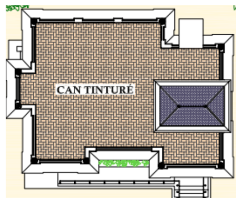


Sessió 7: apliquem

Blas Echebarria & Toni Guillamon
Departaments de Física i de Matemàtiques
Secció EPSEB

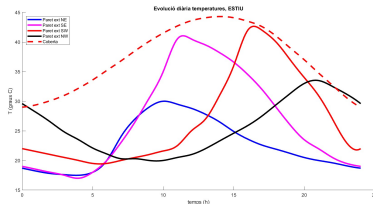
Octubre-novembre de 2023

Objectiu de la pràctica



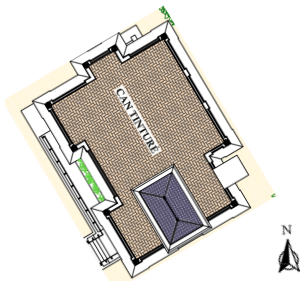
Vista aèria: orientació de l'edifici.
Font: APAC-EPSEB

- Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant **el flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitable.



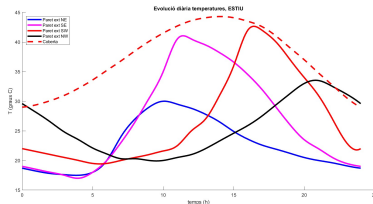
Temperatures a les 4 façanes i a la coberta durant un dia concret d'estiu.

Objectiu de la pràctica



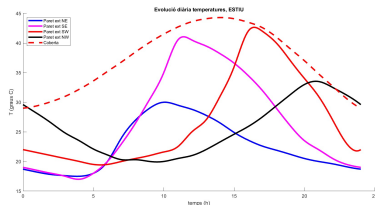
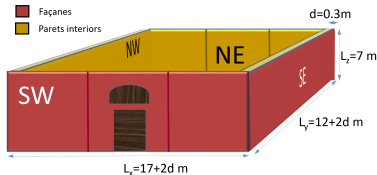
Vista aèria: orientació **nord** de l'edifici.
Font: APAC-EPSEB

- ▶ Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant **el flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitable.
- ▶ Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: els murs **nord-oest, nord-est, sud-est i sud-oest**, i la **coberta**.



Temperatures a les 4 façanes i a la coberta durant un dia concret d'estiu.

Objectiu de la pràctica



Representació esquemàtica de l'edifici.

Temperatures a les 4 façanes i a la coberta.

- ▶ Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant **el flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitable.
- ▶ Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: els murs **nord-oest, nord-est, sud-est i sud-oest**, i la **coberta**.

Índex



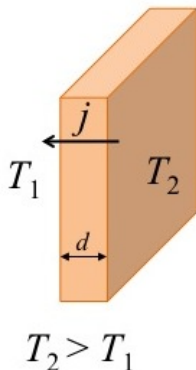
Flux de calor

Si entre dues zones d'un material existeix una diferència de temperatura, apareix un flux de calor j , donat per

$$j = -k \frac{T_2 - T_1}{d}, \quad (1)$$

on:

- ▶ d : gruix del material
- ▶ k : conductivitat tèrmica del material ($\text{W/m} \cdot \text{K}$)



Conductivitat tèrmica de materials

Diferents materials presenten valors diferents de la conductivitat tèrmica

	Aire	Maó	Vidre	Formigó	Granit	Fusta
k (W/m · K)	0.024	0.7	0.8	1.0	2.5	0.13-0.29

Exercici 1

Determineu el flux de calor per a diversos materials i gruixos. Per a un flux de calor i temperatura externa donats, calculeu la temperatura interior segons les característiques de la paret.

Flux de calor i energia consumida

El flux de calor j té unitats de potència per unitat de superfície (W/m^2). Si multipliquem el flux de calor j per tota la superfície a través de la qual flueix el calor, S , tindrem la potència total (l'energia per unitat de temps) que es perd (o es guanya) degut a aquest flux de calor

$$P = j \cdot S.$$

En un interval de temps determinat, t , l'energia perduda o guanyada és

$$E = P \cdot t.$$

Exercici 2

Donades una diferència de temperatures i unes característiques de les parets laterals, determineu l'energia total perduda al llarg del dia deguda al flux de calor.

Energia consumida i canvi de temperatura

Un canvi en l'energia es tradueix en un canvi en la temperatura. Si definim el calor específic c_p com la quantitat de calor que s'ha de subministrar a un kilogram d'un material per a augmentar un grau centígrad la seva temperatura, podem posar

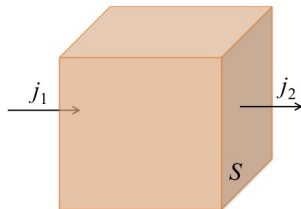
$$\Delta E = mc_p \Delta T$$

o, per unitat de temps,

$$\frac{dE}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt}.$$

Canvi de temperatura degut a un flux de calor

Quan el canvi en l'energia és degut a un flux de calor, tenim

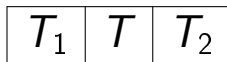


$$\frac{dE}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt} = -(j_2 \cdot S - j_1 \cdot S) = \frac{j_1 - j_2}{d} S \cdot d = \frac{j_1 - j_2}{d} V,$$

on V és el volum de la cel·la. Definint la densitat del material com $\rho = m/V$, tenim

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{j_1 - j_2}{d}.$$

Cas bàsic: cel·la amb 2 veïnes



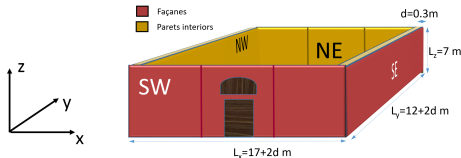
Aplicant la fórmula anterior i l'equació (??) del flux de calor:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{k_1 (T_1 - T)/d + k_2 (T_2 - T)/d}{d}.$$

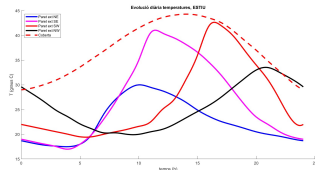
Definint $\alpha_i := \frac{k_i}{\rho c_p d^2}$ per a $i = 1, 2$, tenim que

$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1 (T_1 - T) + \alpha_2 (T_2 - T).$$

Objectiu de la pràctica (recordatori)



Representació esquemàtica de l'edifici.

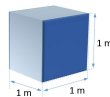
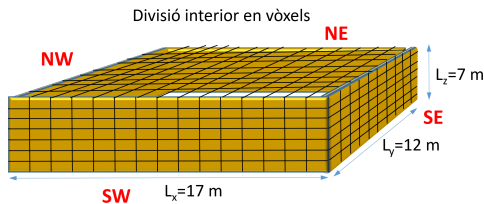


Temperatures a les 4 façanes i a la coberta.

- ▶ Volem calcular les **temperatures a l'interior de l'edifici al llarg de tot un dia**. Ho farem estudiant **el flux de calor** que hi arriba a través dels murs, el sòl i el sostre (coberta), a més de l'aire interior de l'habitable.
- ▶ Les **dades** seran les **temperatures en superfícies exteriors**: els murs **nord-oest, nord-est, sud-est i sud-oest**, i la **coberta**.

Esquema general de la computació

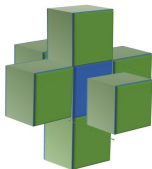
- ▶ Considerem un edifici de $17 \times 12 \times 7 \text{ m}^3$ (1428 m^3).¹
- ▶ Dividirem l'interior en **1428 cel·les** (cubs) d' 1 m^3 de volum cadascuna. Dins de cada cel·la, suposarem que la temperatura no varia en un període curt de temps.
- ▶ Estudiarem el flux de calor provinent de les seves cel·les veïnes.



(Esquerra) Divisió interior en cel·les. (Centre) Cel·la interior aïllada. (Dreta) Una cel·la interior (en blau) i les seves 6 veïnes (en verd). Les cel·les veïnes anterior i posterior s'han separat intencionadament per poder visualitzar-les totes.

¹Arrodoniment de les mesures de l'edifici de Can Tinturé.

Numeració de les cel·les



Una cel·la interior (en blau) i les
seves 6 veïnes (en verd)

Cada cel·la es pot
indexar per (i_x, i_y, i_z) ,
amb $i_* \in \{1, \dots, n_*\}$. A
cada índex, li associarem
un **ordre** definit per la
fórmula

$$i := (i_y - 1) n_x n_z + (i_z - 1) n_x + i_x, \quad (2)$$

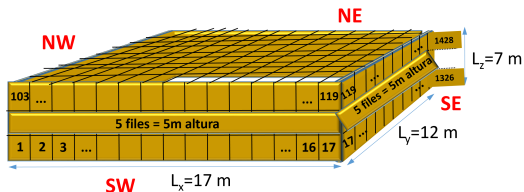
on $i_x = 1$ equival a la paret lateral esquerra, $i_y = 1$ equival a la paret anterior (exterior), $i_z = 1$ equival a la paret inferior (sòl). En aquest exemple, $n_* = 1428$.

Numeració de les cel·les

$$i := (i_y - 1) n_x n_z + (i_z - 1) n_x + i_x. \quad (3)$$

Quan $n_x = 17$, $n_y = 12$ i $n_z = 7$,

$$i := 17 \times 7 (i_y - 1) + 17 (i_z - 1) + i_x. \quad (4)$$



Divisió interior en cel·les i la seva numeració en el programa.

Cas bàsic: cel·la amb 2 veïnes

$\overline{T}_1$	$\overline{T}$	$\overline{T}_2$
------------------	----------------	------------------

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \approx \alpha_1 (T_1 - T) + \alpha_2 (T_2 - T).$$

Definim $T_i^{(n+1)} := T_i(t + \Delta t)$, $T_i^{(n)} := T_i(t)$, per a $i = 0, 1, 2$.

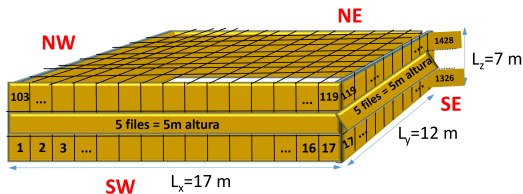
Llavors,

$$\begin{aligned} T^{(n+1)} &\approx \alpha_1 \Delta t T_1^{(n)} + (1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t) T^{(n)} + \alpha_2 \Delta t T_2^{(n)} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \Delta t & 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t & \alpha_2 \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{(n)} \\ T^{(n)} \\ T_2^{(n)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Modelització global del problema

Què fa el programa TransmissioCalor3D.mlx?

- Considerem com a variables les temperatures de les **1428 cel·les de l'interior**, i de les **6 superfícies exteriors** de l'edifici. Tenim, doncs, **1434 variables** en joc.



Divisió interior en cel·les i la seva numeració en el programa.

- L'**ordre** de cada variable ve donat per la fórmula (??). A les temperatures de les **superfícies exteriors** els assignem els **ordres 1429 a 1434**, seguint l'ordenació S, W, sòl/terra, sostre/coberta, N i E. En el programa es denoten per TS, TW, Tinf, Tsup, TN i TE, respectivament.

Modelització global del problema

Divisió temporal i càlcul del programa TransmissioCalor3D.mlx

- Dividirem un dia en $24 \times 30 = 720$ divisions temporals (és a dir, de $\Delta t = 2$ minuts). A cada iteració, recalculem les temperatures de les 1428 (nCell) cel·les interiors utilitzant una generalització de la fórmula (??).

$$T^{(n+1)} \approx (\alpha_1 \Delta t \quad 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t \quad \alpha_2 \Delta t) \begin{pmatrix} T_1^{(n)} \\ T^{(n)} \\ T_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

Modelització global del problema

Evolució tèrmica expressada com a aplicació lineal

$$\mathcal{T}^{(n+1)} \approx (\alpha_1 \Delta t \quad 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t \quad \alpha_2 \Delta t) \begin{pmatrix} T_1^{(n)} \\ T^{(n)} \\ T_2^{(n)} \end{pmatrix}$$

- Per a cada cel·la tenim un **producte d'una fila de coeficients per una columna de temperatures**. Per tant, podem calcular les temperatures de la iteració $(n+1)$ -èsima a partir del **producte d'una matriu de transmissió de calor A** (aa al programa) formada per les 1434 files corresponents **del vector de les temperatures** de la iteració n -èsima. Si denotem per $\mathcal{T}$ el vector de totes les temperatures, segons (??) tenim:

$$\mathcal{T}^{(n+1)} = A \mathcal{T}^{(n)}.$$

- Observem que podem estudiar l'**evolució tèrmica** a través de la **iteració d'una aplicació lineal**.

Construcció d'una fila de la matriu de transmissió

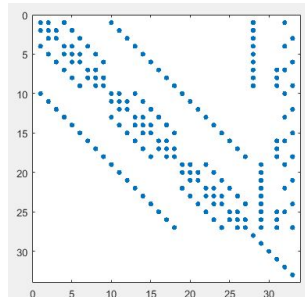
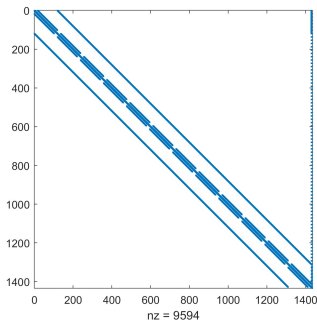
Exemple

- Si una cel·la té **contacte amb una de les superfícies exteriors**, aleshores el coeficient corresponent se situarà a la columna corresponent a la temperatura de l'esmentada superfície exterior. Per exemple, la **cel·la (1, 1, 1)** té ordre 1 i, per tant, té contacte amb el **sòl** (ordre 1431), la **paret SW** (ordre 1429) i la **paret NW** (ordre 1430), a més de les **cel·les (2, 1, 1), (1, 1, 2) i (1, 2, 1)**, que tenen ordres 2, 18 i 120, resp. Aleshores, la **fila 1** de la matriu tindrà els següents elements:

- El coeficient $1 - (\alpha_2 + \alpha_{18} + \alpha_{120} + \alpha_{1429} + \alpha_{1430} + \alpha_{1431}) \Delta t$ a la columna 1.
- El coeficient $\alpha_m \Delta t$ a la columna m , per a $m = 2, 18, 120, 1429, 1430, 1431$.
- Zeros a les altres 1427 columnes.

A les darreres 6 files, posarem zeros arreu excepte 1's a la diagonal. Es fa així perquè les temperatures exteriors són dades constants que estan fixades (fitxers de temperatures i constants).

Aspecte de la matriu de transmissió



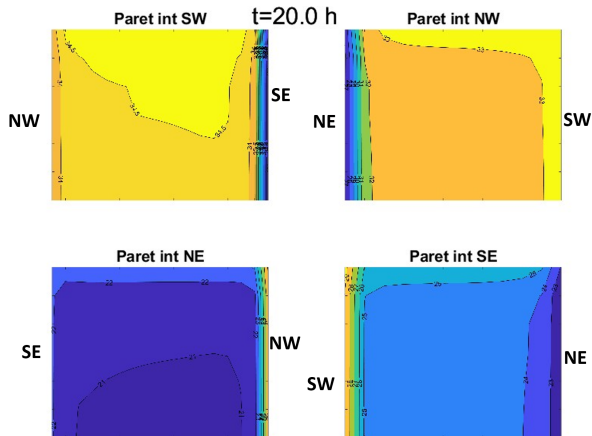
En blau, les components de la matriu 1434×1434 que són diferents de zero, aconseguida amb la comanda `spy` de Matlab. És una matriu **esparsa**. A l'esquerra, el cas de $3 \times 3 \times 3$ cel·les.

Coeficients de transmissió

► Prendrem sempre:

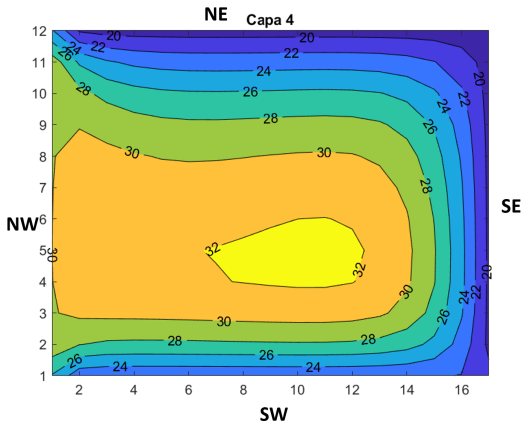
- $\alpha_m = \alpha_{aire}$ (aAir al programa) per a tota $m = 1, \dots, 1428$. És a dir, el contacte entre cel·les interiors és sempre a través de l'aire.
- $\alpha_m = \alpha_{mur}$ (aMur al programa) per a $m \in \{1429, 1430, 1433, 1434\}$. Reflecteix la transmissió de calor a través dels murs exteriors. Aquest valor dependrà del gruix (d) i de la constant k , que ve determinada pels materials.
- $\alpha_{1431,1432} = 0$ (aInf, aSup al programa; considerem que el sòl i el sostre són aïllants (simplificació)).

Visualització dels gràfics de sortida: parets interiors



Un panell corresponent a una orientació (per exemple, Paret SW) es mostra tal com ho veuria un observador situat en el mateix punt cardinal a l'exterior de l'edifici (en aquest, situat al SW si és la Paret SW). A cada panell s'indiquen els símbols de les parets veïnes (p. ex., NW a l'esquerra i SE a la dreta pel que fa a la Paret SW). La part inferior de tots els panells llinda amb el sòl/terra i la superior amb el sostre/coberta.

Visualització dels gràfics de sortida: capes horitzontals



Visualització des d'un punt de vista zenital de la distribució de temperatures a la Capa 4 (entre 3 i 4 metres d'alçada) a les 20h.

Programari de comportament tèrmic en edificis

- ▶ *Antesol: programa de simulación del comportamiento térmico de cerramientos soleados.*
- ▶ *Antherm: Analysis of Thermal behavior of Building Constructions with Heat Bridges.*
- ▶ *WUFI: is a family of software products that allows realistic calculation of the transient coupled one- and two-dimensional heat and moisture transport in walls and other multi-layer building components exposed to natural weather.*
- ▶ *Energy Plus, HAMT: Combined Heat and Moisture Transfer (HAMT) Model.*
- ▶ ...

Aquí hem volgut mostrar una manera d'estudiar el comportament tèrmic per entendre millor com funcionen aquests programes..