Fonaments Matemàtics

Introducció a l'àlgebra lineal

Departament de Matemàtiques
EPSEVG

Universitat Politècnica de Catalunya—BarcelonaTech

Objectius

L'estudiant serà capaç de

- Manipular matrius i calcular determinants.
- Formular un sistema d'equacions lineals en forma matricial.
- Explicar l'estructura de les solucions d'un sistema d'equacions lineals
- Explicar què és un valor i un vector propi d'una matriu, i calcular-los en casos senzills
- Emprar `Octave` per realitzar càlculs amb matrius i sistemes d'equacions lineals.

Continguts

- Matrius i determinants.
- Sistemes d'equacions lineals.
- Els mètodes de Gauss i de Cramer.
- Valors i vectors propis d'una matriu.
- Exercicis.

Com utilitzar aquest material

- Aquest material és un resum de les principals propietats i operacions de les matrius i determinants, i de com utilitzar-les per discutir les solucions dels sistemes lineals d'equacions. També hi ha una introducció als valors i vectors propis d'una matriu.
- Després de cada bloc hi ha alguns problemes, pensats per ser solucionats amb l'ajuda d'`Octave`. Feu tots els exercicis amb `Octave` i feu també *a ma* el primer apartat del P1, els dos primers apartats del P5, el primer del P6 i el primer del P8.
- Per utilitzar aquest material de manera òptima, hauríeu de seguir-lo en paral·lel amb la introducció a `Octave` que també teniu, entenent els conceptes teòrics i intentant resoldre els problemes que es proposen.

Referències

- G. Strang, *Algebra lineal y sus aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
- C. Batlle, *Introducció a `Octave`*, disponible a Atenea.

Matrius i determinants

- Una matriu $m \times n$ de nombre reals és un arranjament rectangular de nombres reals, disposats en m files i n columnes. Els valors m i n són les *dimensions* de la matriu.
- Exemples:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{és una matriu } 2 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és una matriu } 4 \times 3$$

- Les matrius $m \times m$ s'anomenen *matrius quadrades* de dimensió m.
- Les matrius amb una única columna s'anomenen *vectors columna*.
- Les matrius amb una única fila s'anomenen *vectors fila*.

- Si A és una matriu $m \times n$, A_{ij}, l'*element* (i, j) d'A, és el nombre real que ocupa la posició corresponent a la fila i i la columna j, suposant que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.
- Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
tindrem, per exemple, que $A_{12} = -1$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -2$.
- A vegades els elements de la matriu A es denoten amb la lletra minúscula, a_{ij}, mentre que A_{ij} designa el co-factor de l'element, que s'usa en el càlcul del determinant pel mètode de Laplace.
- Dues matrius amb el mateix nombre de files i de columnes es poden sumar element a element. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i A és la matriu anterior, llavors
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Una matriu es pot multiplicar per un nombre real, i el resultat és una matriu del mateix tipus on tots els elements han estat multiplicats pel nombre real:

$$3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 24 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

- Si A és una matriu $m \times n$ i B és una matriu $n \times p$, és a dir, si el nombre de columnes de la primera coincideix amb el nombre de files de la segona, llavors és possible multiplicar la primera per l'esquerra de la segona, AB, i el resultat és una matriu $m \times p$.
- Per exemple, si A és 3×4, B és 4×2 i C és 2×3,
  - AB és 3×2,
  - BC és 4×3,
  - CA és 2×4,
  - BA, CB i AC no tenen sentit.

- Si AB té sentit, l'element (i,j) del resultat s'obté multiplicant terme a terme els elements de la fila i d'A i de la columna j de B, i sumant els resultats.
- Per exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

on, per exemple, l'element $(1,3)$ del resultat s'ha obtingut com

$$0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) = 0.$$

- A diferència del producte de nombres reals o complexos, $AB = 0$ no implica necessàriament que $A = 0$ o $B = 0$. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si A i B són matrius quadrades de la mateixa dimensió llavors existeixen tant AB com BA, però el resultats són, en general, diferents:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- La multiplicació de matrius és distributiva respecte a la suma: si A és $m \times n$ i B i C són $n \times p$, llavors

$$A(B + C) = AB + AC,$$

i si A i B són $m \times n$ i C és $n \times p$, llavors

$$(A + B)C = AC + BC.$$

- La *diagonal* d'una matriu quadrada està formada pels elements tals que la seva fila coincideix amb la seva columna.
- Dins del conjunt de matrius quadrades de dimensió m, la matriu identitat $\mathbb{I}_m$, que té zeros arreu excepte a la diagonal, on té tots els elements iguals a 1, és tal que multiplicada per qualsevol matriu, per l'esquerra o per la dreta, la deixa igual. Per exemple, si $m = 3$,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{I}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- La *trasposta* A^T d'una matriu A és la matriu que s'obté bescanviant files per columnes. Si A és $m \times n$ llavors A^T és $n \times m$. Per exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

- El determinant $\det A$ d'una matriu **quadrada** A és un nombre real que es calcula multiplicant elements de columnes diferents i sumant els resultats amb un cert signe.
- Determinant d'una matriu 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$$

- Determinant d'una matriu 3×3 (regla de Sarrus):

$$\begin{aligned} \det \quad & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ = \quad & +A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} \\ & -A_{31}A_{22}A_{13} - A_{21}A_{12}A_{33} - A_{11}A_{32}A_{23}. \end{aligned}$$

- Per a matrius quadrades de dimensió més gran les fórmules directes per al càlcul de determinants no s'utilitzen gaire sovint. En general, en aquests casos els determinants es calculen desenvolupant per una fila o columna, amb l'anomenada fórmula de Laplace. Per a matrius realment grans (d'ordre més gran que 10, per exemple), s'utilitza la reducció Gaussiana, i altres mètodes relacionats.
- Una matriu quadrada s'anomena triangular superior (triangular inferior) si tots els elements per sota (per sobre) de la diagonal són nuls. Per a matrius triangulars, el determinant és igual al producte dels elements de la diagonal. Per exemple,

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = 6.$$

- Si A i B són matrius quadrades de la mateixa dimensió, llavors

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

- Si A és una matriu quadrada de dimensió m i α és un nombre real, llavors
$$\det(\alpha A) = \alpha^m \det A.$$
- Si A és una matriu quadrada, llavors $\det A = \det A^T$.
- Si una matriu quadrada A té dues files iguals o dues columnes iguals, llavors $\det A = 0$.
- Si una matriu quadrada A té una fila de zeros o una columna de zeros, llavors $\det A = 0$.
- Si una matriu quadrada A és tal que una columna és combinació lineal d'altres de la matriu, llavors $\det A = 0$. El mateix val per les files. Per exemple,
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$
ja que $\texttt{columna 3} = 2 \cdot \texttt{columna 1} + 1 \cdot \texttt{columna 2}$.

- Una matriu quadrada A de dimensió m s'anomena *invertible*, i es diu que té *matriu inversa* A^{-1}, si existeix una matriu quadrada A^{-1} de dimensió m tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_m.$$

- Una matriu quadrada A és invertible si i sols si

$$\det A \neq 0.$$

- Per a matrius A d'ordre 2, la matriu inversa, suposant que $\det A \neq 0$, es pot calcular com

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

- Per a matrius d'ordre més gran, la matriu inversa pot calcular-se resolvent un sistema d'equacions lineals.
- Si A i B són matrius quadrades de la mateixa dimensió i invertibles, llavors el producte és una matriu invertible i

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(B^{-1}A^{-1}\right)AB &= B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{I}}B = B^{-1}\mathbb{I}B = B^{-1}B = \mathbb{I}, \\ AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\underbrace{BB^{-1}}_{\mathbb{I}}A^{-1} = A\mathbb{I}A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

- Si A és una matriu invertible, llavors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Rang d'una matriu

- S'anomena *menor* d'ordre p d'una matriu A $m \times n$ al determinant de qualsevol matriu quadrada obtinguda seleccionant p files i p columnes d'A.
- Sigui $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
  - Amb la fila 2 i la columna 2 obtenim un menor d'ordre 1, $M_1 = \left|2\right| = 2$ (el determinant d'una matriu 1×1 és el valor del seu únic element).
  - Seleccionant les files 1 i 2 i les columnes 2 i 4 obtenim un menor d'ordre 2, $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$.
  - Seleccionant les 3 files i les columnes 1, 2 i 4 obtenim un menor d'ordre 3, $M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

- El *rang* de la matriu A de dimensions $m \times n$ és l'ordre del menor d'A d'ordre més gran diferent de zero.
- Com que un menor no es pot tenir amb més files o més columnes que les que té A, hom té que

$$\text{rang } A \leq \min\{m, n\}.$$

  Per exemple, una matriu 3×4 pot tenir rang 0, 1, 2 o 3.
- Hom té que rang $A^T =$ rang A.
- Una matriu quadrada d'ordre m és invertible si i sols si el seu rang és m, ja que el menor d'ordre més gran possible coincideix amb el determinant de la matriu.
- Una matriu té rang 0 si i sols sí tots els seus elements són zero. Altrament, es podria formar un menor d'ordre 1 diferent de zero escollint un element no nul.

Alguns exemples de càlcul de rang:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ té rang igual a 1, ja que, per exemple, el menor format a partir de la primera fila i la primera columna és $\det\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, i no poden formar-se menors d'ordre més gran.
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ té rang 2, ja que, per exemple, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ té rang 2, ja que $\det A = 0$ i, en canvi, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ té rang 3, ja que $\det A = -8 \neq 0$.

Exercicis

1. (P1) Siguin les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   1. Calculeu $C = A + A^2$, $D = AB$, BB^T, $D + B$, $A - C$, $5B$.
   2. Calculeu, si existeix, la inversa d'A, comprovant primer si és invertible, i verifiqueu que la inversa obtinguda és correcta.
   3. Calculeu el determinant de la matriu que s'obté seleccionant els elements de la files primera i tercera i de les columnes segona i tercera de C.

2. (P2) Sigui la matriu 5 tal que l'element de la fila i i columna j és $i+j$. Calculeu el seu determinant i digueu quin rang té.
3. (P3) Sigui E la matriu que s'obté de les matrius del P1 afegint a la matriu A les columnes de la B. Calculeu el seu rang.
4. (P4) Escriviu la matriu P 10×10 que en el quadrant superior esquerra té la matriu identitat, en el superior dret la matriu diagonal Q amb elements $1, 2, -1, 2, 3$, en l'inferior esquerra tot de zeros i en l'inferior dret la matriu diagonal Q^3. Calculeu el determinant de P i el seu rang. Escriviu la matriu 5×5 que s'obté de P seleccionant els elements de les files senars i de les columnes pars, i calculeu també el seu determinant i el seu rang.

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema de m equacions lineals amb n incògnites x_1, x_2,..., x_n és un conjunt d'equacions de la forma

$$\begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n & = & b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

on els coeficients A_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, i b_i, $i = 1, \ldots, m$, són coneguts.

- Si definim la matriu A $m \times n$ i els vectors columna x (n components) i b (m elements) per

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

el sistema d'equacions es pot escriure com

$$Ax = b.$$

- A és la matriu del sistema, b el vector de termes independents i x el vector d'incògnites.

- Un sistema d'equacions lineals s'anomena
  - compatible, si té almenys una solució.
  - incompatible, si no té cap solució.
  - compatible determinat si té una única solució.
  - compatible indeterminat si té infinites solucions.
- El caràcter d'un sistema d'equacions es pot estudiar en termes del rang de la matriu A del sistema i del rang de la *matriu ampliada* A_b del sistema, obtinguda afegint a A una darrera columna que conté el vector b:

$$A_b = (A \mid b) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

- Tenim llavors els següents resultats (teorema de Rouché-Frobenius):
  - Si rang $A_b =$ rang A el sistema és compatible.
  - Si rang $A_b >$ rang A el sistema és incompatible.
  - Si el sistema és compatible i rang $A = n$, llavors és compatible determinat.
  - Si el sistema és compatible i rang $A < n$, llavors és compatible indeterminat. Si rang $A = p < n$, la quantitat $r = n - p > 0$ és el *nombre de graus de llibertat de la solució*.
- Si el sistema és incompatible es té que, més precisament,

$$\text{rang } A_b = \text{rang } A + 1,$$

ja que sols afegim una columna i el rang pot augmentar com a molt en una unitat.

- Si la matriu A del sistema és quadrada, i per tant $m = n$, i a més té $\det A \neq 0$, llavors

$$\text{rang } A = \text{rang } A_b = m = \text{nombre d'incògnites}$$

  i per tant el sistema és compatible i determinat. En aquest cas la solució única es pot calcular amb la matriu inversa:

$$x = A^{-1} b.$$

- Un sistema pot ser compatible i determinat encara que el nombre d'equacions sigui superior al nombre d'incògnites. Per exemple, el sistema amb $m = 3$ i $n = 2$ donat per

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  té $\text{rang } A = \text{rang } A_b = 2 = n$, i per tant és compatible determinat. De fet l'única solució és $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

- Si el sistema és compatible indeterminat, vol dir que té, com a mínim, dues solucions x, y, amb $x \neq y$, i per tant que $Ax = b$, $Ay = b$. Restant les dues relacions s'obté

$$A(x - y) = 0$$

  i per tant el vector $x - y$ és solució del sistema homogeni amb matriu A. Podrem per tant escriure $x - y = v$, on v és una solució del sistema homogeni i $x = y + v$.

- Del càlcul anterior es segueix que, si x és una solució del sistema compatible indeterminat $Ax = b$, llavors en puc obtenir una altra si li afegim una solució del sistema homogeni.
- Si tenim una solució v no nul·la del sistema homogeni, $Av = 0$, llavors $u = \lambda v$, amb λ un nombre real qualsevol, també és solució del sistema homogeni, ja que $A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda \cdot 0 = 0$.
- De la mateixa manera, la suma de dues solucions d'un sistema homogeni també n'és solució.

- El mecanisme anterior proporciona una manera d'obtenir infinites solucions d'un sistema homogeni a partir d'una (o de més d'una) solució del sistema homogeni.
- És essencial que existeixi una solució no nul·la del sistema homogeni. Altrament, sumant el vector zero amb ell mateix o multiplicant-lo per un nombre real no n'obtindrem cap més.
- A més, si x és una solució de $Ax = b$ i v ho és de $Av = 0$ llavors $A(x + v) = Ax + Av = b + 0 = b$ i per tant $x + v$ també és solució del sistema no homogeni.
- Amb tot això hem demostrat que

$$\begin{aligned} \text{totes les solucions de } \{Ax = b\} &= \text{una solució de } \{Ax = b\} \\ &+ \text{totes les solucions de } \{Ax = 0\}\ . \end{aligned}$$

- Els vectors que verifiquen $Ax = 0$ formen un conjunt anomenat el *nucli* de la matriu A. Es designa per $\mathrm{nuc}(A)$ o per $\ker A$.

Reducció Gaussiana i mètode de Cramer

- Hem vist que, quan la matriu del sistema és quadrada i invertible, la solució (única) de $Ax = b$ es pot calcular com $x = A^{-1}b$. Què es pot fet si la matriu no és quadrada, o si ho és i no és invertible?
- A la pràctica, per a sistemes de dimensió molt gran, per exemple, amb m i n de l'ordre de 1000 o més, s'utilitzen mètodes força complexos, alguns dels quals donen sols la solució aproximada. Per a sistemes de dimensió petita el mètode preferit, però, és el mètode de *reducció Gaussiana*, que també pot utilitzar-se per a sistemes compatibles determinats.
- Aquest mètode consisteix a fer *transformacions de files* de la matriu ampliada del sistema, fins que s'arriba a posar la matriu del sistema en una forma pseudo-triangular superior, a partir de la qual la solució es calcula de forma molt simple amb el mètode de *substitució cap endarrere*.

- Les transformacions de files són operacions amb les files de la matriu ampliada del sistema que no canvien les seves solucions. Aquestes operacions són de tres tipus:
  - Reordenació de files: les files i i j es bescanvien el lloc.
  - Escalat d'una fila: tots els elements de la fila i es multipliquen per un nombre real $\alpha \neq 0$.
  - Addició d'un múltiple d'una fila: a la fila i se li afegeix la fila j multiplicada per un nombre real α.
- Es diu que la matriu del sistema està en forma pseudo-triangular superior si tots els elements tals que el seu índex de fila és més gran que el seu índex de columna són zero. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

són matrius pseudo-triangular superiors (la primera és, de fet, triangular superior).

Exemples de reducció Gaussiana. A la matriu ampliada posem una ratlla vertical per separar la darrera columna, i veure així on acaba la matriu del sistema, i posem $\sim$ per indicar una transformació de files.

- Sistema compatible determinat.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matriu ampliada és $A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{array}\right)$, i efectuem les transformacions (alguns passos efectuen diverses transformacions alhora)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

on, per exemple, a la segona transformació hem multiplicat la tercera fila per 3 i després li hem restat la primera multiplicada per 5. La tercera equació és irrellevant, i la segona dóna $-5x_2 = -5$, d'on $x_2 = 1$. Substituint a la primera, $3x_1 + x_2 = 4$, s'obté $x_1 = 1$.

- Sistema incompatible.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriu ampliada és $A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$, i efectuem les transformacions

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & -12 \end{array}\right).$$

La tercera equació no té solució, ja que queda $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 = -12$. Per tant el sistema no té cap solució.

La incompatibilitat es veu també directament de

$$\text{rang } A_b = 3 > 2 = \text{rang } A.$$

- Sistema compatible indeterminat.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

La matriu ampliada és $A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right)$, i efectuem les transformacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La tercera és irrellevant, i de la segona, $x_2 + 4x_3 = 5$, sols pot, per exemple, calcular-se x_2 en termes de x_3, obtenint-se $x_2 = 5 - 4x_3$. Substituint llavors a la primera equació s'arriba a

$$3x_1 = 4 - 2x_2 + x_3 = 4 - 2(5 - 4x_3) + x_3 = -6 + 9x_3,$$

d'on $x_1 = -2 + 3x_3$. Posant $x_3 = \lambda$, tenim que hi ha infinites solucions

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 3\lambda, \\ x_2 &= 5 - 4\lambda, \\ x_3 &= \lambda, \end{aligned}$$

amb λ qualsevol.

- Càlcul d'una matriu inversa.

La reducció Gaussiana pot emprar-se per calcular la inversa d'una matriu, si aquesta s'amplia amb la matriu identitat i es fan transformacions fins que la part corresponent a la matriu original es converteix en la identitat. La part ampliada resultant és llavors la matriu inversa de la donada.

Sigui per exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{amb } \det A = -2 \neq 0, \text{ i per tant existeix } A^{-1}.$$

Fem

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right),$$

i per tant $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Quan la matriu del sistema és quadrada i invertible, és possible calcular la solució (única) amb la matriu inversa. A vegades, però, sols interessa calcular una component de la solució. Per exemple, si tenim un circuit amb 6 variables de potència (corrents i voltatges) independents hauríem de calcular la inversa d'una matriu 6×6, però pot ser que sols necessitem saber el corrent que passa per una certa branca del circuit. Una anàlisi de com es calcula la matriu inversa permet fer sols els càlculs necessaris per calcular la incògnita que ens interessa. Això és el que proporciona el mètode de Cramer.
- **Mètode de Cramer**. Sigui $Ax = b$ amb $\det A \neq 0$. En aquest cas la component i-èsima x_i de la solució única del sistema es pot calcular mitjançant
$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$
on A_i és la matriu obtinguda a partir d'A substituint la columna i pel vector b.

- Sigui

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Com que $\det A = 24 \neq 0$, podem emprar el mètode de Cramer per calcular, per exemple, x_2:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}.$$

Exercicis

5. (P5) Considereu els sistemes homogenis següents:

   1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$
   2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$
   3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 5x & - & 12y & - & 3z & + & 3t & + & 2u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & 2t & + & 2u & = & 0 \\ 2x & - & 5y & - & z & + & t & + & u & = & 0 \end{array}\right.$$
   4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ -2x & & & + & 4z & - & 3t & = & 0 \\ 5x & + & 3y & + & 5z & - & 3t & = & 0 \\ 7x & + & y & - & 9z & + & 7t & = & 0 \end{array}\right.$$

   Per a cada sistema, escriviu la matriu corresponent, calculeu el seu rang i trobeu totes les solucions

6. (P6) Considereu els sistemes següents:

   1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$
   2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$
   3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & z & + & t & = & -1 \\ -2x & & & + & 4z & - & 3t & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & 5z & - & 3t & = & 1 \\ 7x & + & y & - & 9z & + & 7t & = & 0 \end{array}\right.$$

   Decidiu el caràcter de cada sistema, i trobeu totes les seves solucions, si existeixen.

7. (P7) Siguin els sistemes amb matrius i termes independents

   1. $$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   2. $$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Demostreu que els dos són compatibles determinats, i calculeu, emprant el mètode de Cramer, la tercera component de la solució del primer i la segona component de la solució del segon.

Vectors i valors propis d'una matriu quadrada

- Si A és una matriu quadrada $n \times n$, quan actua sobre un vector columna amb n components produeix un altre vector columna amb n components.
- Per exemple,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$
- Té llavors sentit preguntar-se si el vector resultant és proporcional al vector original.
- Es diu que v, $v \neq 0$, és un *vector propi* (VEP) de A si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$Av = \lambda v.$$
- Es diu que λ és el *valor propi* (VAP) associat al VEP v.

- Sigui $A = \begin{pmatrix} -6 & -24 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Hom veu que

$$\begin{pmatrix} -6 & -24 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & -24 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Per tant $(-4, 1)$ és un VEP amb VAP 0, i $(-3, 1)$ és un VEP amb VAP 2.

- Si v i w són dos VEP amb el mateix VAP λ, llavors qualsevol combinació lineal dels dos també és un VEP, amb el mateix VAP. En efecte, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tindrem, per les propietats dels productes de matrius i escalars,

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A(v) + \beta A(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w).$$

- Un VAP pot ser zero, però el vector $v = 0$, que òbviament satisfà $A \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0$, no es considera un VEP.
- Anem ara a veure com calcular els VEP i VAP d'una matriu quadrada A de dimensió n.
- Si v és un VEP amb VAP λ es té $Av = \lambda v$. Escrivint $v = \mathbb{I}_n v$, on $\mathbb{I}_n$ és la matriu identitat $n \times n$, queda

$$Av = \lambda \mathbb{I}_n v, \quad \text{d'on} \quad (A - \lambda \mathbb{I}_n)v = 0.$$

- Aquest és un sistema lineal per a les components de v, que té segur la solució $v = 0$ que no ens interessa, ja que no seria un VEP. Si volem tenir una solució $v \neq 0$, cal que el sistema sigui compatible indeterminat, i per tant que rang $(A - \lambda \mathbb{I}_n) < n$.
- Com que $A - \lambda \mathbb{I}_n$ és una matriu quadrada de dimensió n, això passa si i sols si

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0.$$

- L'expressió $\det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$ és un polinomi de grau n en la variable λ, que són els VAP que estem cercant. Aquest polinomi s'anomena *polinomi característic* de l'endomorfisme i es designa per $P(\lambda)$.
- Per calcular els VAP cal solucionar l'equació polinòmica de grau n

$$P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0.$$

- Aquesta equació té, en general, n arrels, amb les arrels complexes en parelles de complexos conjugats degut a que els elements d'A, i per tant els coeficients de $P(\lambda)$, són reals. Sols les arrels reals, però, donen VAP associats a VEP, ja que sols considerem vectors reals. De tota manera, anomenarem valor propi a qualsevol solució de l'equació característica, encara que no es correspongui amb un VEP.
- Una vegada calculats els VAP λ, s'ha de posar cadascun d'ells a

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n)v = 0$$

i solucionar aquest sistema homogeni.

- Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- El polinomi característic s'obté calculant el determinant de la matriu

$$A - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

- Resulta

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3.$$

- Tenim que

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3 = -(\lambda - 3)(\lambda^2 + 1).$$

- Els VAP són $\lambda = 3$ i les solucions de $\lambda^2 + 1 = 0$, que són $\pm j$ i per tant no corresponen a cap VEP.
- Per calcular el VEP corresponent a $\lambda = 3$, escrivim $v = (v_1, v_2, v_3)$ i substituïm $\lambda = 3$ a $(A - \lambda \mathbb{I}_3)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- De les dues darreres equacions surt $v_2 = v_3 = 0$, i la primera equació no diu res, de manera que queda v_1 lliure. Posant $v_1 = 1$ resulta que el VEP associat al VAP $\lambda = 3$ és $v = (1, 0, 0)$.
- Tots els múltiples de $v = (1, 0, 0)$ són també VEP d'A amb VAP 3.

Exercicis

8. (P8) Calculeu els VAP i VEP de cadascuna de les matrius següents

   1. $$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   2. $$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   3. $$M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

9. (P9) Calculeu els polinomis característics de cadascuna de les matrius del P7, i representeu les seves gràfiques entre dos punts escollits de manera que es vegin tots els seus zeros.
10. (P10) Calculeu els VAP i VEP de les matrius M_1^2, $M_1 M_2$ i $M_1 - M_3$, on M_1, M_2 i M_3 són les del P8.
11. (P11) Sigui la matriu 6×6 que s'obté de la matriu P del P4 seleccionant les seves 6 primeres files i columnes. Calculeu els seus VAP i VEP.