condició d'admissibilitat és per tant suficient però no necessària. Malgrat això, en aquest curs sols considerarem funcions admissibles.

Si $F(s)$ és la transformada de $f(t)$, direm que $f(t)$ és l'antitransformada de $F(s)$, i ho escriurem com

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t). \quad (4)$$

Donada una funció $F(s)$, hi ha moltes funcions $f(t)$ que transformades donen $F(s)$, però sols ni pot haver-hi una que sigui contínua per a tot $t \in [0, +\infty)$ i aquesta és la que anomenem de fet l'antitransformada. Si no hi ha cap $f(t)$ contínua tal que la seva transformada sigui $F(s)$, s'en agafa una que sigui contínua a trossos com a antitransformada.

Hi ha una fórmula que permet calcular $f(t)$ donada $F(s)$, però utilitza la teoria d'integració de funcions de variable complexa. El mètode habitual per computar $f(t)$ a partir de $F(s)$ és consultar una taula de parelles $(f(t), F(s))$, i utilitzar les propietats que anirem desenvolupant.

Cada transformada de Laplace existeix per valors de s més grans que un de donat. Aquesta informació no la utilitzarem, però, directament, encara que en molts dels càlculs està implícit que $F(s)$ existeix per a valors prou grans de s . Aquesta informació sí que és, però, rellevant si es vol calcular l'antitransformada pels mètodes de variable complexa (vegeu [SK]).

La Taula 1 mostra algunes de les transformades de Laplace més simples, i pot utilitzar-se per tant per calcular també antitransformades.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}, s > \alpha$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}, s > 0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}, s > 0$

Taula 1: Transformades de Laplace de les funcions més simples, i valors de s per als que existeixen.

Com a exemple de càlcul d'una de les transformades de la Taula 1, sigui $f(t) = e^{\alpha t}$. Tindrem que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \right|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s-\alpha} (e^{-(s-\alpha)A} - 1) \right). \end{aligned}$$

El límit existeix sols quan $s - \alpha > 0$, que és quan l'exponencial va a zero, i llavors queda $1/(s - \alpha)$, que és el resultat de la taula.

2 Propietats fonamentals de la transformada de Laplace

Veurem tot seguit una sèrie de propietats de la transformada de Laplace que permeten calcular noves transformades i antitransformades a partir d'altres conegudes, i que a més permeten convertir la solució d'EDO lineals de coeficients constants en un problema purament algebraic.

P0 Límit quan $s \rightarrow +\infty$

Si $f(t)$ és una funció admissible amb transformada $F(s)$ llavors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0. \quad (5)$$

Demostració. Pel teorema del valor absolut de la integral, tindrem

$$|F(s)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-st} dt.$$

Com que $f(t)$ és admissible, existeixen α i $M > 0$ tals que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, i per tant

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \int_0^{+\infty} Me^{\alpha t} e^{-st} dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{-M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{M}{s-\alpha} \left(1 - \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-(s-\alpha)A} \right). \end{aligned}$$

Com que $F(s)$ està definit sols per a $s > \alpha$, el límit quan $A \rightarrow +\infty$ dona zero, i queda

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s-\alpha}.$$

Fent ara $s \rightarrow +\infty$ resulta

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |F(s)| \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0,$$

i com que $|F(s)| \geq 0$, queda $0 \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} |F(s)| \leq 0$, i d'aquí surt el resultat enunciat. \square

Aquesta propietat permet dir, per exemple, que $F(s) = 1$ o $F(s) = s$ no són la transformada de Laplace de cap funció admissible. Encara que no ho veurem en aquest curs, hi ha senyals $f(t)$ que no són funcions admissibles però que s'utilitzen per representar de manera compacta senyals corresponents a impulsos; per a aquests senyals la propietat P0 no és aplicable i poden tenir transformades tals que $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) \neq 0$. Per exemple, la **delta de Dirac**, $f(t) = \delta(t)$, té transformada $F(s) = 1$. Consulteu [BMZ] per a més detalls.

P1 Linealitat

Si $f(t)$ i $g(t)$ són dues funcions admissibles amb transformades respectives $F(s)$ i $G(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = aF(s) + bG(s), \quad (6)$$

amb a i b constants arbitràries.

Demostració. El resultat es basa en la linealitat de la integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af + bg\}(s) &= \int_0^{+\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt \\ &= a \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt = aF(s) + bG(s). \end{aligned}$$

\square

La linealitat permet, per exemple, calcular la transformada del sinus hiperbòlic

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}. \quad (7)$$

En efecte, emprant P1,

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\},$$

i usant la tercera entrada de la Taula 1 amb $\alpha = a$ i amb $\alpha = -a$,

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}. \quad (8)$$

Com que hem emprat una transformada que és vàlida si $s > a$ i una que ho és quan $s > -a$, el resultat obtingut es vàlid quan $s > |a|$.

P2 Derivada

Si $f(t)$ i la seva derivada $f'(t)$ són dues funcions admissibles, i la transformada de $f(t)$ és $F(s)$, llavors la transformada de $f'(t)$ és

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0). \quad (9)$$

Demostració. Integrant per parts, hom té

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-se^{-st}) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)e^{-sA} - f(0) + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = 0 - f(0) + sF(s), \end{aligned}$$

on hem utilitzat que, per ser $f(t)$ admissible, $f(A)e^{-sA}$ tendeix a zero quan $A \rightarrow +\infty$ per a s prou gran. \square

Combinant això amb la linealitat i el fet que la transformada de Laplace de $f(t) = t$ és $1/s^2$, podem calcular la transformada de $g(t) = t^2$, ja que $g'(t) = 2t = 2f(t)$. En efecte, per la linealitat

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{2f(t)\} = 2\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\frac{1}{s^2}.$$

D'altra banda, per la propietat de la derivada,

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\} - 0 = s\mathcal{L}\{t^2\}.$$

Comparant ambdues expressions surt

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad (10)$$

que és la segona entrada de la Taula 1 per a $n = 2$.

Una altra aplicació més directe de la propietat de derivació permet calcular, per exemple, la transformada del sinus a partir de la del cosinus. En efecte,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \beta t\} &= -\frac{1}{\beta}\mathcal{L}\{(\cos \beta t)'\} = -\frac{1}{\beta} \left(s \frac{s}{s^2 + \beta^2} - \cos 0 \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{s^2}{s^2 + \beta^2} \right) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

P3 Derivada segona

Si $f(t)$, $f'(t)$ i $f''(t)$ són funcions admissibles i la transformada de $f(t)$ és $F(s)$, llavors la transformada de $f''(t)$ és

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0). \quad (11)$$

Demostració. Aplicant P2 dues vegades es té

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s \mathcal{L}\{f'\}(s) - f'(0) = s (s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).$$

□

Aquesta propietat permet, per exemple, trobar la transformada del cosinus directament. Com que $(\cos \beta t)'' = -\beta^2 \cos \beta t$, tindrem, per la linealitat,

$$\mathcal{L}\{(\cos \beta t)''\} = \mathcal{L}\{-\beta^2 \cos \beta t\} = -\beta^2 \mathcal{L}\{\cos \beta t\},$$

i, emprant P3,

$$\mathcal{L}\{(\cos \beta t)''\} = s^2 \mathcal{L}\{\cos \beta t\} - s \cos(0) - (-\sin 0) = s^2 \mathcal{L}\{\cos \beta t\} - s.$$

Igualant ambdues expressions s'obté el resultat de la Taula 1.

Les propietats P2 i P3 es poden generalitzar a derivades d'ordre arbitrari. Sota les condicions corresponents, hom té que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (12)$$

Aquestes propietats indiquen que la derivació en t es converteix en multiplicació per s (a més dels termes amb els valors inicials) per a la transformada. Aquesta és una de les coses importants que cal recordar:

En el domini de les funcions transformades, derivar respecte a t vol dir multiplicar per s .

A les propietats P2 i P3 hi apareixen els valors de f i f' en el zero. Una anàlisi més detallada (vegeu [BMZ]) mostra que s'està suposant que aquestes funcions són contínues a l'origen; en el cas que no ho siguin, com és el cas de la funció esglaió amb un salt en $t = 0$, s'entén que els valors que s'han de posar són els corresponents límits per la dreta. Si la definició de la transformada de Laplace s'ha de modificar per encabir les funcions amb impulsos infinits a l'origen, els valors que s'han de prendre són els límits per l'esquerra del zero.

3 Altres propietats de la transformada de Laplace

Les propietats que segueixen faciliten el càlcul de noves transformades i antitransformades a partir de transformades i antitransformades conegudes. Totes les demostracions poden trobar-se a la bibliografia bàsica del curs. [BMZ][SK]

P4 Integral

Si $f(t)$ és una funció contínua, amb transformada de Laplace $F(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (13)$$

Per tant

En el domini de les funcions transformades, integrar respecte a t vol dir dividir per s .

P5 Multiplicació per t

Si $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s). \quad (14)$$

Aquesta propietat és la recíproca de la P2: llevat d'un signe, derivar en el domini transformat equival a multiplicar per t en el domini temporal. Com cal esperar, dividir en el domini temporal ha de correspondre a alguna integral en el domini transformat:

P6 Divisió per t

Si $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)d\nu. \quad (15)$$

P7 Translació en el domini transformat

Si $f(t)$ és d'ordre exponencial α i té transformada de Laplace $F(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \text{per a tot } s > \alpha + a. \quad (16)$$

La propietat dual d'aquesta, la translació en el domini temporal, la donarem a la Secció 5, una vegada haguem introduït la funció esglaió.

P8 Canvi d'escala

Si $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$ i $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (17)$$

La següent propietat permet calcular la transformada de Laplace d'una funció periòdica, calculant sols una integral sobre un període, en lloc de la integral de 0 a $+\infty$.

P9 Funcions periòdiques

Si $f(t)$ és admissible i periòdica de període $T > 0$, és a dir $f(t + T) = f(t)$, per a tot $t \geq 0$, llavors la seva transformada es pot calcular com

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt. \quad (18)$$

La darrera propietat d'aquesta secció permet calcular el límit en el domini temporal per a $t \rightarrow +\infty$ a partir del coneixement de $F(s)$ al voltant del zero, i per a $t \rightarrow 0^+$ examinant com $F(s)$ tendeix a zero quan $s \rightarrow +\infty$.

P10 Teoremes del valor final i del valor inicial

Si $f(t)$ i $f'(t)$ són admissibles llavors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s), \quad (19)$$

sempre que els límits existeixin.

Aquests resultats indiquen que valors de s petits estan associats a valors de t grans, i a l'inrevés.

Anem tot seguit a calcular algunes transformades i antitransformades que il·lustren l'aplicació d'algunes d'aquestes propietats.

1. A partir de

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$$

podem, emprant P4, calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{s - a}\right\} = \int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a} e^{a\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a}. \quad (20)$$

2. Coneixent

$$\mathcal{L}\{\sin \beta t\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

podem calcular, utilitzant P5,

$$\mathcal{L}\{t \sin \beta t\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \right) = \frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}. \quad (21)$$

3. Utilitzant la transformada del sinus i emprant P6 podem calcular

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin \beta t}{t}\right\} &= \int_s^{+\infty} \frac{\beta}{\nu^2 + \beta^2} d\nu \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\frac{s}{\beta}}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} d\omega = \arctan \omega \Big|_{\frac{s}{\beta}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\beta} \\ &\stackrel{(**)}{=} \arctan \frac{\beta}{s},\end{aligned}\quad (22)$$

on a (*) hem fet el canvi de variable $\omega = \frac{\nu}{\beta}$, i a (**) hem emprat la identitat

$$\arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

4. Sabent que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

podem, utilitzant P7, obtenir

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \quad (24)$$

Aquest resultat també es pot obtenir aplicant n vegades la P5 a la transformada de e^{at} , amb força més feina, però.

5. De la mateixa manera, l'ús de P7 a partir de

$$\mathcal{L}\{\cos \beta t\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

permet calcular

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos \beta t\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \Big|_{s \rightarrow s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \beta^2}. \quad (25)$$

6. Considerem ara la funció $f(t)$ periòdica de la Figura 1, amb període $T = 2\pi$. Aplicant P10 tindrem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} ae^{-st} dt \\ &= \frac{a}{1 - e^{-2\pi s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{a}{1 - e^{-2\pi s}} \left(-\frac{1}{s} (e^{-\pi s} - 1) \right) \\ &= \frac{a}{s} \frac{1 - e^{-\pi s}}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{a}{s(1 + e^{-\pi s})}.\end{aligned}$$

4 Solució d'EDO lineals amb coeficients constants

De cara a resoldre EDO, la propietat fonamental de la transformada de Laplace és que converteix derivades en multiplicació per variables. Això, juntament amb la linealitat, permet convertir una EDO en una equació algebraica lineal per a la funció transformada. Una vegada solucionada aquesta, la consulta d'una taula de transformades, possiblement amb l'ajuda prèvia de la descomposició en fraccions simples, permet trobar la solució de l'EDO original. Donat que el procés de transformació de les derivades implica els valors inicials, la solució que s'obté és ja la solució particular que satisfà les condicions inicials. La propietat de linealitat és fonamental en el procés, i per això és necessari que l'EDO sigui de coeficients constants. Considerarem per tant EDO lineals per a la funció $y(t)$, de primer ordre

$$a_1 y' + a_0 y = b(t), \quad a_1 \neq 0, \quad (26)$$

o de segon ordre

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t), \quad a_2 \neq 0, \quad (27)$$

on a_2, a_1, a_0 són constants.

Comencem amb una EDO d'ordre 1, amb el problema de Cauchy

$$2y' + 3y = \sin t, \quad y(0) = y_0. \quad (28)$$

Transformem primer els dos membres de l'EDO:

$$\mathcal{L}\{2y' + 3y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}.$$

Emprant la linealitat, P2 i la transformada del sinus, queda, anomenant $Y(s)$ a la transformada de $y(t)$,

$$2(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

D'aquí es pot aïllar $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2y_0}{2s + 3} + \frac{1}{(s^2 + 1)(2s + 3)}.$$

Aquest resultat s'ha d'antitransformar, emprant de nou la linealitat. La primera peça serà

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2y_0}{2s + 3}\right\} = 2y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s + 3}\right\} = y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{3}{2}}\right\} = y_0 e^{-\frac{3}{2}t}.$$

La segona peça s'ha de descomposar em fraccions simples per tal d'obtenir transformades fàcils de reconèixer. Hom té

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(2s + 3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(s^2 + 1)(s + \frac{3}{2})} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{4}{13}s + \frac{6}{13}}{s^2 + 1} + \frac{\frac{4}{13}}{s + \frac{3}{2}} \right) = -\frac{1}{13} \frac{2s - 3}{s^2 + 1} + \frac{2}{13} \frac{1}{s + \frac{3}{2}}.$$

El segon terme té una antitransformada immediata:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{13} \frac{1}{s + \frac{3}{2}} \right\} = \frac{2}{13} e^{-\frac{3}{2}t},$$

mentre que el primer terme és

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{13} \frac{2s - 3}{s^2 + 1} \right\} = -\frac{2}{13} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} + \frac{3}{13} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} = -\frac{2}{13} \cos t + \frac{3}{13} \sin t.$$

Posant-ho tot junt, hom obté finalment la solució al problema de Cauchy:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{2}{13} e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{2}{13} \cos t + \frac{3}{13} \sin t.$$

Els dos primers termes són la solució de l'EDO homogènia, amb $C = y_0 + \frac{2}{13}$, mentre que els dos darrers termes són la solució particular de l'EDO complerta. El sistema és estable, ja que la solució de l'homogènia tendeix a zero, i el règim permanent és sinusoidal.

Com a segon exemple, sigui la següent EDO de segon ordre amb condicions inicials

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \quad (29)$$

Transformant-ho tot queda

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) + 3(sY(s) - 2) + 2Y(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Agrupant els termes que tenen $Y(s)$ resulta

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 2s + 9 + \frac{1}{s + 1}. \quad (30)$$

Fixem-nos que el polinomi en s que multiplica $Y(s)$ és exactament el polinomi característic de l'EDO lineal amb coeficients constants. Aïllant $Y(s)$ queda

$$Y(s) = \frac{2s + 9}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 3s + 2)}. \quad (31)$$

Les arrels del polinomi característic són -1 i -2 . Descomposant la primera fracció de (31) en fraccions simples s'obté

$$\frac{2s + 9}{s^2 + 3s + 2} = \frac{7}{s + 1} - \frac{5}{s + 2},$$

i per tant

$$\frac{2s + 9}{s^2 + 3s + 2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 7e^{-t} - 5e^{-2t}.$$

La segona fracció de (31) és

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}.$$

El primer i darrer terme tenen antitransformades immediates, mentre que per calcular la del segon s'ha d'emprar P5. En efecte,

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Per tant

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}.$$

Posant-ho tot plegat a (31) s'obté la solució $y(t)$ que verifica les condicions inicials

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t} = 6e^{-t} - 4e^{-2t} + te^{-t}.$$

El sistema és estable, ja que les arrels del polinomi característic tenen part real negativa. El règim permanent és $y(t) = 0$, donat que la solució particular de la completa també tendeix a zero quan $t \rightarrow +\infty$.

Com a darrer exemple considerem

$$y'' + 4y' + 13y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (32)$$

La transformada de Laplace de l'equació dona

$$(s^2Y(s) - 1 \cdot s - 0) + 4(sY(s) - 1) + 13Y(s) = \frac{2}{s},$$

d'on

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = s + 4 + \frac{2}{s}$$

i

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s(s^2+4s+13)}. \quad (33)$$

Les arrels del polinomi característic $s^2 + 4s + 13$ són complexes conjugades, $-2 \pm 3j$, de manera que la primera fracció de (33) és ja una fracció simple i la segona es descomposa com

$$\frac{2}{s(s^2+4s+13)} = \frac{2}{13} \frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{13}s - \frac{8}{13}}{s^2+4s+13}.$$

Queda així

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{2}{13} \frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{13}s - \frac{8}{13}}{s^2+4s+13} = \frac{2}{13} \frac{1}{s} + \frac{s+4 - \frac{2}{13}s - \frac{8}{13}}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{2}{13} \frac{1}{s} + \frac{11}{13} \frac{s+4}{s^2+4s+13}. \end{aligned} \quad (34)$$

L'antitransformada del primer terme de (34) és immediata,

$$\frac{2}{13} \frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{13},$$

mentre que per calcular l'antitransformada del segon terme cal completar quadrats en el polinomi característic i escriure'l com

$$s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 3^2,$$

i recordar que

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (35)$$

En efecte, hom té

$$\begin{aligned} \frac{11}{13} \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 13} &= \frac{11}{13} \frac{s + 4}{(s + 2)^2 + 3^2} = \frac{11}{13} \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2} + \frac{11}{13} \frac{2}{(s + 2)^2 + 3^2} \\ &= \frac{11}{13} \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2} + \frac{22}{39} \frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

Emprant ara (35) amb $\alpha = -2$ i $\beta = 3$, resulta

$$\frac{11}{13} \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 13} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{11}{13} e^{-2t} \cos 3t + \frac{22}{39} e^{-2t} \sin 3t$$

i, finalment, posant-ho tot a (34),

$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{2}{13} + \frac{11}{13} e^{-2t} \cos 3t + \frac{22}{39} e^{-2t} \sin 3t.$$

El sistema és estable donat que les arrels del polinomi característic tenen part real negativa. El primer terme és el règim permanent, mentre que els dos darrers termes incorporen les condicions inicials i decauen en el temps.

5 La funció de Heaviside

La funció de Heaviside, o funció esglaó, és una funció molt simple, que sols pren valors 0 i 1, depèn d'un paràmetre a que indica on hi ha el punt de salt, i està definida per

$$\theta(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t > a. \end{cases} \quad (36)$$

Dit d'altra manera, val zero si el seu argument és negatiu i 1 si és positiu. En $t = a$, quan l'argument val 0, la funció no està definida. algunes vegades s'utilitza la notació $\theta_a(t) = \theta(t - a)$, i alguns autors utilitzen u en lloc de θ . La Figura 2 mostra la gràfica de $\theta(t - a)$.

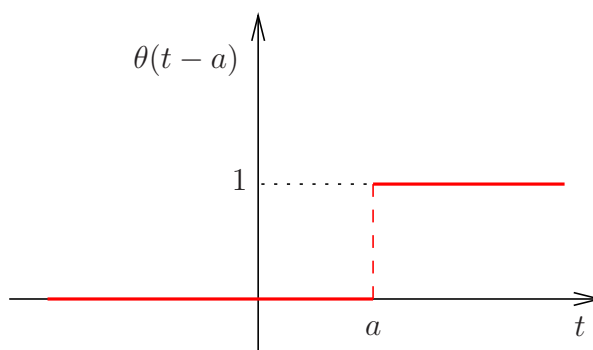


Figura 2: Funció de Heaviside $\theta(t-a)$. Aquí està representada per $a > 0$, però a pot ser negatiu o zero.

La transformada de Laplace de la funció de Heaviside per $a > 0$ és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} \theta(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_{t=a}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s} \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-sA} \\ &\stackrel{s > 0}{=} \frac{1}{s}e^{-as}, \end{aligned} \quad (37)$$

amb el resultat vàlid per tant quan $s > 0$. Si $a \leq 0$, la funció $\theta(t-a)$ és, a efectes de la transformada de Laplace unilateral, indistingible de la funció constant $f(t) = 1$, i per tant la seva transformada és $1/s$.

La principal aplicació de la funció de Heaviside per al càlcul de transformades de Laplace és que permet expressar de manera compacta funcions definides de manera no uniforme, és a dir, a trossos, que a més poden introduir discontinuïtats. Sigui per exemple la funció representada a la Figura 3, donada per

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t < a, \\ f_2(t) & \text{si } t > a. \end{cases} \quad (38)$$

Aquesta funció es pot representar de manera compacta com

$$f(t) = f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t)). \quad (39)$$

En efecte, si $t < a$ tenim que

$$f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t) + 0 \cdot (f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t),$$

mentre que si $t > a$ queda

$$f_1(t) + \theta(t-a)(f_2(t) - f_1(t)) = f_1(t) + 1 \cdot (f_2(t) - f_1(t)) = f_2(t),$$

La següent propietat permet calcular la transformada de Laplace d'una funció definida a trossos a partir de les transformades de les funcions que intervenen en la definició.

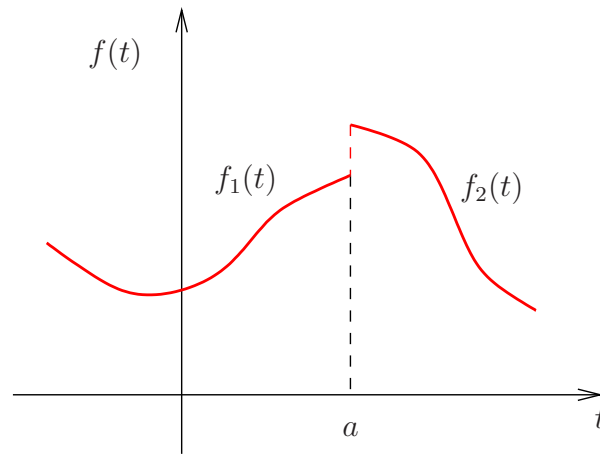


Figura 3: Funció definida a trossos: $f(t) = f_1(t)$ si $t < a$ i $f(t) = f_2(t)$ si $t > a$. L'existència de la discontinuïtat en $t = a$ és deguda a que $f_1(a) \neq f_2(a)$, però això no ha de ser necessàriament així.

P11 Translació en el domini temporal

Si $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$ i $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s). \quad (40)$$

Demostració.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} &= \int_0^{+\infty} f(t-a)\theta(t-a)e^{-st}dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}dt \\ &\stackrel{\{t-a=\tau\}}{=} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{-sa}F(s). \end{aligned}$$

□

És important que $a > 0$, ja que en cas contrari la funció de Heaviside no té cap efecte sobre la transformada de Laplace (unilateral).

Sigui per exemple la funció, contínua en $t = \pi$ ja que $\sin \pi = 0$,

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t < \pi, \\ 0 & \text{si } t > \pi, \end{cases} \quad (41)$$

que es pot escriure com

$$f(t) = \sin t + \theta(t-\pi)(0 - \sin t) = \sin t - \theta(t-\pi)\sin t.$$

La transformada del primer terme és immediata, però per poder calcular la del segon cal posar-lo en la forma del membre de l'esquerra de (40):

$$\begin{aligned} -\theta(t - \pi) \sin t &= -\theta(t - \pi) \sin(t - \pi + \pi) = -\theta(t - \pi) (\sin(t - \pi) \cos \pi + \sin \pi \cos(t - \pi)) \\ &= \theta(t - \pi) \sin(t - \pi). \end{aligned}$$

Tindrem llavors que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{\theta(t - \pi) \sin(t - \pi)\} = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (42)$$

L'interès que per a nosaltres té el ser capaços de calcular la transformada d'una funció definida a trossos és que facilita molt el càlcul de la solució d'una EDO lineal amb coeficients constants quan el terme independent està definit a trossos. En el domini temporal, hauríem de trobar la solució de l'EDO fins el punt on hi ha el canvi de definició, amb el primer valor del terme independent, i llavors utilitzar el valor de la solució en aquest punt com a valor inicial per a un segon problema amb el nou terme independent. Pel mètode de la transformada de Laplace es pot fer tot de cop. Sigui per exemple l'EDO

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad (43)$$

on $f(t)$ és la funció definida a (41), amb transformada donada per (42). Transformant (43) s'obté

$$sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 1},$$

d'on

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)} + e^{-\pi s} \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)}.$$

Com que

$$\frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \frac{s - 1}{s^2 + 1},$$

tindrem

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \frac{s - 1}{s^2 + 1} + \frac{1}{2} e^{-\pi s} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} e^{-\pi s} \frac{s - 1}{s^2 + 1}.$$

L'antitransformada dels dos primers termes és

$$\frac{1}{2} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \frac{s - 1}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t,$$

mentre que l'antitransformada dels dos darrers és, segons P11, la mateixa però amb t canviat per $t - \pi$ i amb tot multiplicat per $\theta(t - \pi)$:

$$\frac{1}{2} e^{-\pi s} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} e^{-\pi s} \frac{s - 1}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} \theta(t - \pi) e^{-(t - \pi)} - \frac{1}{2} \theta(t - \pi) \cos(t - \pi) + \theta(t - \pi) \frac{1}{2} \sin(t - \pi).$$

Posant-ho tot junt queda la solució

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\theta(t-\pi)e^{-(t-\pi)} - \frac{1}{2}\theta(t-\pi)\cos(t-\pi) + \frac{1}{2}\theta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Si ara calculem això per a $t < \pi$ i per a $t > \pi$ queda

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t & \text{si } t < \pi, \\ \frac{1}{2}e^{-t}(1 + e^\pi) & \text{si } t > \pi. \end{cases}$$

La funció $f(t)$ és contínua en $t = \pi$, però no hi és derivable; com que $y(t)$ és la solució d'una EDO d'ordre 1 que té com a membre de la dreta $f(t)$, és una funció un ordre més "suau" que $f(t)$. Per tant, $y(t)$ és contínua i derivable en $t = \pi$, però la derivada segona hi té un salt.

Com a segon exemple, sigui una partícula de massa $m = 1$ (totes les unitats en SI) que es mou en un fluid sota l'efecte d'una força de fregament $-2v$ proporcional a la velocitat, i tal que fins a $t = 4$ està sotmesa a una força externa de valor $F = 3$, que es suspèn entre $t = 4$ i $t = 6$ i es reprèn a partir de $t = 6$ però amb valor $F = 5$. La partícula té velocitat inicial $v(0) = 10$. La segona llei de Newton proporciona

$$\dot{v} = -2v + f(t), \quad (44)$$

amb $f(t)$ donada per

$$f(t) = 3 + \theta(t-4)(0-3) + \theta(t-6)(5-0) = 3 - 3\theta(t-4) + 5\theta(t-6),$$

i amb transformada

$$F(s) = \frac{3}{s} - 3\frac{e^{-4s}}{s} + 5\frac{e^{-6s}}{s}.$$

La transformada de (44) és

$$sV(s) - 10 + 2V(s) = \frac{3}{s} - 3\frac{e^{-4s}}{s} + 5\frac{e^{-6s}}{s},$$

d'on

$$V(s) = \frac{10}{s+2} + \frac{3}{s(s+2)} - 3\frac{e^{-4s}}{s(s+2)} + 5\frac{e^{-6s}}{s(s+2)}. \quad (45)$$

L'antitransformada del primer terme, que representa la caiguda de la velocitat inicial deguda al fregament, sense tenir en compte l'efecte de les forces aplicades, és

$$\frac{10}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 10e^{-2t}.$$

Els altres termes tots tenen

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2},$$

i per tant el segon terme és

$$\frac{3}{s(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t},$$

mentre que una aplicació directa de P11 per al tercer i quart termes dóna

$$\begin{aligned} -3e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{3}{2}\theta(t-4) + \frac{3}{2}\theta(t-4)e^{-2(t-4)}, \\ 5e^{-6s} \frac{1}{s(s+2)} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{5}{2}\theta(t-6) - \frac{5}{2}\theta(t-6)e^{-2(t-6)}. \end{aligned}$$

Posant-ho tot junt s'obté la solució

$$v(t) = 10e^{-2t} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}\theta(t-4) + \frac{3}{2}\theta(t-4)e^{-2(t-4)} + \frac{5}{2}\theta(t-6) - \frac{5}{2}\theta(t-6)e^{-2(t-6)}.$$

Trencat per trossos això és

$$v(t) = \begin{cases} 10e^{-2t} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} & \text{si } t < 4, \\ 10e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-2(t-4)} & \text{si } 4 < t < 6, \\ 10e^{-2t} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-2(t-4)} - \frac{5}{2}e^{-2(t-6)} & \text{si } t > 6. \end{cases}$$

Fixem-nos que totes les exponencials decauen en l'interval de temps en què cada expressió és vàlida. Per a $t < 4$, $v(t)$ tendeix cap a

$$v_{\lim F=3} = 3 = \frac{3}{2},$$

valor que assoliria si no deixéssim d'aplicar la força $F = 3$ (aquest és el valor de la velocitat tal que la força aplicada iguala la força de fregament). En $t = 4$ deixem d'aplicar la força i la partícula s'aniria frenant fins a

$$v_{\lim F=0} = 0,$$

si no fos que en $t = 6$ apliquem una nova força $F = 5$. La partícula tendeix llavors cap a la velocitat límit

$$v_{\lim F=5} = \frac{5}{2}.$$

Tot aquest comportament apareix representat a la Figura 4, on els valors asimptòtics poden apreciar-se clarament. Hom pot observar que $v(t)$ és contínua arreu, però no derivable en els punts on $f(t)$ és discontinua.

6 Solució de sistemes lineals per transformada de Laplace

El mètode de la transformada de Laplace pot aplicar-se també a sistemes d'EDO lineals amb coeficients constants. Al transformar s'obté un sistema d'equacions lineals per a les transformades de les funcions, i la feina de més respecte al cas d'una única EDO és trobar la solució d'aquest sistema emprant les tècniques de l'àlgebra lineal (per exemple, per ordre de preferència, la regla de Cramer, el càlcul directe de la matriu inversa o el mètode de Gauss).

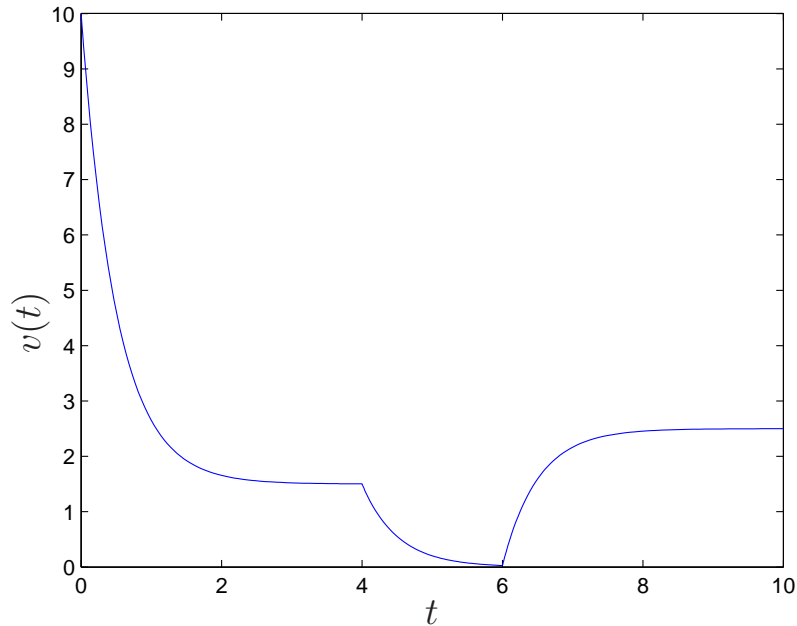


Figura 4: Velocitat d'una partícula amb fregament i amb força externa constant a trossos.

Com a exemple, sigui el sistema d'ordre 3 (2 per a x i 1 per a y)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - y - 2\dot{y} &= 1, \\ \dot{x} + \dot{y} &= t, \end{aligned} \quad (46)$$

amb les condicions inicials $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 2$. Si fem la seva transformada de Laplace resulta

$$\begin{aligned} (s^2X(s) - s \cdot 1 - 0) - Y(s) - 2(sY(s) - 2) &= \frac{1}{s}, \\ (sX(s) - 1) + (sY(s) - 2) &= \frac{1}{s^2}, \end{aligned} \quad (47)$$

o bé

$$\begin{aligned} s^2X(s) - (2s + 1)Y(s) &= s - 4 + \frac{1}{s}, \\ sX(s) + sY(s) &= 3 + \frac{1}{s^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Això es pot escriure en forma matricial com

$$\begin{pmatrix} s^2 & -2s - 1 \\ s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 4 + \frac{1}{s} \\ 3 + \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

El determinant del sistema és

$$\begin{vmatrix} s^2 & -2s - 1 \\ s & s \end{vmatrix} = s^3 + 2s^2 + s = s(s+1)^2, \quad (50)$$

i, aplicant la regla de Cramer podem obtenir llavors $X(s)$ i $Y(s)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{vmatrix} s - 4 + \frac{1}{s} & -2s - 1 \\ 3 + \frac{1}{s^2} & s \end{vmatrix} = \frac{1}{s(s+1)^2} \left(s^2 + 2s + 4 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{s^3(s+1)^2}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{vmatrix} s^2 & s - 4 + \frac{1}{s} \\ s & 3 + \frac{1}{s^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{s(s+1)^2} (2s^2 + 4s) \\ &= \frac{2(s+2)}{(s+1)^2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Descomposant els resultats en fraccions simples es té

$$X(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}, \quad (53)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}, \quad (54)$$

i per tant la solució del sistema d'EDO amb les condicions inicials donades és

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3 - 2te^{-t} - 2e^{-t}, \quad (55)$$

$$y(t) = 2te^{-t} + 2e^{-t}. \quad (56)$$

Un cas d'especial importància és quan el sistema és de n equacions de primer ordre amb les derivades aïllades:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad (57)$$

o, en notació compacta,

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad (58)$$

on

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Si calculem la transformada de Laplace de (58), transformant component a component però mantenint la notació matricial, resulta

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + B(s), \quad (60)$$

on

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \\ \vdots \\ B_n(s) \end{pmatrix}. \quad (61)$$

El terme $sX(s)$ es pot escriure com

$$sX(s) = s\mathbb{I}_n X(s), \quad (62)$$

on \mathbb{I}_n és la matriu identitat $n \times n$. Queda així

$$s\mathbb{I}_n X(s) - x(0) = AX(s) + B(s), \quad (63)$$

Traient llavors $X(s)$ factor comú dels dos termes de (63), resulta

$$(s\mathbb{I}_n - A)X(s) = x(0) + B(s), \quad (64)$$

d'on, aïllant $X(s)$, s'obté la solució en forma compacta

$$X(s) = (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}x(0) + (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}B(s). \quad (65)$$

La matriu inversa $(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}$ conté en el denominador de tots els seus elements el determinant de $s\mathbb{I}_n - A$, que és un polinomi de grau n en la variable s :

$$P(s) = \det(s\mathbb{I}_n - A). \quad (66)$$

Aquest polinomi s'anomena *polinomi característic* del sistema d'EDO (58).

Referències

- [BMZ] Batlle, C., Massana, I., Zaragozá, M., *Àlgebra i Equacions Diferencials*, Barcelona: Edicions UPC, 2000. ISBN 84-8301-405-X.
- [SK] Simmons, G.F., Krantz, S.G., *Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica*, 1a. edició, México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana, 2007. ISBN 978-0-07-286315-4.

A Taules de transformades i propietats

Les taules 2 i 3 recullen les transformades més habituals (la majoria de les quals han estat calculades en el text principal), així com les propietats que s'han presentat.

$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$s > 0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$s > 0$
$t \cos \beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s > 0$
$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$s > 0$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$s > \alpha$
$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > a $
$\sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$\frac{\beta}{s^2-a^2}$	$s > a $
$t^n e^{\alpha t}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$s > \alpha$
$\theta(t-a), a > 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$

Taula 2: Transformades de Laplace de les funcions més comuns, i valors de s per als que existeixen.

P0	Si $f(t)$ és admissible, llavors $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$
P1	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
P2	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
P3	$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
P4	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
P5	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$
P6	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)d\nu$
P7	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s) _{s \rightarrow s-a} = F(s-a)$
P8	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
P9	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt, f(t+T) = f(t)$
P10	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$
P11	$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s), a > 0$

Taula 3: Taula de propietats de la transformada de Laplace. Consulteu el text per als detalls d'aplicació.

EQUACIONS DIFERENCIALS - ENGINYERIA INDUSTRIAL - EPSEVG

Tema 3 - Anàlisi de les solucions dels sistemes lineals

CARLES BATLLE ARNAU

Departament de Matemàtica Aplicada 4
i
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Universitat Politècnica de Catalunya
EPSEVG, Av. V. Balaguer s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú

Gener 2012

Copyright 2012 Carles Batlle (carles.batlle@upc.edu)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 License. A copy of the license can be found at <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

1 Solució general d'una EDO lineal

Una EDO lineal d'ordre n per a la funció $x(t)$ és de la forma

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \quad (1)$$

amb $a_n(t) \neq 0$, i a on denotem les derivades primera i segona respecte a la variable independent t amb un i dos punts, respectivament. En particular, una EDO lineal d'ordre 1 és de la forma

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \quad a_1(t) \neq 0, \quad (2)$$

i una d'ordre 2 de la forma

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t), \quad a_2(t) \neq 0. \quad (3)$$

Les EDO lineals tenen propietats que faciliten el càlcul de la solució general. Encara que poden formular-se per l'EDO d'ordre n , ho farem per a les d'ordre 1 i 2. El cas d'ordre n és una generalització evident del cas d'ordre 2.

Una EDO lineal es diu que és homogènia si $b(t) = 0$. Així, les EDO lineals homogènies d'ordre 1 i 2 són, respectivament,

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \quad a_1(t) \neq 0, \quad (4)$$

$$a_2(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \quad a_2(t) \neq 0. \quad (5)$$

D'una EDO lineal sempre en podem obtenir una d'homogènia, anomenada **EDO homogènia associada**, posant $b(t) = 0$. L'equació amb $b(t) \neq 0$ s'anomena EDO lineal completa.

Comencem per les EDO lineals homogènies d'ordre 1. Un primer resultat important és el següent

Linealitat 1. Si $x(t)$ és una solució de (4), també ho és $\tilde{x}(t) = Cx(t)$, amb C una constant qualsevol.

En paraules, els múltiples d'una solució de l'equació lineal homogènia són també solució. La demostració és molt simple. Si $x(t)$ és solució de (4) vol dir que

$$a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = 0. \quad (6)$$

Llavors

$$\begin{aligned} a_1(t)\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) &= a_1(t)\frac{d}{dt}(Cx(t)) + a_0(t)(Cx(t)) = a_1(t)C\dot{x}(t) + a_0(t)Cx(t) \\ &= C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)) \stackrel{(6)}{=} C \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

i $\tilde{x}(t)$ també és solució. Fixem-nos que el punt clau és que $\frac{d}{dt}(Cy(x)) = C\dot{x}(t)$. La propietat que hem demostrat no és certa per a l'equació lineal completa (2). Si $x(t)$ és solució de (2), llavors $\tilde{x} = Cx(t)$ verifica

$$a_1(t)\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) + a_0(t)\tilde{x}(t) = C(a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)) = Cb(t) \neq b(t)$$

si $C \neq 1$, i per tant múltiples d'una solució de la completa no són solució de la completa.

El segon resultat per a les EDO lineals de primer ordre relaciona les solucions de l'equació completa amb els de l'homogènia associada.

Si $x_p(t)$ és una solució particular de l'equació completa (2) i $x_h(t)$ és una solució de l'equació homogènia (4), llavors la seva suma $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ és una solució de l'equació completa (2).

Les funcions $x_p(t)$ i $x_h(t)$ verifiquen

$$a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t) = b(t), \quad (7)$$

$$a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t) = 0. \quad (8)$$

La suma $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ satisfà llavors

$$\begin{aligned} a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) &= a_1(t)\frac{d}{dt}(x_p(t) + x_h(t)) + a_0(t)(x_p(t) + x_h(t)) \\ &= (a_1(t)\dot{x}_p(t) + a_0(t)x_p(t)) + (a_1(t)\dot{x}_h(t) + a_0(t)x_h(t)) \\ &\stackrel{(7)(8)}{=} b(t) + 0 = b(t), \end{aligned}$$

tal com volíem demostrar. Fixem-nos que, de nou, el punt clau és la linealitat de la derivada, $\frac{d}{dt}(x_p(t) + x_h(t)) = \dot{x}_p(t) + \dot{x}_h(t)$.

Aquesta propietat té una conseqüència molt important. Si fem que $x_h(t)$ sigui la solució general de l'homogènia, amb la seva constant arbitrària, llavors $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ serà solució de (2) i contindrà aquesta constant arbitrària. Serà, per tant, la solució general de (2). Tenim així el següent resultat

La solució general de l'EDO lineal completa d'ordre 1 s'obté afegint una solució particular de l'EDO completa a la solució general de l'EDO homogènia.

Per a EDO lineals d'ordre 2, la propietat de linealitat es converteix en la següent:

Linealitat 2. Si $x_1(t)$ i $x_2(t)$ són solució de (5), també ho és $\tilde{x}(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$, amb C_1, C_2 dues constants qualsevol.

La demostració és de nou molt senzilla i es basa en la linealitat de l'operació de derivar.

La propietat diu que qualsevol combinació lineal de solucions de l'equació homogènia és solució de l'homogènia. En realitat això també és cert per l'homogènia d'ordre 1 (4), però en el cas de les d'ordre 1 sols hi ha una solució independent de l'homogènia, i no té sentit fer combinacions de dues solucions; d'aquí la versió restringida de linealitat que hem donat per a ordre 1. En canvi, la relació entre les solucions generals de l'homogènia i de la completa per a ordre 2 és la mateixa que per a ordre 1:

Si $x_p(t)$ és una solució particular de l'equació completa (3) i $x_h(t)$ és una solució de l'equació homogènia (5), llavors la seva suma $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ és una solució de l'equació completa (3).

La demostració és semblant a la del cas d'ordre 1. Tenint en compte aquest resultat, hom té també

La solució general de l'EDO lineal completa d'ordre 2 s'obté afegint una solució particular de l'EDO completa a la solució general de l'EDO homogènia.

2 Càlcul de la solució general d'una EDO lineal amb coeficients constants

Dels resultats de la secció anterior sabem que la solució general d'una EDO lineal per a la funció $x(t)$ és

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (9)$$

on $x_h(t)$ és la solució general de l'EDO homogènia i $x_p(t)$ és una solució particular de l'EDO completa. En general, però, per a EDO lineals amb coeficients no constants, és complicat calcular aquestes solucions; en canvi, per a EDO lineals amb coeficients constants, les podem calcular de forma molt simple mitjançant la transformada de Laplace, i ho farem tot seguit per als casos d'ordre 1 i 2.

2.1 EDO lineal d'ordre 1 amb coeficients constants

Sigui l'EDO lineal d'ordre 1 amb coeficients constants

$$\dot{x} + ax = b(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

amb condició inicial $x(0)$, per a la qual volem calcular la solució $x(t)$ per a $t \geq 0$. Transformant per Laplace tenim

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = B(s),$$

d'on

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} + \frac{B(s)}{s+a}, \quad (11)$$

i la solució en el domini temporal és

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{s+a} \right\}. \quad (12)$$

El primer terme de la solució conté el valor arbitrari $x(0)$ de la condició inicial, que podem anomenar C , i és la solució que s'obté si posem $b(t) = 0$ (i per tant $B(s) = 0$). És per tant la solució general $x_h(t)$ de l'equació homogènia

$$x_h(t) = x(0)e^{-at} = Ce^{-at}, \quad (13)$$

i per tant la solució particular de l'equació completa que s'obté és

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{s+a} \right\}, \quad (14)$$

que depèn del terme independent $b(t)$ que hi tinguem. Notem també el paper que juga, tant en el càlcul de $x_h(t)$ com en el de $x_p(t)$, el polinomi característic

$$p_1(s) = s + a. \quad (15)$$

2.2 EDO lineal d'ordre 2 amb coeficients constants

Una EDO lineal d'ordre 2 amb coeficients constants té la forma

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = b(t), \quad t > 0, \quad (16)$$

i transformada per Laplace amb condicions inicials $x(0)$, $\dot{x}(0)$ dóna

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + a_1(sX(s) - x(0)) + a_0X(s) = B(s),$$

d'on

$$X(s) = \frac{(s+a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} + \frac{B(s)}{s^2 + a_1s + a_0}. \quad (17)$$

La solució temporal de l'EDO és llavors

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{s^2 + a_1s + a_0} \right\}. \quad (18)$$

El primer terme conté dues constants arbitràries, $x(0)$ i $\dot{x}(0)$, i és l'únic que roman si posem $b(t) = 0$. És, per tant, la solució general de l'equació homogènia

$$x_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} \right\}, \quad (19)$$

mentre que

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{s^2 + a_1s + a_0} \right\}. \quad (20)$$

A diferència del cas d'ordre 1, la forma específica de $x_h(t)$ depèn de com siguin les arrels del polinomi característic

$$p_2(s) = s^2 + a_1s + a_0, \quad (21)$$

i això és el que discutirem tot seguit.

2.2.1 $p_2(s)$ amb arrels reals diferents

Si $p_2(s)$ té arrels reals α_1 i α_2 amb $\alpha_1 \neq \alpha_2$, llavors

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)$$

i tenim la descomposició en fraccions simples

$$\frac{(s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{C_1}{s - \alpha_1} + \frac{C_2}{s - \alpha_2}. \quad (22)$$

Anti-transformant obtenim la solució general de l'EDO homogènia per a aquest cas

$$x_h(t) = C_1e^{\alpha_1 t} + C_2e^{\alpha_2 t}. \quad (23)$$

Les **solucions fonamentals** de l'EDO homogènia són

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t}. \quad (24)$$

2.2.2 $p_2(s)$ amb una arrel real doble

Si $p_2(s)$ té una arrel real doble α ,

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s - \alpha)^2,$$

hom té

$$\frac{(s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{C_1}{s - \alpha} + \frac{C_2}{(s - \alpha)^2}. \quad (25)$$

i llavors

$$x_h(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2te^{\alpha t}, \quad (26)$$

i les solucions fonamentals són

$$x_1(t) = e^{\alpha t}, \quad x_2(t) = te^{\alpha t}. \quad (27)$$

2.2.3 $p_2(s)$ amb arrels complexes

Si les arrels són $\alpha \pm j\beta$, amb $\beta \neq 0$, es té

$$s^2 + a_1s + a_0 = (s - \alpha)^2 + \beta^2.$$

En aquest cas la fracció racional és ja simple (en els reals), i sols cal manipular-la per poder anti-transformar-la:

$$\begin{aligned} \frac{(s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + a_1s + a_0} &= \frac{(s + a_1)x(0) + \dot{x}(0)}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= x(0) \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{a_1x(0) + \dot{x}(0) + \alpha x(0)}{\beta} \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= C_1 \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} + C_2 \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (28)$$

on

$$C_1 = x(0), \quad (29)$$

$$C_2 = \frac{a_1x(0) + \dot{x}(0) + \alpha x(0)}{\beta}. \quad (30)$$

Anti-transformant (28) resulta llavors

$$x_h(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (31)$$

amb solucions fonamentals

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t. \quad (32)$$

3 Estabilitat. Règim permanent i règim transitori

3.1 Estabilitat de les EDO lineals de primer i segon ordre

Hem vist que la solució general de l'EDO lineal de primer ordre amb coeficients constants

$$\dot{x} + ax = b(t). \quad (33)$$

és

$$x(t) = C e^{-at} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{s + a} \right\}. \quad (34)$$

El que volem fer ara és discutir el comportament de la solució quan $t \rightarrow +\infty$. El comportament del segon terme de (34) és complicat i depèn de $b(t)$; el que farem de moment és suposar que $b(t) = 0$ i per tant $x(t)$ es redueix a $x_h(t)$, la solució de l'equació homogènia:

$$x(t) = C e^{-at} \quad \text{si } b(t) = 0. \quad (35)$$

Examinant (35) es veu que

si $a > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Es diu que l'EDO (33) és **estable**.

si $a < 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\infty \quad (\text{el signe depèn del de } C).$$

Es diu que l'EDO (33) és **inestable**.

El cas $a = 0$ és especial i fa que la solució de l'equació sigui la constant C , que coincideix amb el valor inicial de $x(t)$ (recordem que $b(t) = 0$). Es diu llavors que l'EDO és **marginalment estable**.

Fixem-nos que el polinomi característic de l'EDO que estem considerant és $p_1(s) = s + a$, i que té arrel $s = -a$. Per tant podem re-escriure la condició d'estabilitat com

<p>L'EDO</p> $\dot{x} + ax = b(t)$ <p>és estable si i sols si l'arrel del polinomi característic</p> $p_1(s) = s + a$ <p>és negativa.</p>

Tornem ara a l'EDO completa i a la seva solució (34). Ara, independentment del valor d' a , el comportament quan $t \rightarrow +\infty$ és més complicat i pot ser 0, $\pm\infty$ o pot no existir (pot, per exemple, oscil·lar), en funció de com sigui $b(t)$. Una característica de la solució que sí que es pot discutir en general i que a més és d'utilitat en les aplicacions és si roman fitada o no, és a dir, si la solució pot créixer en magnitud indefinidament.

<p>Es diu que una funció $x(t)$ és fitada per $t \geq 0$ si existeix una constant $M > 0$ tal que</p> $ x(t) < M \quad \text{per a tot } t \geq 0. \quad (36)$

El resultat fonamental, que no demostrarem, és el següent

<p>Si l'EDO (33) és estable, <i>i.e.</i> $a > 0$, i $b(t)$ és fitada llavors $x(t)$ és fitada.</p>

Si pensem, com farem més endavant en el curs, que $b(t)$ és un senyal d'entrada en un sistema físic descrit per l'EDO (33) i que $x(t)$ és un senyal de sortida, podem re-escriure aquest resultat dient que, per a sistemes estables, les entrades fitades produeixen sortides fitades.

El resultat no és cert si l'EDO és marginalment estable, és a dir, quan $a = 0$. Per exemple, posant $b(t) = 1$, que és un senyal fitat, i $a = 0$ a (34), es té

$$x(t) = C + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = C + t$$

que creix indefinidament quan t creix.

Les EDO (33) estables també tenen una altra propietat. La constant C de la solució (34) conté la informació sobre la condició inicial, ja que canviar la condició inicial canvia la C (i res més). Si l'EDO és estable, la influència del valor de C en la solució (34) va disminuint quan t es fa gran, degut a que apareix multiplicada per l'exponencial decreixent e^{-at} . D'aquesta manera, per a t prou gran les solucions corresponents a diferents condicions inicials s'assemblen cada vegada més, i s'acosten a la solució particular de l'EDO completa $x_p(t)$.

En les aplicacions a enginyeria i sistemes físics es diu que el temps que passa fins que l'efecte de les condicions inicials és menyspreable és el **règim transitori**, i el que ve després, que, a efectes pràctics, sols depèn de l'entrada $b(t)$ i no de les condicions inicials, és el **règim permanent**, que ve descrit per la solució particular $x_p(t)$. Cal remarcar que aquestes consideracions sols tenen sentit per a sistemes estables, i no per a sistemes inestables o marginalment estables.

Estrictament, l'efecte de les condicions inicials no arriba a desaparèixer mai, i cal establir un criteri que indiqui què vol dir que Ce^{-at} sigui menyspreable. A efectes d'això es defineix el **temps característic** o **constant de temps** de l'EDO (o sistema físic) de primer ordre (33):

<p>El temps característic o constant de temps del sistema físic descrit per l'EDO</p> $\dot{x} + ax = b(t)$ <p>quan $a > 0$, és a dir, quan l'EDO és estable, és</p> $\tau = \frac{1}{a}. \tag{37}$

Si calculem la contribució de $x_h(t) = Ce^{-at}$ quan $t = \tau$ ens queda

$$x_h(\tau) = Ce^{-a\tau} = Ce^{-1} \approx 0.37C,$$

i per tant la contribució de la part de la solució homogènia és poc més d'un terç de la que tenia per a $t = 0$. A efectes pràctics, després de tres constants de temps ($t = 3\tau$) la contribució és menyspreable (menys d'un 5% de la inicial).

Com a exemple, considerem un condensador amb capacitat C que es descarrega a través d'una resistència R (circuit RC). L'EDO per a la càrrega $q(t)$ del condensador és

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0. \tag{38}$$

Això és una EDO lineal ja homogènia, amb $a = 1/(RC)$. La solució general de (38) és

$$q(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}},$$

on hem anomenat K la constant arbitrària, i si impossem la condició inicial $q(0) = q_0$ queda

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{39}$$

Com que R i C són constants positives, $a > 0$ i l'EDO és estable. La constant de temps del circuit RC és

$$\tau = RC. \quad (40)$$

Passats $t = 3\tau = 3RC$ unitats de temps, hom té que $q(t) \approx 0.05q_0$, i la càrrega del condensador és, comparativament amb el seu valor inicial, molt propera a zero, que és el règim permanent en aquest cas (el condensador es descarrega totalment). Si en el circuit RC hi afegim una font de voltatge en sèrie, de valor $v(t)$, l'EDO esdevé

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{1}{R}v(t). \quad (41)$$

L'escala de temps marcada per $\tau = RC$ és llavors el temps que ha de passar per a que $q(t)$ s'oblidi del valor inicial q_0 i depengui sols de $v(t)$.

Fixem-nos que la constant de temps RC té efectivament dimensions de temps. La capacitat C es mesura en farad (F), que en termes de les unitats fonamentals del SI és

$$F = \text{m}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{s}^4\text{A}^2,$$

mentre que R es mesura en ohm (Ω), amb unitats

$$\Omega = \text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-2},$$

i, per tant,

$$[RC] = \text{s}.$$

De fet, RC és l'única quantitat amb dimensions de temps que es pot formar amb les constants del problema, i d'aquí venen els noms de temps característic i constant de temps.

Considerem ara l'EDO lineal de segon ordre amb coeficients constants

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = b(t). \quad (42)$$

La solució general és de la forma

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + x_p(t), \quad (43)$$

on la forma de $x_1(t)$ i $x_2(t)$ depèn de les arrels del polinomi característic $p_2(s) = s^2 + a_1s + a_0$:

- si són dues de reals diferents, α_1, α_2 , llavors

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t}.$$

- si és una de real amb multiplicitat doble, α , llavors

$$x_1(t) = e^{\alpha t}, \quad x_2(t) = te^{\alpha t}.$$

- si són un parell d'arrels complexes conjugades, $\alpha \pm j\beta$, llavors

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

En qualsevol cas, el que determina si la solució $x_h(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ de l'equació homogènia tendeix a zero quan $t \rightarrow +\infty$ i per tant si l'EDO o el sistema físic descrit per ella és estable, seguint la mateixa idea que hem exposat pel cas d'ordre 1, és el signe de les parts reals de les arrels, que és el que apareix a les exponencials. Tenim així que

- si totes les arrels del polinomi característic tenen part real negativa, llavors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_h(t) = 0.$$

Es diu que l'EDO (42) és **estable**.

- si alguna arrel del polinomi característic té part real positiva llavors, en general,¹ $|x_h(t)|$ creix indefinidament quan $t \rightarrow +\infty$.

Es diu que l'EDO (42) és **inestable**.

En el cas restant, quan les dues arrels tenen part real zero o una és zero i l'altra és negativa, es diu que l'EDO és **marginalment estable**.

Igual que per al cas d'ordre 1 es té que

Si l'EDO (42) és estable, *i.e.* totes les arrels del polinomi característic tenen part real negativa, i $b(t)$ és fitada llavors la solució $x(t)$ de l'equació completa és fitada.

Per a EDO de segon ordre estables l'efecte de les condicions inicials també s'esvaeix en el temps. Per tal de quantificar l'escala de temps en que això passa considerarem sols el cas d'arrels complexes conjugades, i introduïrem a més la notació estàndard de teoria de sistemes i de control.

El discriminant del polinomi característic és

$$a_1^2 - 4a_0.$$

Si les arrels han de ser complexes, és necessari (però no suficient) que

$$a_0 > 0,$$

i, per tant, podem definir la **frequència natural** $\omega_n > 0$ de l'EDO (42) com

$$\omega_n^2 = a_0. \tag{44}$$

¹Pot donar-se el cas que això no sigui així degut a que les condicions inicials facin que la C corresponent sigui zero, però la definició d'inestabilitat no canvia.

Definim ara un nou paràmetre, anomenat el **coeficient d'esmoreïment**, ξ , de manera que

$$2\xi\omega_n = a_1. \quad (45)$$

En termes de ω_n i ξ l'equació homogènia associada a (42) esdevé

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0, \quad (46)$$

i les arrels del polinomi característic són

$$\frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

La condició que mancava per assegurar que les arrels siguin complexes és per tant que $-1 < \xi < 1$. Suposant això, les arrels són

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Si, a més, el sistema ha de ser estable, cal que la part real, $-\xi\omega_n$, sigui negativa, i per tant $\xi > 0$. Reunint les dues condicions sobre ξ , veiem que si l'EDO (42) ha de ser estable i amb arrels complexes cal que el paràmetre d'esmoreïment verifiqui

$$0 < \xi < 1.$$

La solució de l'EDO homogènia, en termes de ξ i ω_n és

$$x_h(t) = C_1e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t + C_2e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t. \quad (47)$$

Com que els factors sinusoidals no decreixen en magnitud a l'augmentar t , són les exponencials decreixents les que fan que el sistema s'oblidi de les condicions inicials. El temps necessari per a que la contribució disminueixi en un factor de e^{-1} respecte a l'inicial és, igual que en el cas d'ordre 1, el temps característic o constant de temps del sistema, i en aquest cas ve donat per

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}. \quad (48)$$

Com a exemple, recuperem l'EDO d'un circuit RCL amb font de voltatge:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v(t), \quad \text{o} \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}v(t) \quad (49)$$

Tenim que $a_1 = R/L$ i $a_0 = 1/(LC)$, i tenint en compte (44) i (45), resulta

$$\omega_n^2 = \frac{1}{CL} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (50)$$

i

$$2\xi\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{LC}R}{2L} = \frac{RC}{2\sqrt{LC}}. \quad (51)$$

Ja sabem que RC té dimensions de temps i, a més, es pot veure que LC té dimensions de temps al quadrat; per tant, ξ és una quantitat sense dimensions, tal com correspon a una magnitud que ha de verificar $0 < \xi < 1$. Com que tots els paràmetres són positius i, en particular, ho és R , es té que $\xi > 0$, mentre que la condició $\xi < 1$ imposa un límit al valor de R tal que permet solucions sinusoidals per al sistema amb $v(t) = 0$. La constant de temps és, segons (48),

$$\tau = 2\frac{L}{R} \quad (52)$$

que, efectivament, té dimensions de temps. Val a dir que aquí, a diferència del cas d'ordre 1 (el circuit RC), hi ha dues combinacions bàsiques de constants que tenen dimensions de temps, RC i \sqrt{LC} . La combinació que apareix a τ s'obté dividint el quadrat de la segona per la primera.

L'estudi que hem fet es pot resumir de la següent manera:

Donada una EDO lineal d'ordre 1 o 2 amb coeficients constants, diem que és estable si totes les arrels del seu polinomi característic tenen part real negativa. En aquest cas, en una escala de temps que depèn de la constant de temps del sistema, i que és més gran com més petites en valor absolut siguin les parts reals de les arrels, la solució abandona el règim transitori i entra en el règim permanent, per al que $x(t) \approx x_p(t)$.

3.2 Estabilitat de sistemes d'EDO lineals

Recordem que la solució en el domini transformat del sistema lineal d'EDO

$$\dot{x} = Ax + b(t) \quad (53)$$

és

$$X(s) = (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}x(0) + (s\mathbb{I}_n - A)^{-1}B(s), \quad (54)$$

on matriu inversa $(s\mathbb{I}_n - A)^{-1}$ conté en el denominador de tots els seus elements el polinomi característic

$$P(s) = \det(s\mathbb{I}_n - A). \quad (55)$$

Quan es calcula l'antitransformada, en general cal fer una descomposició en fraccions simples de termes que tenen $P(s)$ en el denominador. Examinant la taula de transformades de Laplace, es veu que qualsevol denominador que tingui zeros amb part real a dona lloc a una exponencial e^{at} , acompanyada o no de potències en t i de sinus i cosinus. Per tant, si volem estudiar l'estabilitat del sistema d'EDO donat per (53), és a dir, si volem veure sota quines condicions l'efecte de les condicions inicials s'esvaeix en el temps, cal examinar les arrels de $P(s)$. Arribem llavors al següent resultat, que generalitza els resultats que havíem vist per a EDO lineals de primer i segon ordre amb coeficients constants:

El sistema d'EDO (53) és estable si i sols si totes les arrels del polinomi característic (55) tenen part real negativa.

Les arrels del polinomi característic són solució de

$$\det(s\mathbb{I}_n - A) = 0. \quad (56)$$

Aquesta equació és, però, la mateixa que determina els valors propis de la matriu A (canviant la notació més habitual de λ per s). Per tant podem reformular l'estabilitat de la següent manera:

El sistema d'EDO $\dot{x} = Ax + b(t)$ és estable si i sols si tots els valors propis de la matriu A tenen part real negativa.

Sigui per exemple el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 16 \\ 4 & -3 & -8 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Els valors propis de la matriu A són les arrels del polinomi característic

$$P(s) = \begin{vmatrix} s + 11 & 0 & -16 \\ -4 & s + 3 & 8 \\ 1 & -3 & s + 7 \end{vmatrix} = s^3 + 21s^2 + 171s + 351 \quad (58)$$

Es pot veure que una de les solucions és $s = -3$, i dividint per $s + 3$ s'obté un polinomi de grau 2 amb arrels $-9 \pm 6j$. Totes les arrels tenen per tant part real negativa i el sistema és estable. L'efecte de les condicions inicials desapareixerà en una escala de temps τ de l'ordre de l'invers del valor absolut de la menys negativa de les parts reals de les arrels,² en aquest cas $\tau = 1/3 \approx 0.33$. A més, si les funcions $b_1(t)$, $b_2(t)$ i $b_3(t)$ són fitades, també ho seran les solucions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Posant $b_1(t) = b_2(t) = b_3(t) = 0$ i condicions inicials $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = -1$, s'obtenen les solucions que apareixen a la Figura 1. S'observa que, després de 3 constants de temps $3\tau = 1$, les condicions inicials han decaïgut a valors menyspreables.

La condició de que els valors propis d' A tinguin part real negativa és absolutament general i inclou les condicions que havíem vist per a EDO d'ordre 1 i ordre 2 (amb solució oscil·lant de l'equació homogènia). Per a ordre 1

$$\dot{x} + ax = b(t)$$

tenim que A és la matriu 1×1 donada per $A = -a$, i el seu únic valor propi és la solució de

$$s \cdot 1 - A = s + a = 0$$

d'on $s = -a$ i l'EDO és estable si i sols sí $-a < 0$, és a dir $a > 0$, com ja s'havia establert. Per a EDO oscil·lants d'ordre 2

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = b(t), \quad \omega_n > 0, \quad -1 < \xi < 1,$$

²La situació pot ser més complicada si això correspon a arrels complexes, o si hi ha arrels complexes properes.

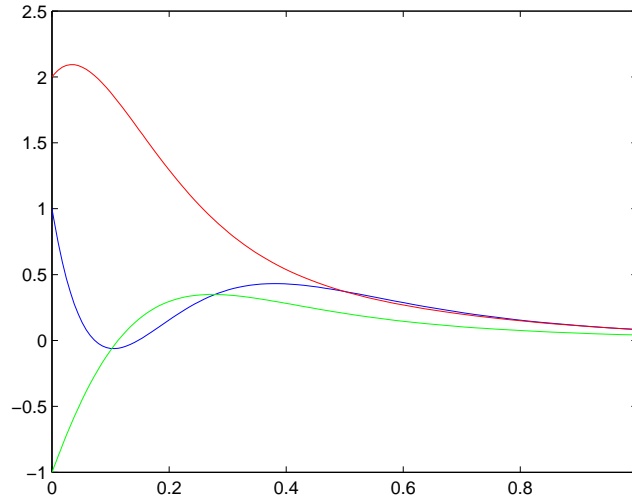


Figura 1: Solucions del sistema (57) amb $b(t) = 0$. $x_1(t)$ (blau), $x_2(t)$ (vermell), $x_3(t)$ (verd).

tenim, posant $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + b(t),\end{aligned}$$

i per tant la matriu del sistema és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix},$$

amb polinomi característic

$$\det(s\mathbb{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \omega_n^2 & s + 2\xi\omega_n \end{vmatrix} = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2,$$

que té arrels complexes (degut a que $-1 < \xi < 1$)

$$s = -\xi \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

La condició de part real negativa, i per tant d'estabilitat, és que $\xi > 0$, tal com ja havíem vist.

4 Utilització de fasors. Impedància complexa. Ressonància

En aquesta secció volem emprar tècniques de nombres complexos per calcular la solució en règim permanent d'EDO lineals amb coeficients constants, en el cas estable i quan l'entrada és una funció sinusoidal.

Considerem primer el cas d'ordre 1

$$\dot{v} + av = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (59)$$

on, per raons que tenen a veure amb les aplicacions on apareixen aquestes equacions, fem una notació de velocitat $v(t)$ per representar la variable dependent del temps, i a on A_0 és l'amplitud del terme forçat i φ_0 n'és la fase ($\varphi_0 = 0$ per a un sinus i $\varphi_0 = \pi/2$ per a un cosinus), i a on suposem que $a > 0$, de manera que el sistema és estable i per tant té un règim permanent que volem calcular emprant nombres complexos. Aquest procediment introdueix tota una sèrie de tècniques i conceptes que són molt importants a l'enginyeria elèctrica i mecànica.

De fet, de cara a tenir una interpretació física de l'EDO, podem pensar que (59) correspon a una partícula de massa m sotmesa a una força de fregament $-\gamma v$ proporcional a la velocitat i a una força externa $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$,

$$m\dot{v} + \gamma v = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (60)$$

i per tant els paràmetres de (59) són $a = \gamma/m$ i $A_0 = F_0/m$.

En lloc de considerar l'equació (59), on totes les magnituds són reals, considerarem l'EDO

$$\dot{\mathbf{V}} + a\mathbf{V} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}, \quad (61)$$

on $\mathbf{V}(t)$ és una funció complexa de t , i hem canviat $\sin(\omega t + \varphi_0)$ per $e^{j(\omega t + \varphi_0)}$. La idea és que (61) és més fàcil de solucionar que (59), i a més posa més de manifest els fenòmens subjacents. La solució física $x(t)$ s'obté llavors agafant la part imaginària de $\mathbf{V}(t)$,

$$v(t) = \text{Im}\mathbf{V}(t), \quad (62)$$

donat que $\sin(\omega t + \varphi_0)$ és la part imaginària de $e^{j(\omega t + \varphi_0)}$:

$$A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + j A_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (63)$$

Per tal de calcular la solució particular de (61) que proporciona el règim permanent, cercarem una $\mathbf{V}_p(t)$ de la forma

$$\mathbf{V}_p(t) = \mathbf{A} e^{j\omega t}, \quad (64)$$

on \mathbf{A} és un nombre complex que s'ha de calcular. Aquest tipus de funció, un nombre complex o real multiplicat per una exponencial de la forma $e^{j\omega t}$, s'anomena **fasor**. El principal avantatge sobre la formulació en termes de sinus i cosinus és que la derivada d'un fasor sempre és un fasor amb la mateixa freqüència; en canvi les derivades de sinus i cosinus es van barrejant. Tindrem que

$$\dot{\mathbf{V}}_p(t) = \mathbf{A} j\omega e^{j\omega t},$$

i substituint això a (61) queda

$$\mathbf{A} j\omega e^{j\omega t} + a\mathbf{A} e^{j\omega t} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}.$$

Com ja hem anunciat, tots els termes tenen la mateixa exponencial, que es pot simplificar, i resulta

$$(j\omega + a)\mathbf{A} = A_0 e^{j\varphi_0}.$$

El polinomi $j\omega + a$ de grau 1 en ω que multiplica a \mathbf{A} és el polinomi característic del sistema $p_1(s) = s + a$ calculat en $s = j\omega$. Aïllant \mathbf{A} queda

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{a + j\omega} e^{j\varphi_0},$$

i per tant el fasor que dóna el règim permanent és

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{a + j\omega} e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (65)$$

El nombre complex que apareix en el denominador de (65) s'anomena **impedància complexa** associada a l'EDO (59) de primer ordre,

$$\mathbf{Z} = a + j\omega = p_1(j\omega), \quad (66)$$

i es pot posar en forma exponencial com

$$\mathbf{Z} = \sqrt{a^2 + \omega^2} e^{j\phi}, \quad \phi = \arctan \frac{\omega}{a}. \quad (67)$$

El nom d'impedància complexa prové del fet que és la quantitat per la qual hem de dividir el fasor que representa la força³ per tal d'obtenir el fasor que representa la velocitat:

$$\mathbf{A}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}, \quad \mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{\mathbf{Z}} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \Rightarrow \mathbf{V}_p(t) = \frac{\mathbf{A}(t)}{\mathbf{Z}}. \quad (68)$$

En la interpretació mecànica de l'EDO que estem considerant, la part real de \mathbf{Z} , que val a , és de fet el valor de γ/m , el coeficient de fregament dividit per la massa. Podem pensar que al sistema massa amb fregament li apliquem una força i ell respon amb una velocitat, i que \mathbf{Z} és el grau d'oposició del fregament a la força aplicada, ja que \mathbf{Z} apareix dividint (d'aquí el nom *impedància*). El terme és va originar en teoria de circuits, on la part real de \mathbf{Z} és la resistència elèctrica, \mathbf{A} és el fasor voltatge i \mathbf{V}_p és el fasor corrent, però s'utilitza en tots els àmbits de l'enginyeria.

Posant la forma exponencial de \mathbf{Z} a (65) i ajuntant les exponencials queda

$$\mathbf{V}_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j(\omega t + \varphi_0 - \phi)}. \quad (69)$$

La velocitat física serà la part imaginària d'això

$$v_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0 - \phi), \quad (70)$$

³De fet, la força dividida per la massa.

L'amplada de les oscil·lacions de la velocitat en règim permanent és per tant

$$V(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad (71)$$

i, amb els paràmetres del sistema fixats i A_0 donada, és una funció de la freqüència ω de la força aplicada. Aquesta amplada és màxima quan el denominador és mínim, i això passa quan $\omega = 0$, és a dir, quan la força aplicada és, de fet, constant i de fet no hi ha oscil·lació (que es pot pensar com el límit quan la freqüència és molt petita i les oscil·lacions infinitament lentes). Veurem que en el cas de segon ordre la situació és ben diferent, i la màxima amplitud de les oscil·lacions s'obté amb una freqüència no nul·la. El valor màxim de de l'amplada de la solució és llavors

$$V_{\max} = \frac{A_0}{a}, \quad (72)$$

que, amb la interpretació mecànica $A_0 = F_0/m$ i $a = \gamma/m$ dóna F_0/γ , és a dir, la velocitat tal que la força de fregament iguala la força aplicada.

Sigui l'EDO lineal de segon ordre amb coeficients constants en la notació canònica

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (73)$$

La interpretació mecànica d'aquesta equació és que x és la posició d'una partícula de massa m sotmesa a una força elàstica $-kx$, un fregament $-\gamma\dot{x}$, i una força externa $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (74)$$

Dividint per m i identificant els paràmetres hom té

$$A_0 = \frac{F_0}{m}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{\gamma}{2\omega_n m} = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}. \quad (75)$$

Aplicant el mateix mètode de complexificació que en el cas d'ordre 1, escrivim

$$\ddot{\mathbf{X}} + 2\xi\omega_n\dot{\mathbf{X}} + \omega_n^2\mathbf{X} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (76)$$

Suposant que $\xi > 0$, existeix un règim permanent per al qual busquem una solució en forma de fador

$$\mathbf{X}_p(t) = \mathbf{A} e^{j\omega t}. \quad (77)$$

Hom té $\dot{\mathbf{X}}_p(t) = j\omega\mathbf{A} e^{j\omega t}$, $\ddot{\mathbf{X}}_p(t) = -\omega^2\mathbf{A} e^{j\omega t}$ i, substituint a (76) i cancel·lant l'exponencial complexa comuna, és possible calcular \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \frac{A_0 e^{j\varphi_0}}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j}. \quad (78)$$

Substituint (78) a (77), hom obté el fasor que dóna la solució en règim permanent

$$\mathbf{X}_p(t) = \frac{A_0}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j} e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (79)$$

El fasor velocitat és ara

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_p(t) &= \dot{\mathbf{X}}_p(t) = \frac{j\omega A_0}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_n\omega j} e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \frac{A_0}{2\xi\omega_n + j\left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}\right)} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \\ &= \frac{A_0}{\mathbf{Z}} e^{j(\omega t + \varphi_0)}, \end{aligned} \quad (80)$$

on hem definit la impedància complexa associada a l'EDO (73)

$$\mathbf{Z} = 2\xi\omega_n + j\left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}\right). \quad (81)$$

A l'igual que en el cas d'ordre 1, aquesta impedància es pot interpretar com el quocient entre la força aplicada i la velocitat resultant. En notació exponencial,

$$\mathbf{Z} = \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}\right)^2} e^{j\phi}, \quad \text{amb} \quad \tan \phi = \frac{\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}}{2\xi\omega_n}. \quad (82)$$

El fasor de posició es pot escriure també en termes de la impedància complexa, notant que

$$\mathbf{X}_p(t) = \frac{\mathbf{V}_p(t)}{j\omega}$$

i per tant, emprant que $\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$,

$$\mathbf{X}_p(t) = \frac{1}{j\omega} \frac{A_0}{\mathbf{Z}} e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \frac{A_0}{\omega \mathbf{Z}} e^{j(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2} - \phi)}, \quad (83)$$

on hem definit la impedància escalar (el mòdul de la impedància complexa)

$$Z = |\mathbf{Z}| = \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}\right)^2}. \quad (84)$$

La posició física $x_p(t)$ és la part imaginària de $\mathbf{X}_p(t)$

$$x_p(t) = \frac{A_0}{\omega Z} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2} - \phi\right), \quad (85)$$

i té oscil·lacions d'amplitud

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\omega Z} = \frac{A_0}{\omega \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 + \left(\omega - \frac{\omega_n^2}{\omega}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{4\xi^2\omega_n^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2}}. \quad (86)$$

Aquesta amplitud és una funció de ω , i serà màxima quan l'expressió dins l'arrel del denominador

$$f(\omega) = 4\xi^2\omega_n^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2 \quad (87)$$

sigui mínima. Calculant la derivada i igualant a zero s'obté

$$f'(\omega) = 8\xi^2\omega_n^2\omega + 4(\omega^2 - \omega_n^2)\omega = 0.$$

Els punts crítics són $\omega = 0$ i, si $1 - 2\xi^2 > 0$,

$$\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

Suposant que $1 - 2\xi^2 > 0$, és a dir, que

$$\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

i per tant, com que ξ ha de ser positiu, que $\xi \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, es pot veure que $\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$ dona un mínim (absolut) de $f(\omega)$, mentre que $\omega = 0$ és un màxim. Per tant, sota les condicions establertes, l'amplada de les oscil·lacions en règim estacionari és màxima per a la **freqüència de ressonància en amplitud**

$$\omega_A = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (88)$$

L'amplitud de les oscil·lacions de ressonància és

$$A_{\text{màx}} = A(\omega_A) = \frac{A_0}{2\xi\omega_n^2\sqrt{1 - \xi^2}},$$

que es fa molt gran quan el sistema està poc esmorteït, és a dir quan el paràmetre sense dimensions

$$|\xi| = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}$$

és molt petit (estem suposant que $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ i per tant ξ no pot ser proper a 1). En termes dels paràmetres mecànics, l'amplitud de les oscil·lacions és

$$A_{\text{màx}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{mk} - \frac{\gamma^4}{4k^2m^2}}}.$$

Fixem-nos que F_0/k és l'amplitud del desplaçament resultant d'aplicar una força constant F_0 , i que la força de la mateixa magnitud però amb variació sinusoidal amb freqüència ω_A , o propera a ella, fa que l'amplitud pugui ser molt més gran. La Figura 2 mostra les corbes de ressonància en amplitud, que indiquen com varia l'amplada de les oscil·lacions al variar la freqüència ω del senyal d'entrada. Aquestes corbes són les gràfiques de la funció

$$r\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \omega_n^2 \frac{A(\omega)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1\right)^2}}$$

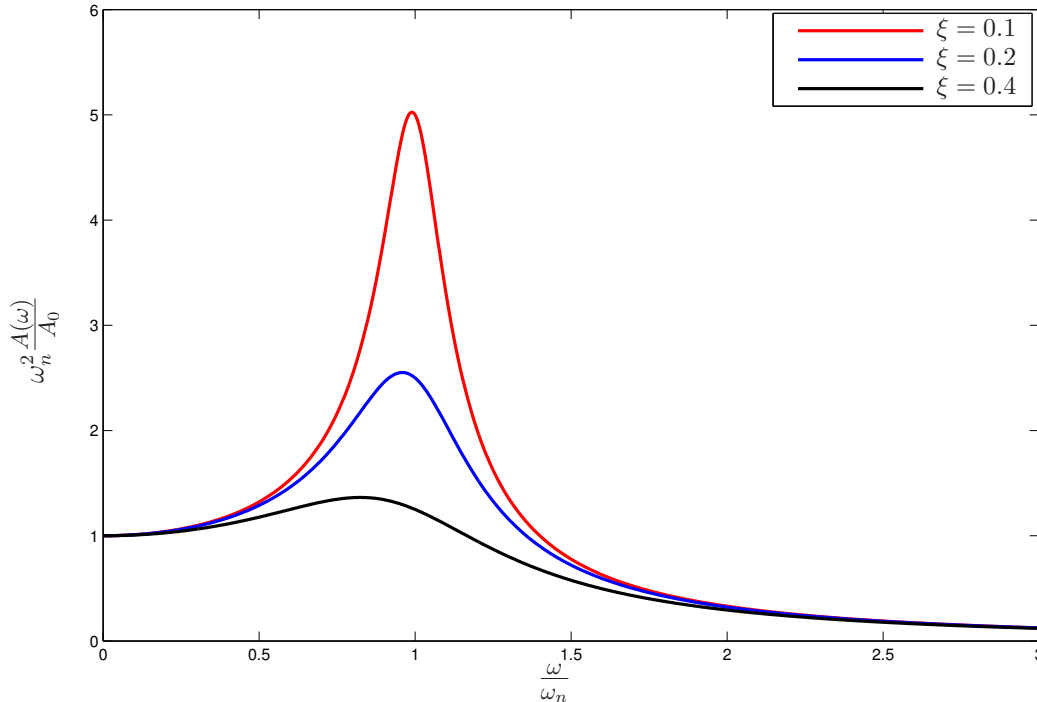


Figura 2: Corbes de ressonància en amplitud per a diferents valors del paràmetre d'esmoreïment ξ , en funció del quocient ω/ω_n .

per a diversos valors del paràmetre d'esmoreïment ξ . Per a freqüència ω molt petita (comparada amb ω_n), totes tendeixen a 1, mentre que per a freqüència ω molt gran (comparada de nou amb ω_n) totes tendeixen a zero.⁴ En mig, sempre que $\xi < 1/\sqrt{2}$, tenen un màxim que es fa més pronunciat com més petit és ξ (el màxim està en $\omega/\omega_n = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, que s'acosta a $\omega/\omega_n = 1$ quan $\xi \rightarrow 0$). De la gràfica es veu, per exemple, que per a $\xi = 0.1$ l'amplitud de les oscil·lacions resultants a la freqüència de ressonància és unes 5 vegades més gran que la que resultaria d'una excitació de la mateixa magnitud però constant. Per a $\xi \rightarrow 0$, l'amplitud de les oscil·lacions a la vora de $\omega = \omega_n$ es fa tant gran com es vulgui.

A més de la freqüència de ressonància en amplitud ω_A , també és important la freqüència de ressonància en energia o potència, ω_P , que és la freqüència de la força sinusoidal tal que aquesta transmet la màxima potència al sistema. Això requereix que la impedància Z sigui real, de manera que no hi hagi diferència de fase entre el fador força i el fador velocitat, i de (81) es veu que això

⁴Aquesta característica, que l'amplitud de les oscil·lacions sigui negligible per a freqüències d'excitació prou grans, és pròpia de tots els sistemes físics. Intuïtivament, si l'acció sobre un sistema oscil·la la massa de pressa, aquest no té temps de moure's abans de que l'acció canviï de signe. Es diu que els sistemes físics són sistemes **passa-baixos**.

passa per a $\omega = \omega_n$. Per tant $\omega_P = \omega_n$. De (88) es veu que

$$\omega_A \leq \omega_P$$

i que les dues freqüències de ressonància sols són iguals si $\xi = 0$, és a dir, si no hi ha dissipació. La diferència entre les dues freqüències de ressonància és deguda a que la potència que l'excitació sinusoidal introdueix en el sistema es reparteix entre la que s'acumula en forma d'oscil·lacions i la que es dissipa. La ressonància en amplitud maximitza la primera, mentre que la ressonància en potència maximitza la total. Òbviament, si no hi ha dissipació ($\xi = 0$), les dues han de ser iguals, donat que llavors tota la potència s'acumula en forma d'energia d'oscil·lació.

El fenomen de la ressonància, en amplitud o en potència, s'utilitza abastament en nombrosos camps de la ciència i l'enginyeria. És el que permet, per exemple, sintonitzar un aparell receptor d'ones electromagnètiques. En aquest cas, el que es fa és variar la freqüència natural ω_n del circuit connectat a l'antena, de manera que ressoni amb la freqüència del senyal que es vol capturar. Això fa que sigui aquest senyal el que comuniqui més potència al circuit, molt per sobre de tots els altres senyals de freqüències diferents. De fet, observant les corbes de ressonància, es veu que són molt més selectives (tenen el màxim més pronunciat) com més petit és ξ . En enginyeria elèctrica i electrònica de comunicacions s'utilitza un paràmetre per quantificar aquest fet, l'anomenat **factor** Q , que en termes del paràmetre d'esmoreïment és

$$Q = \frac{1}{2\xi}.$$

D'aquesta manera, com més petit és ξ més gran és Q : els circuits receptors de qualitat han de tenir, per tant, un factor Q molt gran. De (75) tenim que el factor Q d'un oscil·lador mecànic format per una massa amb fregament acoblada a una molla és

$$Q_M = \frac{\sqrt{km}}{\gamma},$$

mentre que de (51) s'obté que el factor Q d'un circuit RCL sèrie és

$$Q_{RCL} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

El factor Q es pot definir en general, en termes de la potència útil i de la dissipada, per a sistemes diferents del donat per l'EDO que hem considerat.

Una situació més casolana on la freqüència de ressonància juga un paper es dona al empènyer un gronxador. Si idealitzeu el gronxador i el seu ocupant com un pèndol simple, la seva freqüència natural és

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

que correspon a un període

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

on g és el valor de la gravetat i L la longitud del pèndol. La màxima efectivitat s'obtindria empènyent el gronxador amb una força sinusoidal d'aquest període, però això és impossible de fer a la pràctica. El més còmode és empènyer breument després que el gronxador hagi assolit la màxima alçada en el costat en el que estem nosaltres. Això correspon a un senyal periòdic de període T , tal com ha de ser, però que no és sinusoidal; l'anàlisi de Fourier permet demostrar que l'harmònic principal és dominant i és una sinusoide amb la freqüència correcta, de manera que una bona part de la potència que desenvolupem es transmet de manera òptima al gronxador. Empènyer amb un període menor o superior a T fa que hi hagi intervals de temps on, en lloc de comunicar energia al gronxador, n'estem extraient. Aquest és, de fet, un exemple on l'accionament (nosaltres) s'adapta automàticament a la freqüència natural del sistema.

El fenomen de la ressonància també pot ser destructiu, com per exemple quan es trenca una copa de vidre per la veu humana emetent amb prou potència i amb la nota adient (que ressoni amb una freqüència natural de la copa, que a més ha de tenir les característiques geomètriques i materials per a que el paràmetre d'esmoreïment sigui prou petit). Un altre exemple és la tradicional ordre de trencament del pas quan una columna d'infanteria travessa un pont, per evitar que el pas sincronitzat produeixi una excitació de prou magnitud amb una component freqüencial propera a alguna freqüència estructural del pont.

En els llibres de física s'acostuma a citar l'esfondrament de la secció central del pont de l'estret de Tacoma, l'any 1940, a l'estat de Washington, USA,⁵ degut al fort vent, com a exemple de ressonància destructiva. En realitat, el consens actual és que en aquest cas el desastre va ser degut a l'**aleteig aeroelàstic**, que també implica una ressonància però amb una realimentació positiva entre el moviment de l'estructura i la càrrega aerodinàmica, que fa que l'amplitud de l'excitació creixi amb la del moviment. L'aleteig aeroelàstic va ser també la causa de la desintegració en vol de dos avions de passatgers *Lockheed Electra L-188A* els anys 1959 i 1960. Els començaments de l'aviació comercial amb reactors van ser força complicats, degut al poc coneixement dels fenòmens dinàmics implicats. Per exemple, l'any 1954 dos *Havilland Comet 1* es van trencar en vol degut a un fenomen diferent, anomenat fatiga de materials.

5 Sistemes de control: funció de transferència, resposta impulsiva i teorema de convolució

Considerarem ara una classe de sistemes lineals d'ordre n on el vector $b(t)$ conté una única funció $u(t)$ que considerem no fixada, i a més hi ha una funció lineal y de les variables dependents del sistema i de les seves derivades fins, com a màxim, un ordre inferior a la màxima derivada de cada variable que apareix en el sistema. Això s'anomena un *sistema de control* amb una entrada $u(t)$ i una sortida y .

Fent la transformada de Laplace del sistema lineal i posant condicions inicials nul·les, s'obté una relació entre la transformada de Laplace $U(s)$ de $u(t)$ i la transformada de Laplace $Y(s)$ de y ,

⁵Vegeu, per exemple, <http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw>.

que s'anomena *funció de transferència* del sistema de control amb entrada $u(t)$ i sortida y .

Sigui per exemple l'EDO d'ordre 2

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = u(t) \quad (89)$$

amb la sortida

$$y = \dot{x} + x. \quad (90)$$

Com que l'EDO és d'ordre 2 en x , la sortida pot dependre linealment de x i de \dot{x} , però no de \ddot{x} . Per tant la sortida lineal més general que podríem considerar per aquesta EDO és⁶

$$y = a\dot{x} + bx, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

de la qual (90) n'és un cas particular amb $a = b = 1$. Prenent la transformada de Laplace de (89) resulta

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + sX(s) - x(0) + 2X(s) = U(s),$$

d'on

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}U(s) + \frac{(s+1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + s + 2}. \quad (91)$$

Això dona la relació entre $U(s)$ i $X(s)$, però volem la relació entre $U(s)$ i $Y(s)$. Transformant (90) s'obté

$$Y(s) = sX(s) - x(0) + X(s) = (s+1)X(s) - x(0), \quad (92)$$

i, posant-hi (91),

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 2}U(s) + (s+1)\frac{(s+1)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + s + 2} - x(0). \quad (93)$$

Si posem $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, queda una relació lineal entre $U(s)$ i $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 2}U(s) = H(s)U(s), \quad (94)$$

on

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 2} \quad (95)$$

és la funció de transferència de l'entrada u a la sortida y . Per a sistemes estables, la funció de transferència determina el comportament en règim permanent de la sortida del sistema. Els termes que contenen les condicions inicials donen la forma del transitori; la velocitat amb què desapareixen depèn, però, dels zeros del polinomi característic $P(s) = s^2 + s + 2$.

L'antitransformada de la funció de transferència, $h(t)$ s'anomena *resposta impulsiva* del sistema de control amb entrada u i sortida y :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (96)$$

⁶Podríem també afegir un terme proporcional a u , però això introduiria el tipus de transformada de Laplace que correspon a funcions no admissibles, del tipus impulsiu.

i veurem tot seguit que dóna informació sobre la resposta temporal del sistema. Per al sistema que estem considerant

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2+s+2} \right\} = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{7}} e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t. \quad (97)$$

Com ja sabem, la transformada de Laplace del producte de funcions no és el producte de les transformades:

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq F(s)G(s). \quad (98)$$

Hom pot preguntar-se, però, si l'antitransformada de $F(s)G(s)$ està relacionada d'alguna manera senzilla amb $f(t)$ i $g(t)$. La resposta és que sí (depenent del que entenguem per senzill). Donades dues funcions $f(t)$ i $g(t)$, el seu *producte de convolució* és una nova funció $(f \star g)(t)$ definida per

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau, \quad (99)$$

per a tots aquells valors de t per als que existeixi la integral. En alguns casos escriurem $f(t) \star g(t)$ en lloc de $(f \star g)(t)$. Els següents exemples il·lustren alguns casos senzills.

$$f(t) = t, g(t) = t$$

$$t \star t = \int_0^t (t-\tau)\tau d\tau = \left(t \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}. \quad (100)$$

$$f(t) = 1, g(t) = \theta(t-a), a > 0$$

$$1 \star \theta(t-a) = \int_0^t 1 \cdot \theta(\tau-a) d\tau = \int_0^t \theta(\tau-a) d\tau. \quad (101)$$

La integral és entre $\tau = 0$ i $\tau = t$, i l'integrand sol és diferent de zero si $\tau > a$, tal com mostra, en el cas $t > a$, la Figura 3. Si t es desplaça a l'esquerra d' a , és a dir, si $t < a$, la funció val zero a tot l'interval d'integració i el resultat dóna la funció nul·la. Si $t > a$, la integral queda

$$\int_a^t d\tau = t - a.$$

Posant els dos casos junts amb l'ajuda de la funció de Heaviside, s'obté

$$1 \star \theta(t-a) = (t-a)\theta(t-a). \quad (102)$$

L'exemple (102) mostra que la funció constant igual a 1 no és l'element neutre del producte de convolució. El producte de convolució és, però, commutatiu, i això ajuda de vegades a calcular-lo:

$$f(t) \star g(t) = g(t) \star f(t). \quad (103)$$

Estem ara en condicions de donar el resultat que indica què val l'antitransformada d'un producte de transformades.

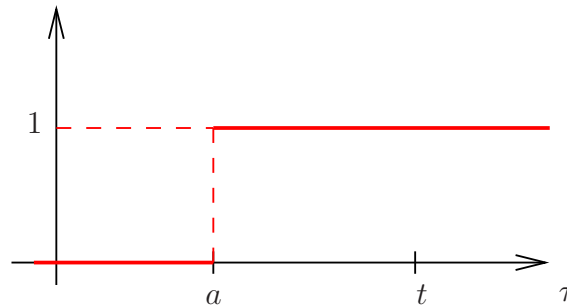


Figura 3: Convolució de la funció constant 1 amb la funció de Heaviside $\theta(t - a)$.

P12 Teorema de convolució

La transformada del producte de convolució és el producte de transformades

$$\mathcal{L}\{f(t) \star g(t)\} = F(s)G(s) \quad (104)$$

o, recíprocament, l'antitransformada del producte de transformades és el producte de convolució d'antitransformades

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) \star g(t). \quad (105)$$

Volem aplicar ara aquest resultat al cas de sistemes de control. Sabem que, amb condicions inicials nul·les,

$$Y(s) = H(s)U(s). \quad (106)$$

Antitransformant tindrem

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}, \quad (107)$$

i, emprant (105),

$$y(t) = h(t) \star u(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau) \, d\tau, \quad (108)$$

on $h(t)$ és la resposta impulsiva del sistema de control, $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. Podem dir per tant que

amb condicions inicials nul·les, la sortida $y(t)$ en el domini temporal es pot obtenir calculant el producte de convolució de la resposta impulsiva $h(t)$ amb l'entrada $u(t)$.

Aquest no és normalment un mètode de càlcul massa eficient, a menys que hom tingui de bon començament la resposta impulsiva $h(t)$. En canvi, és un resultat important per a l'anàlisi dels sistemes de control, ja que permet interpretar $h(t)$, justificant el seu nom. Per a fer-ho, escollim una entrada $u(t) = \delta_\epsilon(t)$, la forma de la qual depèn d'un paràmetre $\epsilon > 0$, donada per

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } t < \epsilon, \\ 0 & \text{si } t > \epsilon. \end{cases}, \quad \text{amb } \epsilon > 0, \quad (109)$$

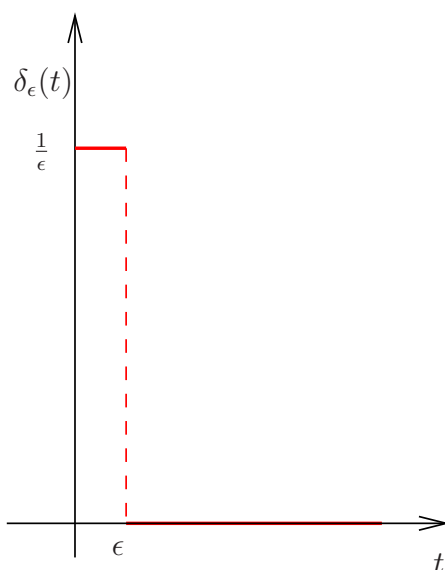


Figura 4: La funció $\delta_\epsilon(t)$, que aproxima un impuls per a ϵ petit.

si $t \geq 0$ i nul·la per a t negatiu. Aquesta funció apareix representada a la Figura 4. Com més petit és $\epsilon > 0$, més petita és la base on la funció és diferent de zero i més gran és el seu valor $\frac{1}{\epsilon}$, però l'àrea sota la funció val sempre $\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = 1$. Per a ϵ petit respecte a algun temps característic del sistema on s'utilitzi aquesta entrada, la funció $\delta_\epsilon(t)$ pot utilitzar-se per representar una entrada impulsiva, de duració molt curta però d'efecte total constant (1 en aquest cas). El límit $\epsilon \rightarrow 0$ no és, però una funció admissible, i de fet ni tant sols és una funció, sinó el que s'anomena una distribució o funció generalitzada, que en aquest cas es coneix com *delta de Dirac* a l'origen i es denota per $\delta(t)$.

La sortida d'un sistema amb resposta impulsiva $h(t)$, amb condicions inicials nul·les, quan l'entrada és $u(t) = \delta_\epsilon(t)$ és, segons (108),

$$y(t) = h(t) \star \delta_\epsilon(t) = \int_0^t h(\tau) \delta_\epsilon(t - \tau) d\tau, \quad (110)$$

on estem suposant que $t > \epsilon$, és a dir, donem temps a que l'excitació $\delta_\epsilon(t)$ hagi actuat completament. La funció δ_ϵ sols és diferent de zero, i llavors val $\frac{1}{\epsilon}$, quan el seu argument és més petit que ϵ . En el cas de $\delta_\epsilon(t - \tau)$, això vol dir que sols hem de considerar aquells τ tals que $t - \tau < \epsilon$, és a dir $\tau > t - \epsilon$. Per tant la integral de (110) es converteix en

$$y(t) = \int_{t-\epsilon}^t h(\tau) \frac{1}{\epsilon} d\tau = \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\epsilon}^t h(\tau) d\tau. \quad (111)$$

Suposant que $h(t)$ és una funció contínua en t , podem utilitzar el teorema del valor mitjà per a

l'integral i escriure

$$y(t) = \frac{1}{\epsilon} h(\xi) \epsilon = h(\xi), \quad (112)$$

on ξ és un valor (desconegut *a priori*) entre $t - \epsilon$ i t . Quan ϵ es fa cada vegada més petit, el valor de ξ , encara que desconegut, és cada vegada més proper a t , i així

$$y(t) \approx h(t). \quad (113)$$

Per tant

la sortida d'un sistema lineal amb coeficients constants quan l'entrada és una funció de tipus quasi-impulsiu $\delta_\epsilon(t)$, i amb condicions inicials nul·les, s'acosta a la resposta impulsiva $h(t)$ del sistema. El grau d'aproximació és tant millor com més petit és ϵ (en comparació amb el temps característic del sistema). Aquest fet és el que justifica el nom de $h(t)$.

Aquest resultat obre la porta a obtenir $h(t)$, l'antitransformada de $H(s)$, de manera experimental, alimentant el sistema amb entrades del tipus de la de la Figura (4) per a ϵ prou petit, mesurant la sortida i ajustant-la a una corba en termes d'exponencials, sinus i cosinus. Transformant el resultat per Laplace s'obté llavors $H(s)$ i d'aquí es pot llegir el polinomi característic i per tant es pot escriure un sistema d'EDO lineals que representen el comportament del sistema. És possible així obtenir informació detallada sobre les equacions diferencials d'un sistema lineal examinant el seu comportament experimental; de fet, variants d'aquest mètode, que utilitzen directament la mesura experimental de $H(s)$, són àmpliament utilitzades als laboratoris i a la indústria. Aquesta àrea de l'enginyeria és coneix sota el nom de *teoria de la identificació de sistemes*.

A Equivalències entre sistemes mecànics i elèctrics

Com hem vist al llarg del tema, el sistema mecànic format per una massa (m) amb fregament lineal (γ), una molla (k) i una força externa ($F(t)$), i el sistema elèctric format per una inductància (L), un condensador (C), una resistència (R) i una font de tensió ($V(t)$) en sèrie, es poden descriure en termes de l'EDO lineal de segon ordre amb coeficients constants

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = u(t).$$

La Taula 1 mostra la relació de paràmetres i variables en cada cas. Com que el sistema general sols té 2 paràmetres (ξ i ω_n), no és possible obtenir les relacions inverses (els 3 paràmetres dels sistemes particulars en termes dels 2 del general).

Sistema general	Sistema mecànic	Sistema elèctric
x	x (desplaçament)	q (càrrega del condensador)
$u(t)$	$\frac{F(t)}{m}$	$\frac{V(t)}{L}$
ω_n	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
ξ	$\frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{km}}$	$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$
	γ	R
	k	$\frac{1}{C}$
	m	L

Taula 1: Equivalències mecàniques i elèctriques amb un sistema general.

B Les 12+1 propietats de la transformada de Laplace

P0	Si $f(t)$ és admissible, llavors $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$
P1	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
P2	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
P3	$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
P4	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
P5	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$
P6	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(\nu)d\nu$
P7	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s) _{s \rightarrow s-a} = F(s-a)$
P8	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
P9	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt, f(t+T) = f(t)$
P10	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$
P11	$\mathcal{L}\{f(t-a)\theta(t-a)\} = e^{-as}F(s), a > 0$
P12	$\mathcal{L}\{f(t) \star g(t)\} = F(s)G(s)$

Taula 2: Taula final de propietats de la transformada de Laplace.

EQUACIONS DIFERENCIALS - ENGINYERIA INDUSTRIAL - EPSEVG

Tema 4 - Sèries de Fourier

CARLES BATLLE ARNAU

Departament de Matemàtica Aplicada 4
i
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials

Universitat Politècnica de Catalunya
EPSEVG, Av. V. Balaguer s/n, 08800 Vilanova i la Geltrú

Gener 2012

En aquest tema deixarem abandonem l'estudi de les EDO i ens centrarem a donar eines per analitzar funcions $f(t)$ periòdiques (que poden, en particular, ser solució d'una EDO o formar part del terme independent d'una EDO). Veurem també com estendre aquesta anàlisi a les seqüències de valors x_0, x_1, x_2, \dots , o funcions en *temps discret*. Els resultats que obtindrem formen el nucli matemàtic de les tecnologies de la informació i les telecomunicacions, i també del processat de senyals en entorns industrials.

1 Funcions periòdiques

Una funció $f(t)$ es diu que és periòdica si existeix $T > 0$ tal que

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{per a tot } t. \quad (1)$$

i es diu llavors també que T és un període de $f(t)$. Si T és un període de $f(t)$, també ho són $2T, 3T, \dots$. El valor de $T > 0$ més petit que verifica (1) s'anomena el **període fonamental** de $f(t)$. Si no diem res, s'entendrà que quan parlem del període d'una funció ens referim al seu període fonamental.

Les funcions periòdiques bàsiques són el sinus i el cosinus, que es poden donar amb període T arbitrari:

$$\sin \frac{2\pi t}{T}, \quad \cos \frac{2\pi t}{T}. \quad (2)$$

Per tant la funció

$$f(t) = \sin \alpha t$$

té període T tal que

$$\alpha = \frac{2\pi}{T},$$

és a dir,

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

La **frequència fonamental** d'una funció amb període (fonamental) T és

$$\nu_0 = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

mentre que la **frequència angular fonamental** és

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu_0. \quad (4)$$

Una manera molt senzilla de construir funcions periòdiques és definint-la sobre un interval de longitud arbitrària i repetint-la fora d'ell. Així, sent $g(t)$ una funció qualsevol, escriurem

$$f(t) = g(t) \quad \text{si } t \in [a, b), \text{ i estesa periòdicament fora de } [a, b). \quad (5)$$

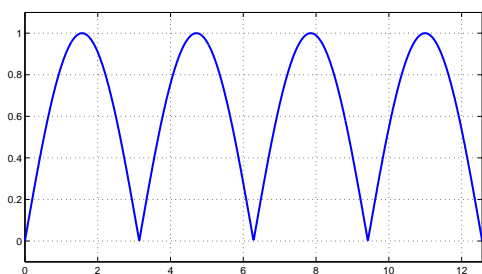
Això proporciona, per definició, una funció $f(t)$ amb període $T = b - a$ (que no és necessàriament el fonamental si $g(t)$ és ella mateixa periòdica amb un nombre enter de períodes en $[a, b)$). Encara que $g(t)$ sigui contínua, la funció periòdica $f(t)$ que s'obté no ho serà si $g(a) \neq g(b)$.

La Figura (1) mostra diverses funcions periòdiques construïdes d'aquesta manera. Així, la funció de la Figura 1(a), amb període $T = \pi$, està definida per

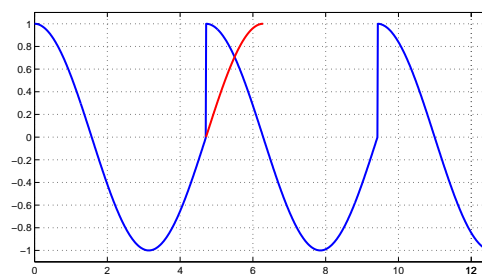
$$f(t) = \sin t \text{ si } t \in [0, \pi), \text{ i estesa periòdicament fora de } [0, \pi).$$

Cal notar que aquesta funció, a diferència de les altres tres, es pot definir també de manera compacte com

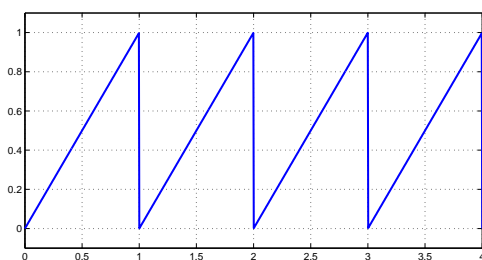
$$f(t) = |\sin t|.$$



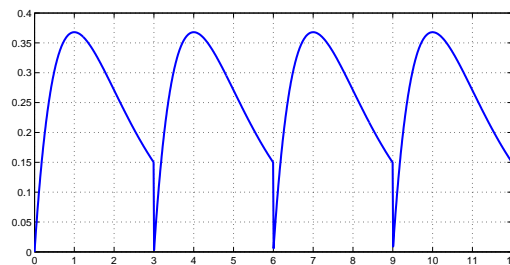
(a) $f(t) = \sin t$ amb període π .



(b) $f(t) = \cos t$ amb període $3\pi/2$.



(c) $f(t) = t$ amb període 1.



(d) $f(t) = te^{-t}$ amb període 3.

Figura 1: Diverses funcions periòdiques. Els segments verticals de les tres darreres figures indiquen discontinuïtats de salt. A la Figura 1(b) hi apareix en **vermell** la part de la gràfica de $\cos t$ que manca per completar-ne un període natural.

La suma de funcions periòdiques sols dóna una funció periòdica si els períodes implicats, T_1 i T_2 són commensurables, és a dir, existeixen enters positius p i q tals que

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}. \quad (6)$$

Això és equivalent a demanar que el quocient T_1/T_2 sigui racional. Així,

$$f(t) = \sin 3t + 2 \cos 4t$$

és una funció periòdica, ja que $T_1 = 2\pi/3$, $T_2 = 2\pi/4 = \pi/2$ i llavors $T_1/T_2 = 4/3$, que és racional. El període de la funció total és el T més petit tal que existeixen enters positius m i n de manera que

$$\begin{aligned} 3(t+T) &= 3t + m2\pi, & \text{d'on } 3T &= m2\pi, \\ 4(t+T) &= 4t + n2\pi, & \text{d'on } 4T &= n2\pi. \end{aligned}$$

Igualant les dues expressions per a T queda

$$\frac{m}{3} = \frac{n}{4}.$$

Els enters positius més petits positius que verifiquen això són $m = 3$, $n = 4$, i s'obté llavors $T = 2\pi$. En canvi,

$$f(t) = \sin 3t - \cos \pi t$$

no és una funció periòdica. Es té que $T_1 = 2\pi/3$, $T_2 = 2\pi/\pi = 2$ i el quocient és $T_1/T_2 = \pi/3$, que no és racional.

A començament del segle XIX Jean-Baptiste-Joseph Fourier, estudiant els fenòmens relacionats amb la conducció de la calor, va arribar a la conclusió de que qualsevol funció periòdica es podia posar com una suma infinita de funcions sinus i cosinus amb períodes submúltiples del període de la funció o, en termes de freqüències, amb freqüències múltiples de la freqüència fonamental de la funció. Encara que la versió original d'aquest resultat no era del tot correcta, poc abans de la mort de Fourier el 1830 la teoria de les **sèries de Fourier** va ser posada sobre bases sòlides per d'altres matemàtics, entre ells Dirichlet, el resultat del qual veurem.

El resultat de Fourier és rellevant per a la teoria d'equacions diferencials perquè permet escriure una funció periòdica qualsevol, amb certes restriccions que sempre es satisfan per a les funcions que hom troba a les aplicacions, com a suma infinita de sinus i cosinus. Si $u(t)$, amb període fonamental T , és el terme independent d'una EDO com

$$a\dot{x} + bx = u(t), \quad \text{o} \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u(t),$$

llavors

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (7)$$

on els coeficients a_0 , a_n i b_n es poden calcular a partir de $u(t)$. Per a cada sinus i cosinus de la suma, amb freqüències cada vegada més grans, és possible, tal com hem vist en el tema 2, calcular la solució particular de l'EDO lineal amb coeficients constants que estiguem estudiant. Pel principi de superposició de les EDO lineals, la solució particular corresponent a la funció periòdica original serà llavors la suma (infinita) de les solucions corresponents als diferents sinus i cosinus, amb pesos iguals als coeficients que apareixen a (7). Encara que hom pot pensar que treballar amb sumes infinites, també anomenades sèries, no té sentit, és possible, de fet, situar-les sobre bases rigoroses i, a més, a la pràctica els coeficients a_n , b_n es fan petits quan n es fa gran, de manera que, en general, *tallant* la sèrie per a algun valor de n prou gran s'obtenen aproximacions prou bones de la solució.

La teoria de les sèries de Fourier no tant sols és important per a les equacions diferencials, sinó que els resultats i generalitzacions que s'en deriven, com ara la **transformada discreta de Fourier** (que veurem) i la **transformada integral de Fourier** (que no veurem) són fonamentals per a la codificació i transmissió de senyals, i formen la part més important de la base matemàtica de les telecomunicacions.

2 Sèrie de Fourier d'una funció periòdica

Sigui $f(t)$ una funció periòdica amb període T . Deixant de moment de banda el significat d'una suma infinita, o sèrie, ens proposem representar-la com

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (8)$$

amb uns coeficients $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ i $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ que haurem de calcular. El membre dret de (8) conté un primer terme constant (el 2 que hi divideix es posa per conveniència, com veurem de seguida) i després funcions sinus i cosinus de freqüències cada vegada més grans, començant pels termes amb $n = 1$, que tenen el període de $f(t)$. La suma resultant és periòdica, ja que dos termes qualsevol, amb períodes

$$T_n = \frac{2\pi}{2\pi n/T} = \frac{T}{n} \quad \text{i} \quad T_m = \frac{2\pi}{2\pi m/T} = \frac{T}{m}$$

són commensurables, i de fet el període de la suma infinita és T , ja que tots els períodes presents, incloent-hi el fonamental, estan continguts a T un nombre enter de vegades.

El coeficient a_0 es pot calcular directament integrant (8) entre $t = 0$ i $t = T$:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T \cos \frac{2\pi nt}{T} dt + b_n \int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} dt \right) = \frac{a_0}{2} T,$$

on hem fet servir que la integral d'un sinus o cosinus sobre un interval múltiple del seu període és zero. Queda així

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (9)$$

El coeficient a_0 és, per tant, dues vegades el valor mitjà de $f(t)$ sobre un període.

Per calcular la resta de coeficients cal emprar els resultats següents

$$\int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T} dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$\int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\int_0^T \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = \frac{T}{2} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

on δ_{nm} , la delta de Kronecker, val 1 si $n = m$ i 0 altrament. Aquestes integrals es calculen emprant les identitats trigonomètriques

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B)), \quad (13)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B)), \quad (14)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B)), \quad (15)$$

i tenint en compte que la integral entre 0 i T dels sinus i cosinus resultants sempre val zero, a menys que sigui un cosinus amb argument zero i per tant valor constant igual a 1.

Per obtenir la resta de coeficients multipliquem primer (8) per $\cos \frac{2\pi mt}{T}$, $m = 1, 2, \dots$ i integrem entre $t = 0$ i $t = T$:

$$\int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^T \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt + b_n \int_0^T \sin \frac{2\pi nt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T} dt \right). \quad (16)$$

El primer terme de la dreta de (16) és zero degut a que tenim la integral de $\cos \frac{2\pi mt}{T}$, amb $m \neq 0$, sobre un nombre enter de períodes T/m . Degut a (11), totes les integrals de sinus per cosinus són zero, i emprant (12), l'única integral de cosinus per cosinus que no és zero és quan $n = m$, i llavors val $T/2$. Queda així

$$\int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt = a_m \frac{T}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

d'on

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

De manera similar, multiplicant (8) per $\sin \frac{2\pi mt}{T}$, $m = 1, 2, \dots$, integrant entre $t = 0$ i $t = T$, i emprant (10) i (11), s'arriba a

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Les expressions per a a_0 i a_m amb $m = 1, 2, \dots$ es poden escriure de manera conjunta, i s'obté així la forma final pel càlcul dels coeficients de la sèrie de Fourier:

Coefficients de la sèrie de Fourier. Donada una funció periòdica $f(t)$ amb període T , els coeficients de la seva sèrie de Fourier,

$$SF(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right),$$

es calculen mitjançant

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

En certes situacions farem aparèixer també b_0 , i el posarem sempre igual a zero. De fet, això és el que surt si a (19) poseu $m = 0$, sigui quina sigui la funció $f(t)$.

En qualsevol utilització pràctica hom ha de tallar la suma infinita en algun punt. S'obtenen llavors les **sumes parcials de la sèrie de Fourier**, on es consideren sols els n primers termes en sinus i cosinus, a més del terme constant:

$$SF_n(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right). \quad (20)$$

Cada terme de la sèrie de Fourier per a $n \geq 1$ es pot re-escriure com una única funció sinus, definint una fase ϕ_n tal que

$$\sin \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad (21)$$

$$\cos \phi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad (22)$$

suposant que a_n o b_n no són els dos nuls. Llavors

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\sin \phi_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \cos \phi_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n \right). \end{aligned} \quad (23)$$

El coeficient $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ s'anomena l'**amplitud** de l'harmònic n , i ϕ_n és la seva **fase**. S'obté una definició diferent de la fase si escrivim

$$A_n \sin \left(\frac{2\pi nt}{T} + \phi_n \right) = A_n \cos \left(\frac{2\pi nt}{T} + \varphi_n \right),$$

amb

$$\varphi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2}.$$

Discutirem més endavant (teorema de Dirichlet) en quin sentit la sèrie de Fourier d'una funció representa la mateixa, i per tant en quin sentit podem realment escriure que $f(t)$ és igual a la seva sèrie de Fourier, però anem ara a aplicar els resultats obtinguts en un parell d'exemples.

Sigui en primer lloc la funció de la Figura 1(c)

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 1) \quad (24)$$

i estesa periòdicament amb període $T = 1$. Tindrem

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{1} \int_0^1 t \, dt = 2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 1, \\ a_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 t \cos \frac{2\pi nt}{1} \, dt \\ &\stackrel{n \neq 0}{=} 2 \left(\frac{1}{2\pi n} t \sin 2\pi nt + \frac{1}{(2\pi n)^2} \cos 2\pi nt \right) \Big|_0^1 = 0, \\ b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 t \sin \frac{2\pi nt}{1} \, dt \\ &\stackrel{n \neq 0}{=} 2 \left(-\frac{1}{2\pi n} t \cos 2\pi nt + \frac{1}{(2\pi n)^2} \sin 2\pi nt \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

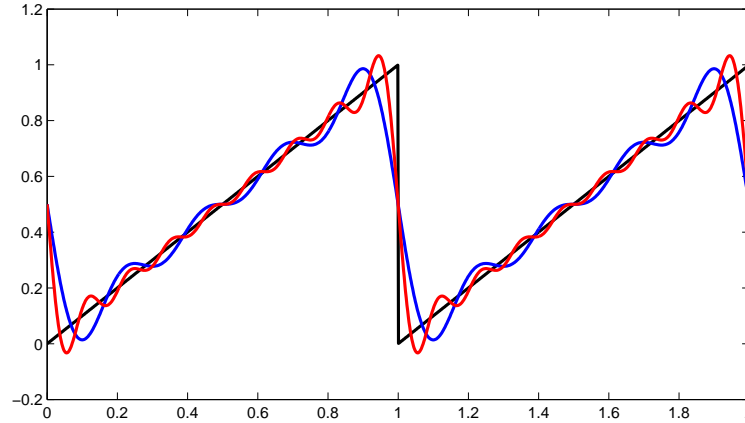


Figura 2: La funció $f(t) = t$ amb període $T = 1$, i les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier amb $n = 4$ (blau) i amb $n = 8$ (vermell).

La sèrie de Fourier de $f(t)$ és per tant

$$SF(f(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t. \quad (25)$$

La Figura 2 mostra la funció i les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier per a $n = 4$ (blau) i per a $n = 8$ (vermell). Cal observar que, en el centre del període, lluny d'on la funció $f(t)$ té les discontinuïtats de salt, el comportament de SF_4 i de SF_8 és molt semblant, però que vora d'una discontinuïtat l'aproximació de $f(t)$ per les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier es deteriora considerablement: al passar de $n = 4$ a $n = 8$ sols s'aconsegueix fer més petit l'interval on l'aproximació és dolenta, però no disminueix la magnitud del *sobrebot* abans i després de la discontinuïtat. Tornarem a discutir aquest fenomen més endavant.

Com a segon exemple, considerem la funció de la Figura 1(a)

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi) \quad (26)$$

i estesa periòdicament amb període $T = \pi$. El càlcul dels coeficients és ara

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} (-\cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos \frac{2\pi n t}{\pi} \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos 2nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1-2n)t + \sin(1+2n)t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{1-2n} \cos(1-2n)t - \frac{1}{1+2n} \cos(1+2n)t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin \frac{2\pi n t}{\pi} \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin 2nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(1-2n)t - \cos(1+2n)t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-2n} \sin(1-2n)t - \frac{1}{1+2n} \sin(1+2n)t \right) \Big|_0^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

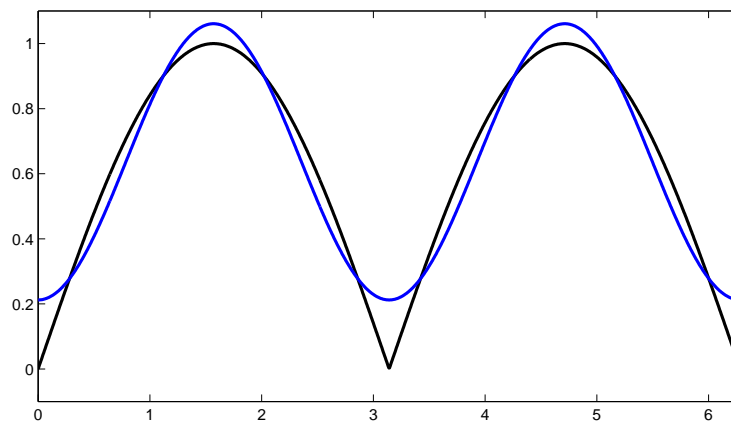


Figura 3: La funció $f(t) = \sin t$ amb període $T = \pi$, i la suma parcial de la seva sèrie de Fourier amb $n = 1$ (en blau).

on hem emprat que $1 - 2n$ i $1 + 2n$ són sempre senars i per tant $\cos(1 - 2n)\pi = \cos(1 + 2n)\pi = -1$.

La sèrie de Fourier de $f(t)$ sols té per tant el terme constant i els termes en cosinus, i és

$$SF(f(t)) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos 2nt. \quad (27)$$

La Figura 3 mostra la suma parcial amb $n = 1$. $SF_1(f(t))$ és simplement una constant més un cosinus de període π :

$$SF_1(f(t)) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cos 2t,$$

però això dóna ja una aproximació prou bona. Les figures 4(a) i 4(b) mostren les sumes parcials per a $n = 3$ i $n = 5$. Per a $SF_5(f(t))$ és difícil, excepte al voltant dels múltiples de π , distingir l'aproximació de la funció. La bona aproximació amb pocs termes de la sèrie de Fourier és una propietat comuna de les funcions que no tenen discontinuïtats de salt, en comparació amb les que en tenen.

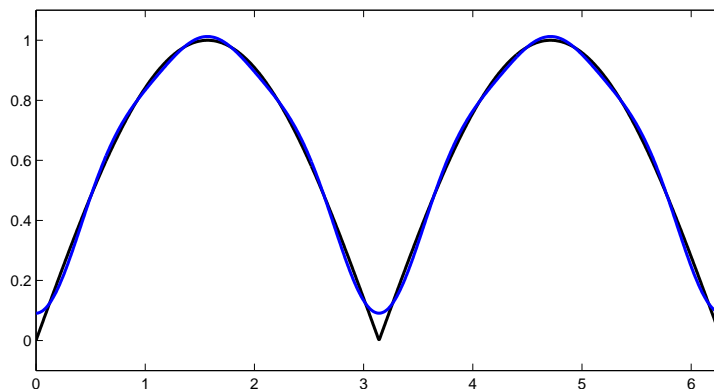
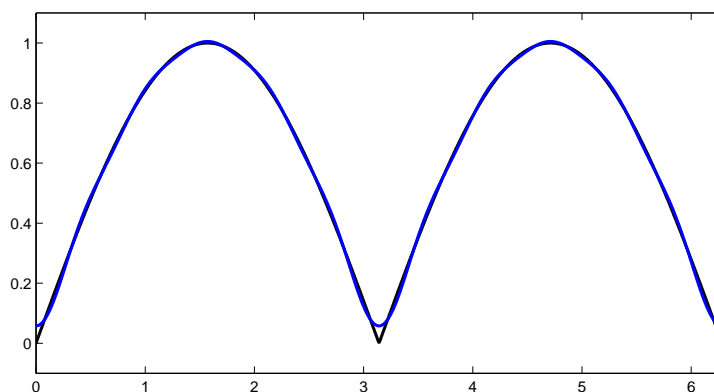
Aquests dos exemples mostren una característica general dels coeficients de la sèrie de Fourier d'una funció periòdica:

Els coeficients de la sèrie de Fourier d'una funció periòdica decauen amb n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Intuïtivament, les freqüències superiors (n gran) corregeixen la forma bàsica de les freqüències baixes. Per poder fer-ho han de tenir una amplada petita (en cas contrari canviarien totalment la contribució del terme constant i de la freqüència fonamental) i, com que hi ha zones on han d'actuar amb molta més intensitat que en altres, cal que tinguin realment freqüència elevada.

En els dos exemples que hem vist hi ha molts coeficients de la sèrie de Fourier que són zero: per a $f(t) = t$ amb període $T = 1$, tots els a_n excepte a_0 eren zero, mentre que per a $f(t) = \sin t$ amb període

(a) SF_3 (b) SF_5 .Figura 4: Sumes parcials de $\sin t$ amb període $T = \pi$.

$T = \pi$ tots els b_n eren nuls. Això no és una casualitat, i saber les condicions en les què passa ens pot estalviar la feina de calcular uns coeficients que seran zero.

Una funció $f(t)$ s'anomena **simètrica** si $f(-t) = f(t)$ per a tot t , i **antisimètrica** si $f(-t) = -f(t)$ per a tot t . Per a funcions periòdiques definides en $[0, T]$ i esteses periòdicament amb període T , aquestes condicions són equivalents a

SIMETRIA. $f(t)$ és simètrica si ho és respecte al centre del període:

$$f\left(\frac{T}{2} + t\right) = f\left(\frac{T}{2} - t\right), \quad t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

ANTISIMETRIA. $f(t)$ és antisimètrica si ho és respecte al centre del període:

$$f\left(\frac{T}{2} + t\right) = -f\left(\frac{T}{2} - t\right), \quad t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

La simetria o antisimetria d'una funció periòdica és fàcil de determinar mirant la seva gràfica. Per exemple, la funció de la Figura 1(a) és simètrica, mentre que les altres tres funcions de la Figura 1 no són ni simètriques ni antisimètriques. Cal notar però, que la funció de la Figura 1(c) és antisimètrica si se li resta un valor constant $1/2$.

Les funcions que tenen simetria o antisimetria tenen bones propietats respecte al producte:

- el producte de dues funcions simètriques és una funció simètrica.
- el producte d'una funció simètrica i una funció antisimètrica és una funció antisimètrica.
- el producte de dues funcions antisimètriques és una funció simètrica.

El resultat fonamental que permet especificar les condicions tals que els coeficients a_n o b_n són nuls és el següent:

Integral d'una funció antisimètrica. Si $g(t)$ és una funció periòdica amb període T i és antisimètrica, llavors

$$\int_0^T g(t) dt = 0.$$

La demostració és molt simple:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) dt &= \int_0^{T/2} g(t) dt + \int_{T/2}^T g(t) dt = \underbrace{\int_0^{T/2} g(T/2 - z) dz}_{t=T/2-z} + \underbrace{\int_0^{T/2} g(T/2 + z) dz}_{t=T/2+z} \\ &\stackrel{\text{antisimetria}}{=} - \int_0^{T/2} g(T/2 + z) dz + \int_0^{T/2} g(T/2 + z) dz = 0. \end{aligned}$$

Les funcions sinus són antisimètriques, mentre que els cosinus són simètrics. Tenint en compte això i els resultats anteriors, si $f(t)$ és simètrica, llavors el producte de $f(t)$ per un sinus serà antisimètrica i els coeficients b_n seran zero, mentre que si $f(t)$ és antisimètrica, el producte de $f(t)$ per un cosinus serà antisimètrica i els a_n seran ara nuls. Aquests resultats, juntament amb el cas especial quan afegint una constant a una funció aquesta esdevé antisimètrica, es resumeixen en:

- Si $f(t)$ és simètrica, llavors $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$
- Si $f(t)$ és antisimètrica, llavors $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Si afegint una constant a $f(t)$ s'obté una funció antisimètrica, llavors $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Aquest resultat permet estalviar-se el càlcul d'uns coeficients que se sap d'antuvi que seran zero. El resultat següent permet a més, en certs casos, simplificar el càlcul dels coeficients.

Integral d'una funció periòdica. Si $g(t)$ és una funció periòdica amb període T i a és una constant qualsevol, llavors

$$\int_0^T g(t) dt = \int_a^{a+T} g(t) dt.$$

La demostració és també molt simple:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} g(t) dt &= \int_a^T g(t) dt + \int_T^{a+T} g(t) dt = \int_a^T g(t) dt + \underbrace{\int_0^a g(z+T) dz}_{t=z+T} \\ &\stackrel{g(z+T)=g(t)}{=} \int_a^T g(t) dt + \int_0^a g(z) dz = \int_0^a g(z) dz + \int_a^T g(t) dt = \int_0^T g(t) dt. \end{aligned}$$

Aquest resultat permet calcular els coeficients de la sèrie de Fourier amb integrals sobre qualsevol interval de longitud T , en lloc d'haver-nos de restringir a $[0, T]$, i, segons el cas, una elecció adient d' a pot simplificar el càlcul de la integral. En particular, una elecció força habitual és $a = -T/2$, que proporciona

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

3 Convergència. Teorema de Dirichlet. Fenomen de Gibbs

Ens preguntem ara fins a quin punt és vàlida la representació d'una funció per la seva sèrie de Fourier. En els exemples que hem vist sembla que, agafant sumes parcials amb n cada vegada més gran, s'obtenen aproximacions cada vegada més bones a $f(t)$. Cal esbrinar, però, si això sempre és cert, i aquest és el problema de la **convergència** de la sèrie de Fourier.

Donada una funció $f(t)$ contínua a trossos, definim $\hat{f}(t)$ com

$$\hat{f}(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad (30)$$

on $f(t\pm)$ són els límits de f per la dreta i l'esquerra de t , respectivament. Aquests límits existeixen en tots els punts donat que f té, com a molt, un nombre finit de discontinuïtats de salt en qualsevol interval finit. De fet, en els punts on f és contínua, la funció $\hat{f}(t)$ coincideix amb $f(t)$, mentre que dóna la mitjana dels valors per la dreta i l'esquerra en els punts on f té una discontinuïtat de salt; en aquests darrers punts, $\hat{f}(t)$ té la mateixa discontinuïtat de salt, però amb el valor redefinit. Per exemple, si

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 3, \\ 7 & \text{si } t > 3, \end{cases}$$

llavors

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 3, \\ 4 & \text{si } t = 3, \\ 7 & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

Amb aquesta definició podem ja enunciar el teorema de convergència de Dirichlet per a sèries de Fourier, que diu el següent:

Teorema de Dirichlet. Si $f(t)$ és una funció periòdica, contínua a trossos, i tal que en cada punt existeixen les derivades per la dreta i l'esquerra, llavors la sèrie de Fourier de $f(t)$ val en tots els punts el mateix que la funció $\hat{f}(t)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) = \hat{f}(t).$$

El que la suma infinita doni \hat{f} s'ha d'entendre en el sentit de límit. Donat un punt qualsevol t , i un valor $\epsilon > 0$, per petit que sigui, existeix un n (que, en general, depèn de t i d' ϵ) tal que la suma parcial $SF_n(t)$

$$SF_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

està a distància menor que ϵ de $\hat{f}(t)$:

$$\left| SF_n(t) - \hat{f}(t) \right| < \epsilon.$$

Es diu que les sumes parcials de la sèrie de Fourier, i per extensió la sèrie de Fourier, **convergeixen** cap a $\hat{f}(t)$.

El teorema de Dirichlet afirma per tant que, si es verifiquen les seves hipòtesis (això passa per a totes les funcions que ens trobarem), llavors, per a n prou gran, la suma parcial representa acuradament la funció original, excepte en els punts de discontinuïtat, on s'acosta al valor mitjà dels valors per la dreta i l'esquerra. Cal tenir en compte que les sumes parcials són sumes finites de sinus i cosinus, i per tant són funcions contínues.

Els resultats que hem obtingut en exemples concrets mostren, efectivament, el comportament anunciat pel teorema de Dirichlet, però en el cas de funcions discontinües, sembla que al voltant del punt de salt hi hagi un pic que no disminueix en magnitud al augmentar n . Per exemple, les gràfiques de SF_4 i SF_8 de la Figura 2 mostren, abans i després del salt de la funció $f(t)$ en $t = 1$, uns pics de la mateixa magnitud, amb l'única diferència que per $n = 8$ estan més a prop del punt de discontinuïtat. Per veure si això és una casualitat transitòria que potser desapareix per a n més gran, anem a estudiar sumes parcials amb molts més termes per a la funció

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2, \\ -1 & 1/2 < t < 1, \end{cases} \quad (31)$$

estesa amb període $T = 1$.

Com que aquesta és una funció antisimètrica, tots els coeficients a_n seran zero, i sols cal calcular els b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin \frac{2\pi nt}{1} dt = 2 \int_0^{1/2} (+1) \cdot \sin 2\pi nt dt + 2 \int_{1/2}^1 (-1) \cdot \sin 2\pi nt dt \\ &\stackrel{n \neq 0}{=} -\frac{1}{\pi n} \cos 2\pi nt \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{\pi n} \cos 2\pi nt \Big|_{1/2}^1 = -\frac{1}{\pi n} (\cos \pi n - 1) + \frac{1}{\pi n} (\cos 2\pi n - \cos \pi n) \\ &\stackrel{\cos 2\pi n = 1}{=} \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n). \end{aligned}$$

Com que

$$\cos \pi n = \begin{cases} 1 & n \text{ parell,} \\ -1 & n \text{ senar,} \end{cases}$$

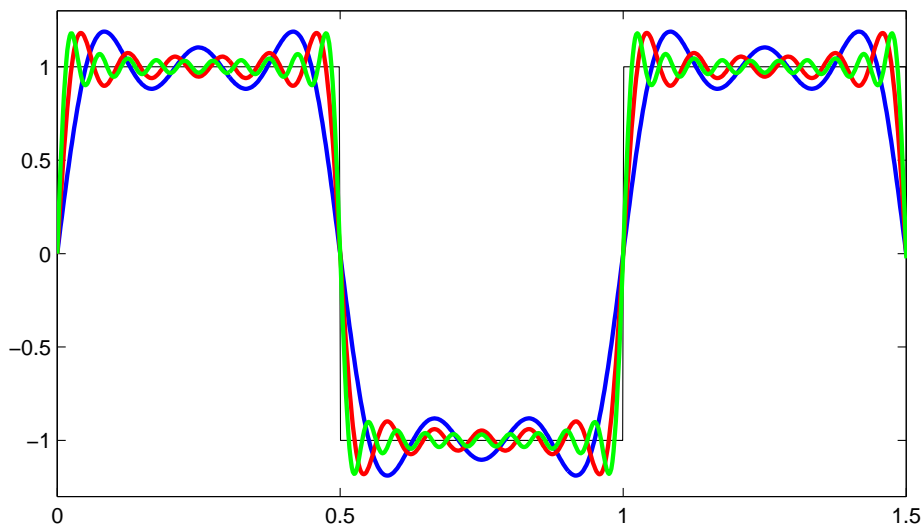


Figura 5: La funció de (31) i les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier amb $n = 5$ (en blau), $n = 11$ (en vermell) i $n = 20$ (en verd).

tindrem que

$$b_n = \frac{2}{\pi n} = \begin{cases} 0 & n \text{ parell,} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ senar.} \end{cases} \quad (32)$$

La sèrie de Fourier serà així

$$SF(f(t)) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, n \text{ senar}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n t. \quad (33)$$

Una manera compacta de sumar sobre els senars és canviar n per $2n + 1$ i sumar per a $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Una forma alternativa, i més habitual, d'escriure la sèrie de Fourier d'aquesta funció serà

$$SF(f(t)) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} \sin 2\pi(2n + 1)t. \quad (34)$$

Les sumes parcials d'aquesta sèrie per a $n = 5$, $n = 11$ i $n = 20$ apareixen representades a la Figura 5 (aquí la n es refereix a la forma (33), incloent-hi els termes parells que són nuls), i el detall al voltant de $t = 1/2$ es pot veure a la Figura 6.

Es veu que, efectivament, el pic no disminueix, i sols s'apropa al punt de discontinuïtat. Això sembla ser contradictori amb el teorema de Dirichlet, que diu que l'aproximació millora quan n augmenta. Aquest fet, aparentment contradictori, s'anomena **fenomen de Gibbs**. En realitat no hi ha cap contradicció, i l'aparent discordança té a veure amb els detalls de què vol dir que les sumes parcials d'una sèrie convergeixen a la funció. De fet, per a qualsevol t , és possible trobar n tal que la distància entre $SF(f(t))$ i $f(t)$ en els punts on és contínua es tant petita com es vulgui, però al augmentar n l'aproximació empitjora, transitòriament, per a punts més propers a la discontinuïtat. Una vegada ha passat el pic, l'aproximació en el punt donat va

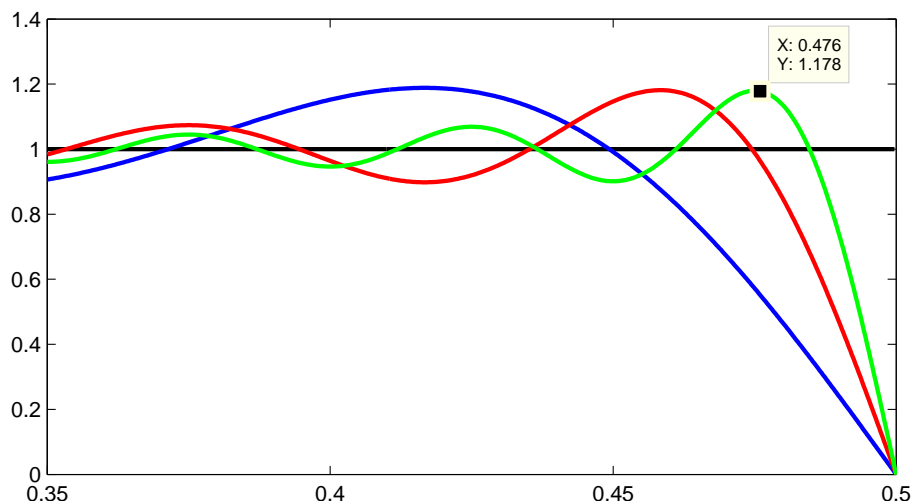


Figura 6: Detall al voltant de $t = 1/2$ de la funció de (31) i les sumes parcials de la seva sèrie de Fourier amb $n = 5$ (en blau), $n = 11$ (en vermell) i $n = 20$ (en verd).

millorant a mesura que va augmentant n . Matemàticament, es diu que les sumes parcials convergeixen a $\hat{f}(t)$ **puntualment** però no **uniformement**.

Es pot demostrar que quan n creix l'alçada del pic (respecte a la base) s'acosta a un valor límit que és aproximadament el 9% del valor del salt de la funció. En el nostre cas el salt en els punts de discontinuïtat és de 2 unitats, i el 9% d'això és 0.18. Mirant la suma amb $n = 20$ de la Figura 6, es veu que el pic està a alçada $1.178 \approx 1 + 0.18$.¹

4 Forma complexa de la sèrie de Fourier. Espectre d'un senyal periòdic

Per analitzar amb més detall el contingut en freqüències d'una funció, o senyal, emprant la nomenclatura de les telecomunicacions, i també per presentar la transformada discreta de Fourier, convé manipular l'expressió que tenim de la $SF(f(t))$ d'una funció i re-escrivir-la en termes d'exponencials complexes. Emprant

$$\cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2}, \quad (35)$$

$$\sin A = \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j}, \quad (36)$$

¹En realitat el tant per u del valor del salt que dona l'alçada del pic és $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy - \frac{1}{2} \approx 0.0895$.

i re-agrupant termes hom té

$$\begin{aligned}
 SF(f(t)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{j\frac{2\pi nt}{T}} - e^{-j\frac{2\pi nt}{T}}}{2j} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} \right) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + \bar{c}_n e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} \right), \tag{37}
 \end{aligned}$$

on hem definit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \tag{38}$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{39}$$

i a on \bar{c}_n és el complex conjugat de c_n :

$$\bar{c}_n = \frac{a_n + jb_n}{2}. \tag{40}$$

Si estenem l'índex n a valors negatius mitjançant

$$c_{-n} = \bar{c}_n, \tag{41}$$

(per exemple, $c_{-2} = \bar{c}_2$) podem re-escriure (37) com

$$SF(f(t)) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}} = c_0 + \sum_{-\infty, n \neq 0}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}},$$

i, finalment,

$$SF(f(t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}. \tag{42}$$

Els coeficients c_n es calculen combinant les expressions per a a_n i b_n (tenint en compte que no hem definit b_0 però que si posem $n = 0$ a l'expressió per a b_n dona zero):

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos \frac{2\pi nt}{T} - j \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt. \tag{43}
 \end{aligned}$$

Això permet calcular c_0 i c_n , i els valors de c_{-n} s'obtenen prenent el complex conjugat del resultat per a c_n .

En la majoria de casos, encara que ens interressi la forma complexa de la sèrie de Fourier, surt més a compte calcular els coeficients reals a_n i b_n , i després obtenir els c_n a partir dels primers, ja que emprant les

propietats de simetria o antisimetria ens podem estalviar molts càlculs. En alguns casos, però, sobretot si la funció no té simetria ni antisimetria, és millor calcular directament els coeficients complexos. Sigui per exemple

$$f(t) = Ae^{-at} \quad t \in [0, \frac{3}{a}), \quad \text{estesa amb període } T = \frac{3}{a}. \quad (44)$$

Aquesta funció descriu la descàrrega d'un sistema d'ordre 1 amb constant de temps $\tau = 1/a$, que deixem evolucionar entre $t = 0$ i $t = 3\tau$ i que, d'alguna manera, tornem a re-carregar al seu valor inicial en $t = 3\tau$. Tindrem

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{3/a} \int_0^{3/a} Ae^{-at} e^{-j\frac{2\pi n t}{3/a}} dt = \frac{a}{3} A \int_0^{3/a} e^{-at} e^{-j\frac{2\pi a n t}{3}} dt = \frac{a}{3} A \int_0^{3/a} e^{-a(1+j\frac{2\pi n}{3})t} dt \\ &= \frac{a}{3} A \frac{-1}{a(1+j\frac{2\pi n}{3})} e^{-a(1+j\frac{2\pi n}{3})t} \Big|_0^{3/a} = -\frac{A}{3} \frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}} \left(e^{-3(1+j\frac{2\pi n}{3})} - 1 \right) \\ &= -\frac{A}{3} \frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}} (e^{-3} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1 \forall n} - 1) = \frac{A}{3} (1 - e^{-3}) \frac{1}{1+j\frac{2\pi n}{3}}. \end{aligned}$$

Passant el complex a forma cartesiana s'obté finalment

$$c_n = \frac{3A(1 - e^{-3})}{9 + 4\pi^2 n^2} \left(1 - j\frac{2\pi n}{3}\right), \quad n = -\infty, \dots, +\infty. \quad (45)$$

La forma complexa de la sèrie de Fourier per a aquesta funció és per tant

$$SF(f(t)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{3A(1 - e^{-3})}{9 + 4\pi^2 n^2} \left(1 - j\frac{2\pi n}{3}\right) e^{j\frac{2\pi a n t}{3}}. \quad (46)$$

A partir de la forma complexa es pot recuperar la forma real calculant els a_n i els b_n . De

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (47)$$

$$\bar{c}_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48)$$

(el cas $n = 0$ es pot tractar conjuntament amb la resta degut a que $b_0 = 0$) es té, sumant i restant

$$a_n = c_n + \bar{c}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (49)$$

$$b_n = j(c_n - \bar{c}_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (50)$$

Aplicant això a (45) s'obtenen

$$a_0 = \frac{2}{3} A (1 - e^{-3}), \quad (51)$$

$$a_n = \frac{6A(1 - e^{-3})}{9 + 4\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

$$b_n = \frac{4\pi A(1 - e^{-3})n}{9 + 4\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (53)$$

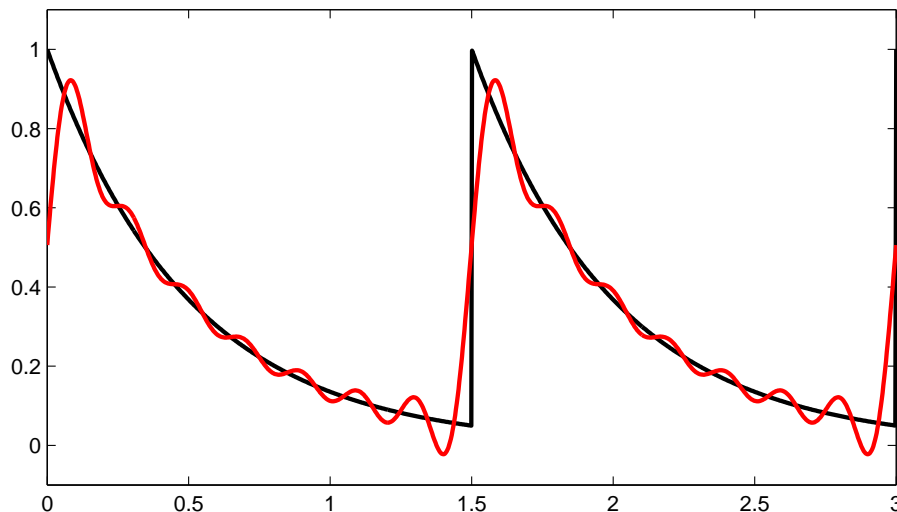


Figura 7: La funció $f(t) = e^{-2t}$ amb període $T = 3/2$, i la suma parcial de la seva sèrie de Fourier amb $n = 7$ (en vermell).

i la sèrie de Fourier real és

$$SF(f(t)) = \frac{1}{3}A(1 - e^{-3}) + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-3}}{9 + 4\pi^2 n^2} \left(6 \cos \frac{2\pi ant}{3} + 4\pi n \sin \frac{2\pi ant}{3} \right). \quad (54)$$

Pel cas $A = 1$ i $a = 2$, la funció i la seva suma parcial amb $n = 7$ apareixen representades sobre dos períodes a la Figura 7.

A partir dels coeficients c_n d'una funció periòdica, o a partir dels a_n i b_n , es pot calcular l'**espectre** de la mateixa, que és una representació gràfica de la importància de les diferents freqüències que en formen part. Definim l'**espectre en amplitud** com el conjunt de mòduls dels coeficients c_n :

$$|c_n| = \sqrt{c_n \bar{c}_n} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (55)$$

El valor $|c_n|$ és l'amplitud de l'harmònic n -èsim, que ha havíem introduït, però afectat per un factor $1/2$.

El següent resultat és molt important, ja que relaciona la integral del quadrat de la funció amb la suma dels quadrats dels mòduls dels coeficients de Fourier complexos:

Teorema de Parseval. Si $f(t)$ és una funció periòdica^a amb període T i c_n són els coeficients de la seva sèrie de Fourier complexa, hom té

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

^aI que a més verifica certes condicions addicionals, per exemple les del teorema de Dirichlet.

Com que $|c_{-n}| = |\bar{c}_n| = |c_n|$, la suma sobre els mòduls dels coeficients complexos es pot re-escriure sumant sols sobre els índex positius, i queda

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2, \quad (56)$$

on hem emprat a més que $c_0 = a_0/2$ és real. La integral de l'esquerra de (56) representa, en les aplicacions, quelcom proporcional a la potència mitjana del senyal sobre un període. El teorema de Parseval indica per tant quina contribució a la potència mitjana d'un senyal tenen els termes corresponents a cada freqüència, o **harmònic**, $\nu_n = n/T$, i la contribució relativa de les diverses freqüències es pot veure mirant la representació dels $|c_n|$ en funció de n .

Sigui per exemple la funció

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, 1) \quad (57)$$

amb període $T = 1$, representada a la Figura 8(a). Els valors numèrics dels seus coeficients de Fourier fins a $n = 10$, juntament amb els valors del $|c_n|$, apareixen a la Taula 1. Excepte a_0 , els coeficients a_n són molt

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0.9194	-0.0239	-0.0059	-0.0026	-0.0015	-0.0009	-0.0006	-0.0005	-0.0004	-0.0003	-0.0002
b_n	0	-0.2748	-0.1348	-0.0895	-0.0671	-0.0536	-0.0447	-0.0383	-0.0335	-0.0298	-0.0268
$ c_n $	0.4597	0.1379	0.0675	0.0448	0.0335	0.0268	0.0223	0.0191	0.0167	0.0149	0.0134

Taula 1: Espectre de $f(t) = \sin t$, $t \in [0, 1)$ amb període $T = 1$.

més petits que els b_n . Això és degut a que la funció, tal com es pot veure a la gràfica, és quasi antisimètrica si es desplaça cap avall una certa quantitat. L'espectre apareix a la Figura 8(b), i es veu gràficament que, a banda de la contribució del terme $n = 0$, o terme **dc** (això és terminologia agafada d'enginyeria elèctrica), el primer harmònic o harmònic fonamental ($n = 1$) té una importància quasi el doble que el següent ($n = 2$), mentre que a partir d'aquí la caiguda és més progressiva. Com que la contribució a la potència mitjana depèn del quadrat de l'espectre, això vol dir que l'harmònic fonamental contribueix quasi 4 vegades més que el següent. Cal tenir en compte però que la major part de l'energia d'aquest senyal està en el terme dc, i que la suma de les contribucions dels harmònics superiors ($n > 2$) tampoc és menyspreable.

La Figura 9(a) mostra la funció

$$f(t) = \sin t, \quad t \in [0, 6) \quad (58)$$

amb període $T = 6$. Això correspon quasi a la funció $\sin t$ amb el seu període natural $T = 2\pi$, i l'espectre, Figura 9(b), reflecteix aquest fet. En primer lloc, $|c_0|$ és pràcticament nul, ja que a_0 és molt petit, degut a que la funció és quasi antisimètrica (sense necessitat de desplaçament). Més important, però, és el fet que la funció és quasi un sinus pur; això es manifesta en el valor predominant del primer harmònic $|c_1|$.

De fet, si representeu la funció obtinguda amb el primer harmònic,

$$f_1(t) = a_1 \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot t}{6} + b_1 \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot t}{6}$$

(amb els valors $a_1 = -0.1374$, $b_1 = 1.0094$), s'obté la gràfica (en **vermell**) de la Figura 10, que dona una molt bona aproximació a $f(t)$ (en **blau**).

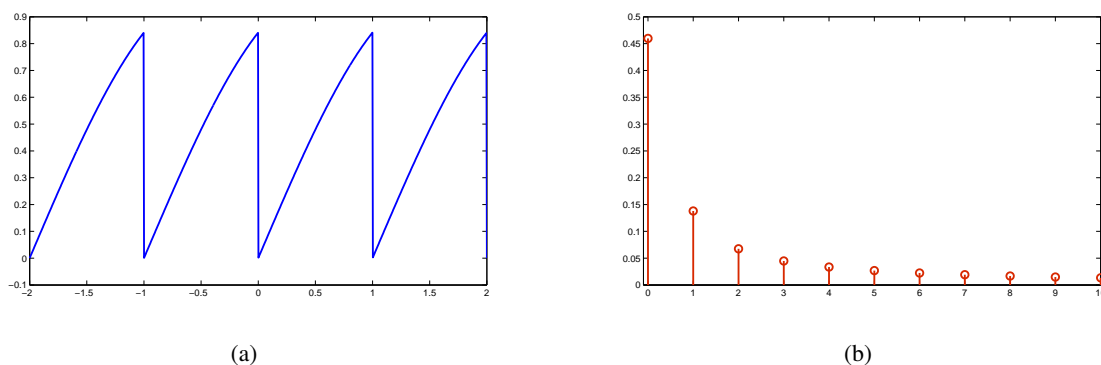


Figura 8: La funció $f(t) = \sin t$, $t \in [0, 1)$ amb període $T = 1$, i el seu espectre.

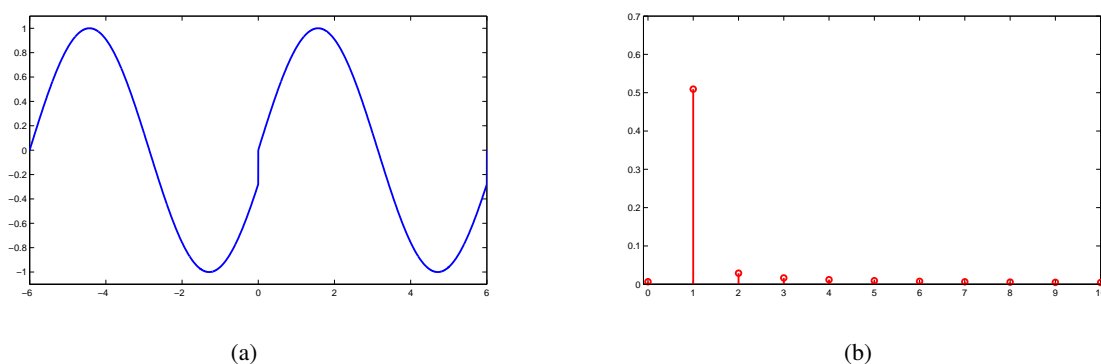


Figura 9: La funció $f(t) = \sin t$, $t \in [0, 6)$ amb període $T = 6$, i el seu espectre.

En general, l'espectre d'una funció periòdica és infinit, és a dir, no hi ha un M tal que $|c_n| = 0$ per a tot $n > M$. Els senyals tals que els passa això són molt especials, i s'anomenen **de banda limitada**. De fet, els únics senyals periòdics que són exactament de banda limitada són aquells que són una combinació lineal d'un nombre finit de sinus i cosinus (amb períodes commensurables), repetida amb el període natural del senyal total. En aquest cas, a més, calcular els coeficients de Fourier és una tasca elemental, sense necessitat d'integrar. Sigui per exemple

$$f(t) = 3 \sin t + 4 \cos 2t - 2 \sin \frac{2}{3}t \quad (59)$$

que té període $T = 6\pi$ (les funcions que hi apareixen tenen períodes 2π , π i 3π , respectivament), i que apareix representada a la Figura 11.

Com que el senyal té període 6π , la seva sèrie de Fourier serà de la forma

$$SF(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{6\pi} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{6\pi} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nt}{3} + b_n \sin \frac{nt}{3} \right).$$

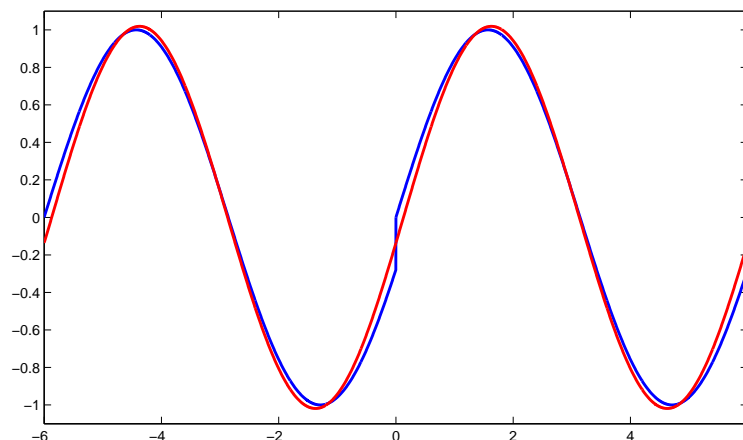


Figura 10: La funció $f(t) = \sin t$, $t \in [0, 6)$ amb període $T = 6$ (en blau), i el seu primer harmònic (en vermell).

Comparant amb (59) hom veu immediatament que els únics coeficients de Fourier no nuls són

$$b_2 = -2, \quad b_3 = 3, \quad a_6 = 4.$$

Per tant podem escollir $M = 6$ en la definició de senyal de banda limitada ja que tots els a_n i b_n (i per tant els $|c_n|$) són nuls per a $n > 6$.

Encara que els únics senyals de banda limitada són els que hem descrit, a la pràctica hi ha molts senyals que són “quasi” de banda limitada, és a dir, que existeix un M tal que per a $n > M$ els valors de a_n i b_n són menyspreables.

En l’extrem contrari, hi ha funcions que són absolutament de banda no limitada, i que tenen coeficients grans per a valors d’ n tant grans com es vulgui. Això és degut a que la funció ha de representar oscil·lacions de freqüència arbitràriament alta, tal com passa amb el senyal de tipus *chirp* (xerroteig) definida per

$$f(t) = \sin \frac{\pi}{t}, \quad t \in (-1, 1), \quad (60)$$

amb període $T = 2$ i que apareix representat, en un període, a la Figura 12.²

La Figura 13 mostra els primers 500 punts de l’espectre de la funció *chirp*, calculats numèricament (per a valors de n grans, els valors no són massa fiables, degut a que les fortes oscil·lacions fan que el mètode numèric que avalua les integrals que proporcionen els coeficients sigui poc precís, però la tendència general sí que és correcta). El fet que els coeficients no decaiguin de manera monòtona es manté per més punts de l’espectre que es calculin.

Hom no pot aspirar a representar aquest senyal arbitràriament a la vora de $t = 0$ mitjançant cap suma parcial de la sèrie de Fourier, donat que els termes que es deixen fora són importants per més gran que s’agafi n . Lluny de $t = 0$ (entre $t = -1$ i $t = 1$), on la funció varia suaument, sí que és possible, en principi, truncar la sèrie i obtenir una bona representació, però llavors entra en joc el fet que els coeficients per a n

²Hi ha moltes classes de funcions tipus *chirp*, amb gràfiques semblants a aquesta, i que s’utilitzen en processat de senyal i d’imatge, i també en tecnologia de radar.

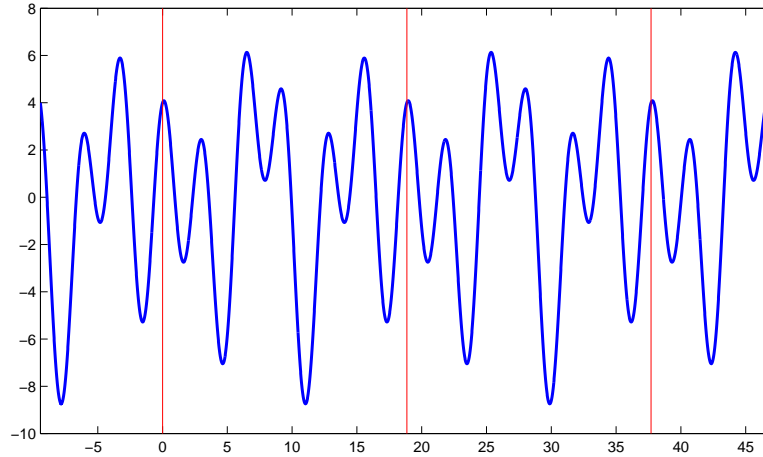


Figura 11: Una funció de banda limitada amb període $T = 6\pi$.

gran tenen un error de càlcul considerable, i això introdueix oscil·lacions que, lluny de $t = 0$, no hi són. De fet, amb la funció *chirp* que hem considerat (i amb el mètode de càlcul dels coeficients que s'ha utilitzat), no té sentit anar més enllà de $n = 6$. La Figura 14 mostra $SF_6(f(t))$, i es pot veure que la representació és acceptable lluny de $t = 0$, i totalment desencaminada a la vora de $t = 0$.

5 (Opcional) La transformada discreta de Fourier. Mostratge de senyals. Teorema de Nyquist. FFT

Donats N nombres reals o complexos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}$, representats de manera compacta com $\{x_k\}_{k=0, \dots, N-1}$, la seva transformada discreta de Fourier (DFT — *Discrete Fourier Transform*), és el conjunt de N quantitats

$$X_k = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} x_l, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (61)$$

Terme a terme això és

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + x_1 + \dots + x_{N-2} + x_{N-1}, \\ X_1 &= x_0 + e^{-j\frac{2\pi}{N}} x_1 + \dots + e^{-j\frac{2\pi(N-2)}{N}} x_{N-2} + e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} x_{N-1}, \\ &\vdots \\ X_{N-2} &= x_0 + e^{-j\frac{2\pi(N-2)}{N}} x_1 + \dots + e^{-j\frac{2\pi(N-2)(N-2)}{N}} x_{N-2} + e^{-j\frac{2\pi(N-1)(N-2)}{N}} x_{N-1}, \\ X_{N-1} &= x_0 + e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} x_1 + \dots + e^{-j\frac{2\pi(N-2)(N-1)}{N}} x_{N-2} + e^{-j\frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} x_{N-1}. \end{aligned} \quad (62)$$

Per expressar la relació entre les quantitats originals i les transformades escriurem

$$\{x_k\} \xleftrightarrow{\text{DFT}} \{X_k\} \quad (63)$$

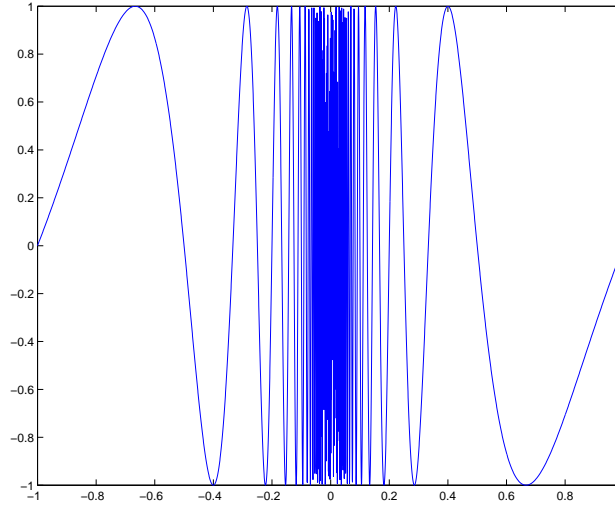


Figura 12: Un senyal *chirp*, amb oscil·lacions de freqüència no fitada al voltant de $t = 0$.

Les quantitats X_k , que en general són complexes encara que les x_k siguin reals, contenen la mateixa informació que les quantitats originals, i de fet és possible recuperar les x_k a partir de les X_k . En efecte, hom té que

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi kl}{N}} X_l, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (64)$$

Aquesta operació, que passa de les $\{X_k\}_{k=0,\dots,N-1}$ a les $\{x_k\}_{k=0,\dots,N-1}$, s'anomena *transformada discreta de Fourier inversa* (iDFT). Per veure que (64) és certa substituïm (61) a (64):

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi kl}{N}} X_l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi kl}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi ml}{N}} x_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi l(k-m)}{N}} \right) x_m. \quad (65)$$

Anem ara a calcular

$$R_{km} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi l(k-m)}{N}} \quad (66)$$

Això és la suma dels N primers termes (contant l'1) d'una sèrie geomètrica

$$S_N = \sum_{l=0}^{N-1} a^l = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-2} + a^{N-1}, \quad (67)$$

amb a , la raó de la sèrie geomètrica, donada per

$$a = e^{j\frac{2\pi(k-m)}{N}}. \quad (68)$$

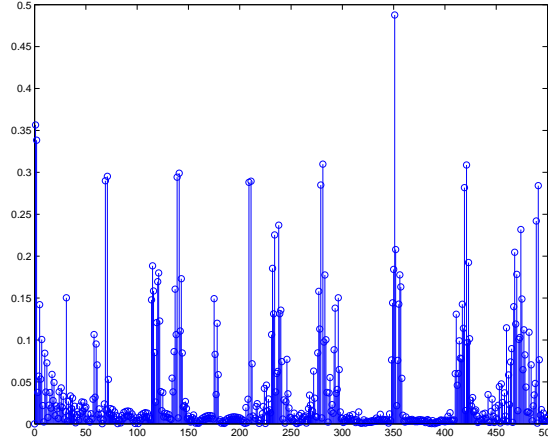


Figura 13: Espectre (aproximat) del senyal chirp.

Suma parcial d'una sèrie geomètrica. La suma (67) dels N primers termes d'una sèrie geomètrica de raó a val

$$S_N = \begin{cases} N & \text{si } a = 1, \\ \frac{1-a^{N+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

Si $a = 1$ el resultat és evident. Per a $a \neq 1$, la demostració es basa en escriure S_{N+1} de dues maneres diferents:

$$S_{N+1} = \sum_{k=0}^N a^k = S_N + a^N,$$

$$S_{N+1} = \sum_{k=0}^N a^k = 1 + \sum_{k=1}^N a^k = 1 + a \sum_{k=1}^N a^{k-1} = 1 + a \sum_{k=0}^{N-1} a^k = 1 + aS_N,$$

d'on

$$S_N + a^N = 1 + aS_N,$$

i aïllant S_N s'obté el resultat desitjat. Amb la forma d' a donada per (68), sols és possible $a = 1$ si $k = m$ (si k i m diferissin en N també donaria 1, però això és impossible ja que k i m estan entre 0 i $N - 1$). Si $a \neq 1$, és a dir, si $k \neq m$, tindrem

$$R_{km} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi(r-k)}{N}N}}{1 - e^{j\frac{2\pi(r-k)}{N}}} = \frac{1 - e^{j2\pi(r-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi(r-k)}{N}}}.$$

Però r i k són enters, i per tant $2\pi(r - k)$ és un nombre enter de voltes, de manera que $e^{j2\pi(r-k)} = 1$ i per tant $R_{km} = 0$ si $k \neq m$. Hem arribat per tant a que

$$R_{km} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi l(k-m)}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k \neq m. \end{cases} \quad (69)$$

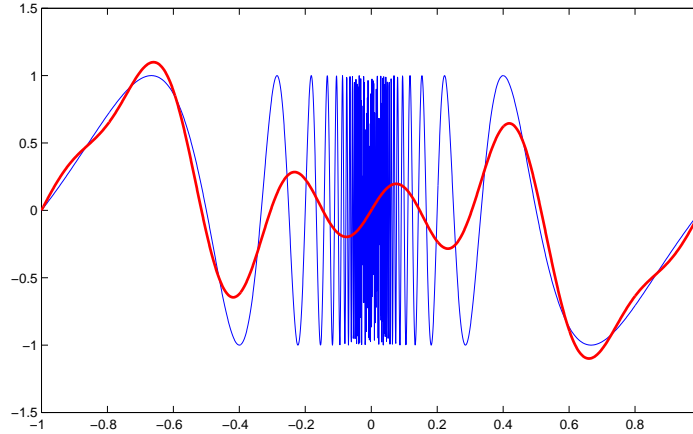


Figura 14: El senyal *chirp* (blau) i la suma parcial amb $n = 6$ de la seva sèrie de Fourier (vermell).

Emprant això i tornant a (65) resulta

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi l(k-m)}{N}} \right) x_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} N \delta_{km} x_m = x_k,$$

on δ_{km} és la *delta de Kronecker*, definida per

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m, \\ 0 & \text{si } k \neq m. \end{cases} \quad (70)$$

La relació (61) es pot re-escrivir en notació matricial en termes dels vectors columna x i X , amb components x_k i X_k , respectivament. Definint

$$f = e^{-j \frac{2\pi}{N}}, \quad (71)$$

hom té que (61) és

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & f & f^2 & \cdots & f^{N-2} & f^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & f^{N-2} & f^{2(N-2)} & \cdots & f^{(N-2)(N-2)} & f^{(N-1)(N-2)} \\ 1 & f^{N-1} & f^{2(N-1)} & \cdots & f^{(N-2)(N-1)} & f^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

o, de manera compacta,

$$X = Fx, \quad (73)$$

on F és la matriu $N \times N$ que té a la fila k , columna l el valor $f^{(k-1)(l-1)}$.

La següent propietat pot emprar-se per reduir el nombre de càlculs independents d'una DFT, i a més és important de cara a la interpretació dels resultats.

Simetria de la DFT. Sigui N parell i siguin X_k els termes d'una DFT amb N punts. Llavors

$$X_{\frac{N}{2}-r} = \bar{X}_{\frac{N}{2}+r}$$

per a tot $r = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Per tant els termes de la DFT tenen una simetria respecte a la posició central, començant amb $X_{\frac{N}{2}-1} = \bar{X}_{\frac{N}{2}+1}$ i anant baixant fins a $X_1 = \bar{X}_{N-1}$. La demostració és molt simple:

$$\begin{aligned} X_{\frac{N}{2}-r} &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi(\frac{N}{2}-r)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j \frac{2\pi kr}{N}} e^{-j\pi k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j \frac{2\pi kr}{N}} e^{j\pi k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j \frac{2\pi(\frac{N}{2}+r)k}{N}} = \bar{X}_{\frac{N}{2}+r}, \end{aligned}$$

donat que els x_k són reals.

La sèrie de Fourier d'una funció periòdica $f(t)$ permet fer-ne l'anàlisi espectral. Hom pot preguntar-se el següent:

1. Si el senyal $f(t)$ té un origen experimental i no coneixem l'expressió analítica de $f(t)$ necessària per calcular les integrals que proporcionen els coeficients, com fem l'anàlisi espectral?
2. A la pràctica, quin és l'origen dels senyals en temps discret $\{x_k\}$?

Les dues preguntes es poden respondre simultàniament si pensem que les quantitats x_k són els valors de $f(t)$ en instants de temps donats. Això és el que s'anomena **mostratge de senyals**. Per ser més específics, en un període T de $f(t)$ escollirem N punts equidistants

$$t_k = 0 + k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (74)$$

i llavors

$$x_k = f(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (75)$$

Si posem

$$\Delta = \frac{T}{N} \quad (76)$$

podrem re-escriure (75) com

$$x_k = f(k\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (77)$$

El nostre objectiu és esbrinar si hi ha alguna relació entre els coeficients de Fourier de $f(t)$ i els coeficients de la DFT de $\{x_k\}$. A partir de la sèrie de Fourier complexa de $f(t)$ (la igualem a $f(t)$, entenent que la igualtat és en el sentit establert pel teorema de Dirichlet)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi kt/T}, \quad (78)$$

tindrem

$$x_l = f(l\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k l \Delta / T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k l / N}, \quad (79)$$

on hem emprat la relació entre Δ , T i N donada per (76). Tot seguit substituïm aquests valors a l'expressió per a la DFT:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-j2\pi k l / N} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-j2\pi k l / N} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r e^{j2\pi r l / N} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(r-k)l/N} c_r \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi(r-k)l/N} \right) c_r. \end{aligned} \quad (80)$$

La suma sobre l és idèntica a l'expressió (69) de la demostració de la fórmula de la iDFT, però amb la diferència que aquí r pot ser qualsevol valor enter, i no sols un valor entre 0 i $N - 1$. Per tant

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi(r-k)l/N} = \begin{cases} N & \text{si } r = k + mN, \text{ amb } m \text{ un enter qualsevol,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \quad (81)$$

Emprant aquest resultat, la suma sobre tots els enters r es transforma en una suma sobre tots els enters r que són de la forma $r = k + mN$, m enter, i queda

$$X_k = N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{k+mN}, \quad (82)$$

o, desenvolupant la suma infinita

$$\begin{aligned} X_k &= N (\dots + c_{k-3N} + c_{k-2N} + c_{k-N} + c_k + c_{k+N} + c_{k+2N} + c_{k+3N} + \dots) \\ &= N c_k + N (\dots + c_{k-3N} + c_{k-2N} + c_{k-N} + c_{k+N} + c_{k+2N} + c_{k+3N} + \dots). \end{aligned} \quad (83)$$

Per tant hi ha una relació entre els c_k i els X_k , però no és la que possiblement esperàvem. X_k és N vegades c_k més una sèrie infinita d'altres coeficients, tots amb índex separat de k per un nombre enter de N posicions. Els termes que apareixen de més a l'expressió per a X_k s'anomenen **suplantadors** o àlies de c_k , i el resultat que hem obtingut s'anomena teorema de la suplantació o de l'*aliasing*.

Com que no hi ha una relació de u a u entre les c_k i els X_k , cosa que era d'esperar donat que hi ha infinits c_k però sols N valors X_k , no és possible recuperar l'espectre $|c_k|$ d'un senyal periòdic fent-ne la DFT d'un mostratge. Sí que és possible, en canvi, obtenir els coeficients X_k de qualsevol DFT si es coneixen els c_k , però això té un interès més acadèmic que no pas pràctic. L'únic cas que és possible invertir la relació és quan el senyal és de banda limitada, i això dóna lloc a un resultat molt important, conegut com a teorema de l'interval, o del mostratge, de Nyquist:

Teorema de l'interval de Nyquist. Sigui $f(t)$ un senyal periòdic de període T i de banda limitada, de manera que la freqüència màxima del seu espectre és

$$\nu_{\max} = \frac{M}{T}.$$

Llavors és possible recuperar el senyal $f(t)$ amb un mostratge amb N punts en un període, per a qualsevol N tal que

$$N > 2M \quad (\text{condició de Nyquist}).$$

Quan un mostratge no satisfà la condició de Nyquist es diu que presenta *aliasing*.

Es pot demostrar que si es satisfà la condició de Nyquist, els coeficients de la DFT dels x_k del mostratge permeten calcular els coeficients c_k de la sèrie de Fourier de $f(t)$ mitjançant

$$c_k = \frac{1}{N} X_k, \quad \text{per a } 0 \leq k \leq \frac{N}{2}, \quad (84)$$

$$c_{-N+k} = \frac{1}{N} X_k, \quad \text{per a } \frac{N}{2} < k \leq N-1. \quad (85)$$

Cal notar que si $f(t)$ és de banda limitada sols té un nombre finit de termes a la seva sèrie de Fourier i per tant, amb un mostratge amb prou de punts es poden calcular, segons aquest resultat, tots els coeficients c_k (i els a_k i b_k), i és possible llavors **reconstruir el senyal**.

La freqüència

$$\nu_{\text{Ny}} = \frac{2M}{T} = 2\nu_{\max} \quad (86)$$

s'anomena **freqüència de Nyquist**. De manera compacta, es diu que per recuperar un senyal de banda limitada cal fer un mostratge amb més de dos punts per període de l'harmònic més gran present en el senyal, o amb una freqüència més del doble que la màxima del senyal.

Per exemple, sigui el senyal de la Figura 15, amb període $T = 4\pi$, del qual ens diuen a més que és de banda limitada, amb un contingut espectral per sota de 4 Hz (això podem saber-ho, per exemple, perquè el senyal ha passat per un filtre passa-baixos que no permet freqüències superiors).

La freqüència de Nyquist del senyal serà no més gran que $2 \cdot 4 = 8$ Hz. De la relació

$$4 \geq \nu_{\max} = \frac{M}{4\pi}$$

traiem $M \leq 16\pi \approx 50.2$, i si volem obtenir l'expressió analítica del senyal amb un mostratge, ens hem d'assegurar utilitzant almenys $N > 2 \cdot M$ punts. El valor parell de N més petit que és segur amb la informació que tenim és $N = 102$ (si volem un valor que sigui potència de 2 caldrà anar fins a $N = 128$). Els punts mostrejats (sobre un període) apareixen a la Figura 16.

La DFT d'aquest mostratge dona l'espectre de la Figura 17. Els valors no nuls estan en $n = 1, n = 8, n = 12, n = 20$ i $n = 24$, a més dels simètrics per a $n > 51$, que no aporten nova informació. Aquests valors corresponen a freqüències $n/(4\pi)$, ja que el període de mostratge ha estat 4π .

La Taula 2 mostra els valors dels X_n , dividits ja per $N = 102$, corresponents a aquests n , juntament amb les freqüències associades. La freqüència màxima, $24/(4\pi) \approx 1.91$ Hz, està ben per sota dels 4 Hz, i això és normalment una indicació de que la informació inicial era correcta.

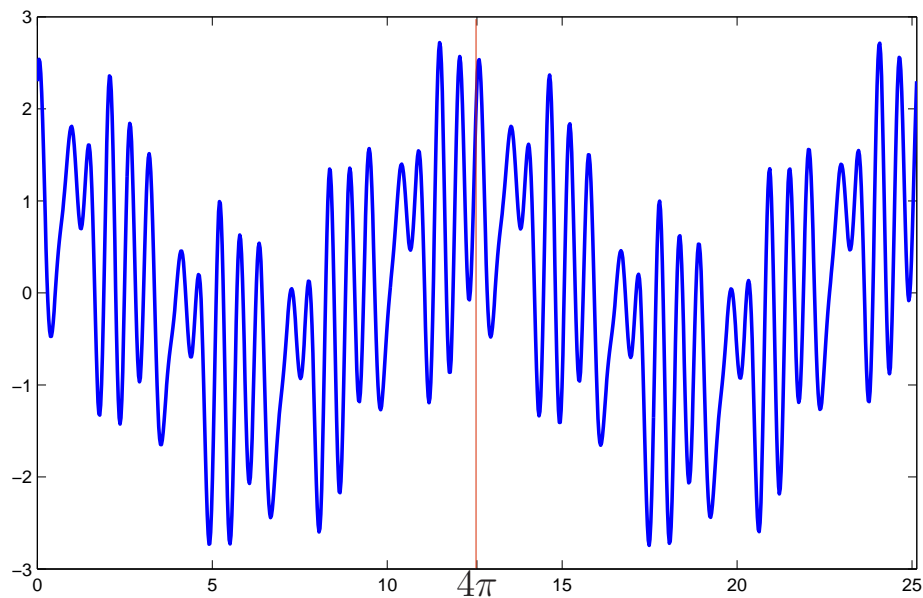


Figura 15: Un senyal de banda limitada per sota 4 Hz i període $T = 4\pi$.

n	1	8	12	20	24
ν_n	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{8}{4\pi}$	$\frac{12}{4\pi}$	$\frac{20}{4\pi}$	$\frac{24}{4\pi}$
$X_n/102$	0.5	$0.2j$	0.25	$-0.5j$	0.4

Taula 2: Valors dels X_n corresponents als valors no nuls de la Figura 17.

Emprant (84) tindrem que els coeficients c_n no nuls de la sèrie de Fourier, amb $n \geq 0$, seran

$$\begin{aligned}
 c_1 &= X_1/102 = 0.5, \\
 c_8 &= X_8/102 = 0.2j, \\
 c_{12} &= X_{12}/102 = 0.25, \\
 c_{20} &= X_{20}/102 = -0.5j, \\
 c_{24} &= X_{24}/102 = 0.4,
 \end{aligned}$$

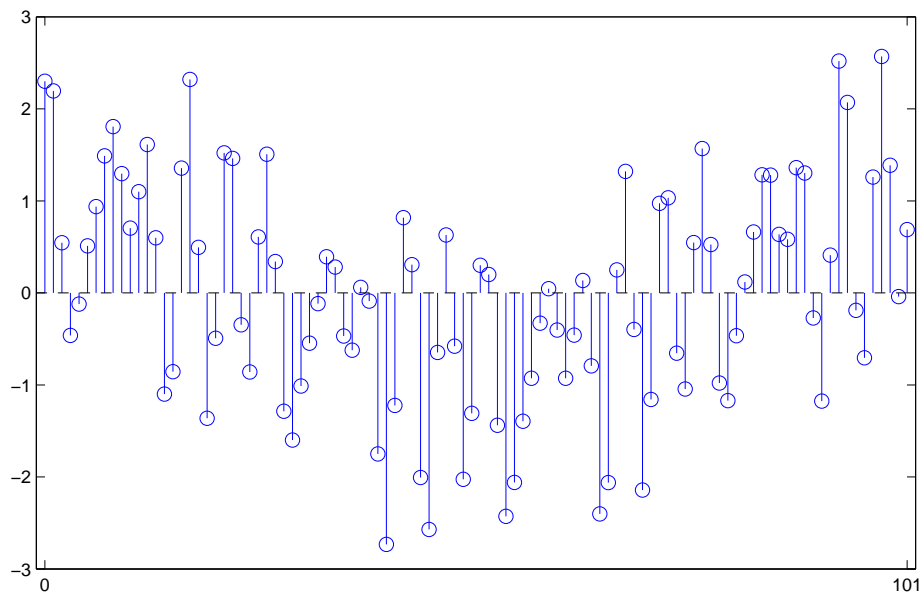


Figura 16: Mostratge amb $N = 102$ punts en un període $[0, 4\pi)$ del senyal de la Figura 15.

i amb (49) i (50) podrem calcular ara els coeficients reals

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 + \bar{c}_1 = 1, & b_1 &= j(c_1 - \bar{c}_1) = 0, \\ a_8 &= c_8 + \bar{c}_8 = 0, & b_8 &= j(c_8 - \bar{c}_8) = -0.4, \\ a_{12} &= c_{12} + \bar{c}_{12} = 0.5, & b_{12} &= j(c_{12} - \bar{c}_{12}) = 0, \\ a_{20} &= c_{20} + \bar{c}_{20} = 0, & b_{20} &= j(c_{20} - \bar{c}_{20}) = 1, \\ a_{24} &= c_{24} + \bar{c}_{24} = 0.8, & b_{24} &= j(c_{24} - \bar{c}_{24}) = 0. \end{aligned}$$

Amb aquests valors podem ja *reconstruir* el senyal, que serà

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot t}{4\pi} - 0.4 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 8 \cdot t}{4\pi} + 0.5 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 12 \cdot t}{4\pi} + 1 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 20 \cdot t}{4\pi} + 0.8 \cdot \cos \frac{2\pi \cdot 24 \cdot t}{4\pi} \\ &= \cos \frac{t}{2} - 0.4 \sin 4t + 0.5 \cos 6t + \sin 10t + 0.8 \cos 12t, \end{aligned}$$

i que es correspon exactament amb la funció de la Figura 15.

El càlcul de la DFT per a N gran (en aplicacions no massa espectaculars N pot ser de l'ordre de 10^5) és força costós des del punt de vista computacional. Cada terme de la DFT requereix N multiplicacions de nombres complexos, i el càlcul d'una DFT completa implica per tant N^2 multiplicacions. Cooley i Tukey van crear el 1965 un algorisme que calcula la DFT (si N és una potència de 2) de manera recurrent i que sols necessita $\frac{1}{2}N \log_2 N$ productes. Aquest algorisme s'anomena FFT (*Fast Fourier Transform*), i tant la versió original com les desenvolupades posteriorment per casos quan N no és una potència de 2 s'utilitzen industrialment i en tecnologies de la informació i les telecomunicacions per a processar immenses

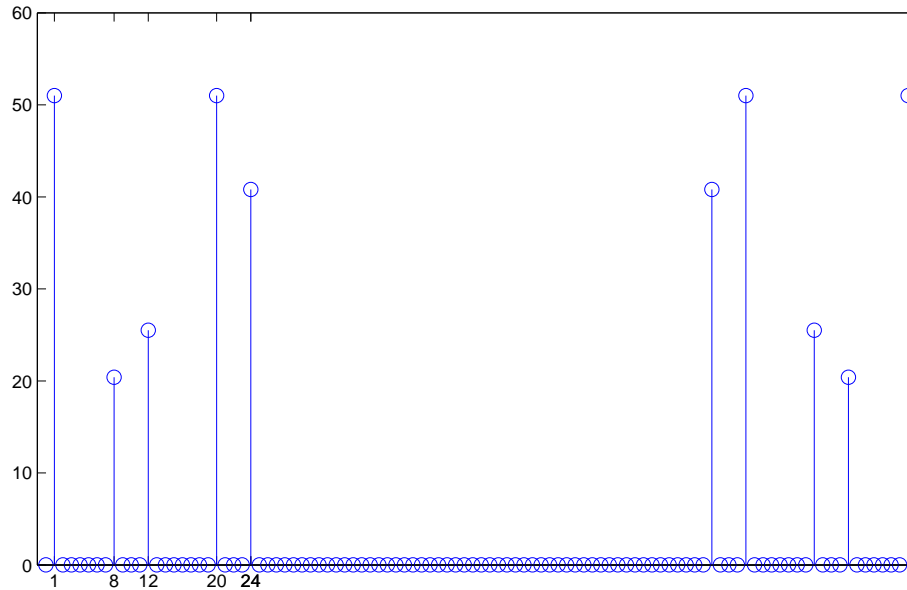


Figura 17: Espectre del senyal discret de la Figura 16.

quantitats de dades en temps real. Per exemple, si $N = 10^5$, l'algorisme DFT que hem presentat, donat per la multiplicació matricial (73), requereix 10^{10} multiplicacions, mentre que la FFT original de Cooley i Tukey sols en necessita

$$\frac{1}{2} \cdot 10^5 \cdot \log_2 10^5 = 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot \log_2 10 \approx 8.3 \cdot 10^5$$

és a dir un guany d'un factor de més de 10^4 . Això vol dir que si un ordinador fa el càlcul de la FFT en un segon, per fer el mateix càlcul amb la DFT li caldria unes 3 hores!

Amb un processador Intel Core2 Duo T7500 @2.20 GHz, fer la DFT de 10^3 punts amb MATLAB mitjançant la multiplicació matricial costa una mica menys de mig segon, mentre que tarda menys de 0.0005 segons emprant la FFT que MATLAB mateix té implementada.³

³Això són temps de rellotge, i pot incloure el temps dedicat a altres processos que estiguin corrent a la CPU.