

Sessió 8: aplicar

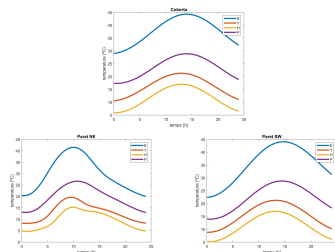
Blas Echebarría & Toni Guillamon
Departaments de Física Aplicada i de Matemàtiques
Secció EPSEB

30 de novembre-4 de desembre de 2020

Objectiu de la pràctica



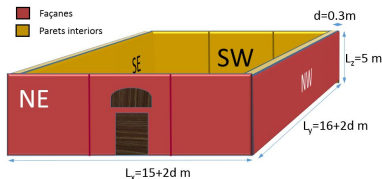
Vista aèria: orientació de l'edifici.



Temperatures a la coberta i a les façanes NE i SW, en 4 dates d'hivern, primavera, estiu, tardor, resp.

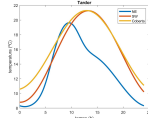
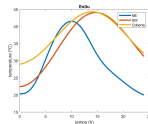
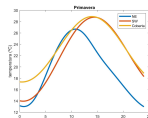
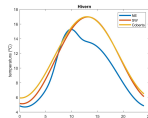
- ▶ Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant **el flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitable.
- ▶ Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: la **coberta** i els murs **nordest** i **sudoest**.

Objectiu de la pràctica



Representació esquemàtica de l'edifici ($d = 0.3$).

- Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant el **flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitacle.
- Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: la **coberta** i els murs **nordest** i **sudoest**.



Outline

- 1 Flux de calor
- 2 Formulació matemàtica i esquema computacional



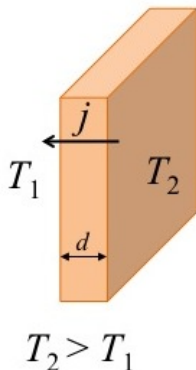
Flux de calor

Si entre dues zones d'un material existeix una diferència de temperatura, apareix un flux de calor j , donat per

$$j = -k \frac{T_2 - T_1}{d}, \quad (1)$$

on:

- ▶ d : espessor del material
- ▶ k : conductivitat tèrmica del material ($\text{W/m} \cdot \text{K}$)



Conductivitat tèrmica de materials

Diferents materials presenten valors diferents de la conductivitat tèrmica

	Aire	Maó	Vidre	Formigó	Granit
k (W/m · K)	0.024	0.7	0.8	1.0	2.5

Exercici 1

Determineu el flux de calor per a diversos materials i espessors. Per a un flux de calor i temperatura externa donats, calculeu la temperatura interior segons les característiques de la paret.

Flux de calor i energia consumida

El flux de calor j té unitats de potència per unitat de superfície (W/m^2). Si multipliquem el flux de calor j per tota la superfície a través de la qual flueix el calor, S , tindrem la potència total (l'energia per unitat de temps) que es perd (o es guanya) degut a aquest flux de calor

$$P = j \cdot S.$$

En un interval de temps determinat, t , l'energia perduda o guanyada és

$$E = P \cdot t.$$

Exercici 2

Donades una diferència de temperatures i unes característiques de les parets laterals, determineu l'energia total perduda al llarg del dia deguda al flux de calor.

Energia consumida i canvi de temperatura

Un canvi en l'energia es tradueix en un canvi en la temperatura. Si definim el calor específic c_p com la quantitat de calor que s'ha de subministrar a un kilogram d'un material per a augmentar un grau centígrad la seva temperatura, podem posar

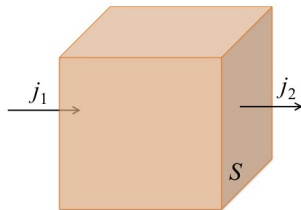
$$\Delta E = mc_p \Delta T$$

o, per unitat de temps,

$$\frac{dE}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt}.$$

Canvi de temperatura degut a un flux de calor

Quan el canvi en l'energia és degut a un flux de calor, tenim



$$\frac{dE}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt} = -(j_2 \cdot S - j_1 \cdot S) = \frac{j_1 - j_2}{d} S \cdot d = \frac{j_1 - j_2}{d} V,$$

on V és el volum de la cel·la. Definint la densitat del material com $\rho = m/V$, tenim

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{j_1 - j_2}{d}.$$

Cas bàsic: cel·la amb 2 veïnes

T_1	T	T_2
-------	-----	-------

Aplicant la fórmula anterior i l'equació (1) del flux de calor:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{k_1 (T_1 - T)/d + k_2 (T_2 - T)/d}{d}.$$

Definint $\alpha_i := \frac{k_i}{\rho c_p d^2}$ per a $i = 1, 2$, tenim que

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1 (T_1 - T) + \alpha_2 (T_2 - T).$$

Ara utilitzem una aproximació de la derivada:

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}.$$

Cas bàsic: cel·la amb 2 veïnes

$\overline{T}_1$	$\overline{T}$	$\overline{T}_2$
------------------	----------------	------------------

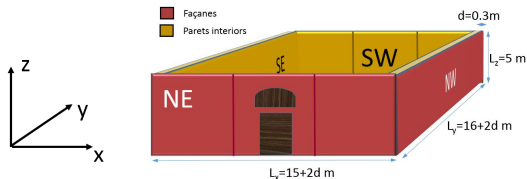
$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \approx \alpha_1 (T_1 - T) + \alpha_2 (T_2 - T).$$

Definim $T_i^{(n+1)} := T_i(t + \Delta t)$, $T_i^{(n)} := T_i(t)$, per a $i = 0, 1, 2$.

Llavors,

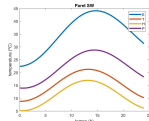
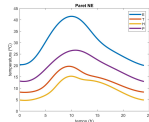
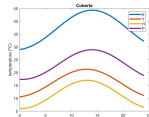
$$\begin{aligned} T^{(n+1)} &\approx \alpha_1 \Delta t T_1^{(n)} + (1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t) T^{(n)} + \alpha_2 \Delta t T_2^{(n)} \\ &= (\alpha_1 \Delta t \quad 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t \quad \alpha_2 \Delta t) \begin{pmatrix} T_1^{(n)} \\ T^{(n)} \\ T_2^{(n)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Objectiu de la pràctica (recordatori)



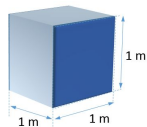
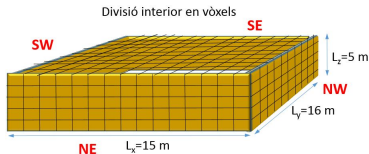
Representació esquemàtica de l'edifici ($d = 0.3$).

- Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant el **flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitacle.
- Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: la **coberta** i els murs **nordest** i **sudoest**.



Esquema general de la computació

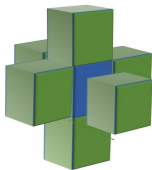
- ▶ Considerem un edifici de $15 \times 16 \times 5 \text{ m}^3$.¹
- ▶ Dividirem l'interior en $15 \times 16 \times 5$ cel·les (cubs) d' 1 m^3 de volum cadascuna. Dins de cada cel·la, suposarem que la temperatura no varia en un període curt de temps.
- ▶ Estudiarem el flux de calor provinent de les seves cel·les veïnes.



(Esquerra) Divisió interior en cel·les. (Centre) Cel·la interior aïllada. (Dreta) Una cel·la interior (en blau) i les seves 6 veïnes (en verd). Les cel·les veïnes anterior i posterior s'han separat intencionadament per poder visualitzar-les totes.

¹Arrodoniment de les mesures de la nau de Can Bagaria.

Numeració de les cel·les



Una cel·la interior (en blau) i les
seves 6 veïnes (en verd)

Cada cel·la es pot
indexar per (i_x, i_y, i_z) ,
amb $i_* \in \{1, \dots, n_*\}$. A
cada índex, li associarem
un **ordre** definit per la
fórmula

$$i := (i_y - 1) n_x n_z + (i_z - 1) n_x + i_x, \quad (3)$$

on $i_x = 1$ equival a la paret lateral esquerra, $i_y = 1$ equival a la paret anterior (exterior), $i_z = 1$ equival a la paret inferior (sòl).

Numeració de les cel·les

$$i := (i_y - 1) n_x n_z + (i_z - 1) n_x + i_x. \quad (4)$$

Observem, per exemple, que quan $i_y = 1$, l'ordre i recorre els valors que van des de 1 (corresponent a l'índex $(1, 1, 1)$) fins a $n_z n_x$ (corresponent a $(n_x, 1, n_z)$). D'altra banda, una cel·la interior és tal que i_x , i_y i i_z són diferents de 1 i no valen n_x , n_y o n_z , respectivament.

Quan $n_x = 15$, $n_y = 16$ i $n_z = 5$,

$$i := 75 (i_y - 1) + 15 (i_z - 1) + i_x. \quad (5)$$

Exercici 3

Determineu l'ordre de la cel·la $(2, 3, 2)$ i de les seves 6 cel·les veïnes. Quin problema us trobaríeu si consideréssiu la cel·la $(1, 3, 2)$?

Què fa el programa TransmissioCalor3D.m?

- ▶ Considerem com a variables les temperatures de les **1200 cel·les de l'interior**, i de les **6 superfícies exteriors** de l'edifici. Tenim, doncs, **1206 variables** en joc.
- ▶ L'**ordre** de cada variable ve donat per la fórmula (5). A les temperatures de les **superfícies exteriors** els assignem els **ordres 1201 a 1206**, seguint l'ordenació NE, SE, sòl, sostre (coberta), SW i NW. En el programa es denoten per TNE, TSE, Tinf, Tsup, TSW i TempNW, respectivament. Fixem-nos que la paret NW rep un tractament diferent ja que no està exposada a l'exterior sinó que llinda amb la nau contigua.
- ▶ Dividirem un dia en **$24 \times 30 = 720$ divisions temporals** (és a dir, de $\Delta t = 2$ minuts). A cada **iteració**, recalcularem les temperatures de les 1200 (nCell) cel·les interiors utilitzant una generalització de la fórmula (2).

Plantejament matemàtic

- ▶ Denotarem amb $T_i^{(n)}$ la temperatura de la cel·la d'ordre i en la iteració n -èsima. Per exemple, T_{23}^1 indica la temperatura inicial de la cel·la (8, 1, 2). Les condicions inicials les prenem aleatòries, prop de 18 °C.
- ▶ Observem que per a cada cel·la tindrem un **producte d'una fila de coeficients per una columna de temperatures**. Per tant, podem calcular les temperatures de la iteració $(n + 1)$ -èsima a partir del **producte d'una matriu de transmissió de calor A** (aa al programa) formada per les corresponents 1206 files **pel vector de les temperatures** de la iteració n -èsima. Si denotem per $\mathcal{T}$ el vector de totes les temperatures, segons (2) tenim que:

$$\mathcal{T}^{(n+1)} = A \mathcal{T}^{(n)}.$$

- ▶ Observem que podem estudiar l'**evolució tèrmica** a través de la **iteració d'una aplicació lineal**.

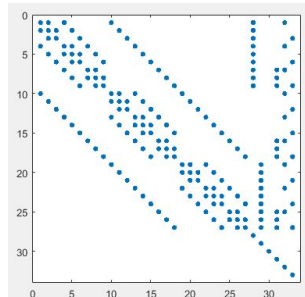
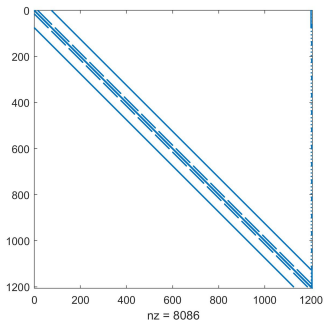
Exemple de construcció d'una fila de la matriu de transmissió

- Si una cel·la té **contacte amb una de les superfícies exteriors**, aleshores el coeficient corresponent se situarà a la columna corresponent a la temperatura de l'esmentada superfície exterior. Per exemple, la **cel·la (1, 1, 1)** té ordre 1 i, per tant, té contacte amb el **sòl** (ordre 1203), la **paret NE** (ordre 1201) i la **paret SE** (ordre 1202), a més de les **cel·les (2, 1, 1), (1, 1, 2) i (1, 2, 1)**, que tenen ordres 2, 16 i 76, resp. Aleshores, la **fila 1** de la matriu tindrà els següents elements:

- El coeficient $1 - (\alpha_2 + \alpha_{16} + \alpha_{76} + \alpha_{1201} + \alpha_{1202} + \alpha_{1203}) \Delta t$ a la columna 1.
- El coeficient $\alpha_m \Delta t$ a la columna m , per a $m = 2, 16, 76, 1201, 1202, 1203$.
- Zeros a les altres 1199 columnes.

A les darreres 6 files, posarem zeros arreu excepte 1's a la diagonal. Es fa així perquè les temperatures exteriors són dades que vénen donades (fitxers de temperatures i constants).

Aspecte de la matriu de transmissió



En blau, les components de la matriu 1206×1206 que són diferents de zero, aconseguida amb la comanda `spy` de Matlab. És una matriu **esparsa**. A l'esquerra, el cas de $3 \times 3 \times 3$ cel·les.

Coeficients de transmissió

► Prendrem sempre:

- $\alpha_m = \alpha_{aire}$ (aAir al programa) per a tota $m = 1, \dots, 1200$. És a dir, el contacte entre cel·les interiors és sempre a través de l'aire.
- $\alpha_n = \alpha_{mur}$ (aMur al programa) per a $m \in \{1201, 1202, 1205, 1206\}$. Reflecteix la transmissió de calor a través dels murs exteriors. Aquest valor dependrà de l'espessor (d) i de la constant k , que ve determinada pels materials.
- $\alpha_{1203} = 0$ (aInf perquè considerem que el sòl és aïllant (simplificació).
- $\alpha_{1204} = \alpha_{sup}$ (aSup al programa) perquè **explorarem què passa si canviem aquest paràmetre.**

Exercici 4

Determineu la matriu A en el cas d'una configuració de $2 \times 2 \times 1$ cel·les.

Programari de comportament tèrmic en edificis

- ▶ *Antesol: programa de simulación del comportamiento térmico de cerramientos soleados.*
- ▶ *Antherm: Analysis of Thermal behavior of Building Constructions with Heat Bridges.*
- ▶ *WUFI: is a family of software products that allows realistic calculation of the transient coupled one- and two-dimensional heat and moisture transport in walls and other multi-layer building components exposed to natural weather.*
- ▶ *Energy Plus, HAMT: Combined Heat and Moisture Transfer (HAMT) Model.*
- ▶ ...

Aquí hem volgut mostrar una manera d'estudiar el comportament tèrmic per entendre millor com funcionen aquests programes..