

Problemes de

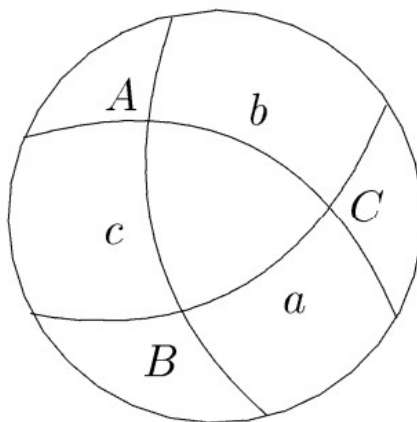
**TRIGONOMETRIA ESFÈRICA I
MÈTODES DE CÀLCUL EN
ASTRONOMIA**

1999-2000

Antoni Guillamon

Josep Masdemont

1 Resolució de triangles esfèrics



Per als càlculs involucrats en la resolució d'aquests problemes, podeu utilitzar (i modificar al vostre gust) el programari per a MapleV de l'assignatura. A l'adreça <http://toni.ma1.upc.ct>, seleccioneu Material Docent, i hi trobareu el “programa de resolució de triangles esfèrics” (`esferics.mws`), el “fitxer d'ajuda del programa de resolució” (`ajuda.txt`) i un programa de “representació gràfica de triangles esfèrics” (`grafics.mws`).

1. Siguin e_i , per a $i = 1, \dots, 4$, els quatre excessos esfèrics, respectivament, dels triangles ABC , $\overline{ABC}$, $A\overline{BC}$ i $AB\overline{C}$. Demostreu que $\sum_{i=1}^4 e_i = 360^\circ$.
2. Sigui S l'àrea d'un triangle esfèric ABC situat sobre una esfera de radi R i e el seu excés esfèric mesurat en graus.
 - (a) Calculeu S si $A = B = C = 90^\circ$.
 - (b) Demostreu que $S = \frac{\pi R^2 e}{180}$.
 - (c) Trobeu S si els costats del triangle polar de ABC sumen 200° .
3. Què es pot dir de l'angle C d'un triangle esfèric ABC si:
 - (a) $A = 160^\circ$ i $B = 110^\circ$?
 - (b) $A = 170^\circ$ i $B = 150^\circ$?
 - (c) $A = 130^\circ$ i $B = 40^\circ$?
4. Quins dels següents triangles esfèrics són possibles?
 - (a) $a = 120^\circ$, $b = 30^\circ$ i $c = 20^\circ$.

- (b) $a = 100^\circ$, $b = 90^\circ$ i $c = 65^\circ$.
- (c) $a = 175^\circ$, $b = 160^\circ$ i $c = 30^\circ$.
- (d) $A = 20^\circ$, $B = 50^\circ$ i $C = 109^\circ$.
- (e) $A = 110^\circ$, $B = 53^\circ$ i $C = 240^\circ$.
- (f) $A = 95^\circ$, $B = 123^\circ$ i $C = 115^\circ$.
5. Resoleu els següents triangles esfèrics, dels quals se'n donen tres elements coneguts en cada cas:
- (a) $a = 108^\circ 42'$, $b = 79^\circ 27'$, $c = 113^\circ 02'$.
- (b) $A = 71^\circ 18'$, $B = 100^\circ 33'$, $C = 66^\circ 58'$.
- (c) $a = 78^\circ 32'$, $b = 103^\circ 44'$, $C = 112^\circ$.
- (d) $A = 67^\circ 22'$, $B = 105^\circ 49'$, $c = 117^\circ 13'$.
- (e) $a = 71^\circ 32'$, $A = 77^\circ 12'$, $b = 105^\circ 21'$.
- (f) $a = 72^\circ 11'$, $A = 88^\circ 11'$, $B = 106^\circ 33'$.
- (g) $a = 56^\circ 22'$, $b = 65^\circ 54'$, $c = 78^\circ 27'$.
- (h) $A = 104^\circ 40'$, $B = 80^\circ 13'$, $a = 126^\circ 50'$.
- (i) $A = 71^\circ 2'$, $B = 119^\circ 25'$, $C = 60^\circ 45'$.
- (j) $a = 98^\circ 53'$, $c = 64^\circ 35'$, $A = 95^\circ 23'$.
- (k) $a = 136^\circ 2'$, $c = 21^\circ 46'$, $B = 75^\circ 31'$.
- (l) $A = 47^\circ 13'$, $B = 120^\circ 9'$, $c = 123^\circ 31'$.
6. Calculeu els elements desconeguts d'un triangle esfèric del qual es coneixen $b + c = 174^\circ 23'$, $a = 60^\circ 40'$, excés esfèric = $76^\circ 47'$.
7. Resoleu un triangle esfèric del qual es coneixen el perímetre = $235^\circ 3'$, l'excés esfèric = $76^\circ 32'$ i l'angle $A = 74^\circ 21'$.
8. Justifiqueu que els tres costats següents no poden ser els d'un triangle esfèric rectangle:
- $$a = 107^\circ 28', b = 54^\circ 33', c = 70^\circ 45'.$$
9. Resoleu el següents triangles esfèrics rectangles dels quals se'n donen dues dades i tenen $C = 90^\circ$ sempre.
- (a) $a = 46^\circ 12'$, $c = 75^\circ 48'$.
- (b) $a = 109^\circ 15'$, $B = 38^\circ 45'$.
- (c) $A = 156^\circ 17'$, $c = 72^\circ 12'$.
- (d) $a = 138^\circ 46'$, $A = 125^\circ 10'$.

- (e) $A = 125^{\circ} 24'$, $b = 32^{\circ} 16'$.
 - (f) $a = 30^{\circ} 45'$, $B = 135^{\circ} 25'$.
 - (g) $a = 35^{\circ} 34'$, $c = 45^{\circ} 48'$.
 - (h) $A = 33^{\circ} 50'$, $B = 72^{\circ} 24'$.
 - (i) $b = 162^{\circ} 53'$, $B = 138^{\circ} 14'$.
10. Resoleu els triangles dels apartats 5f) i 5j) descomposant-los en suma de triangles rectangles.
11. Hi ha dos triangles rectangles amb $A = 90^{\circ}$ i tals que $b = 112^{\circ} 38'$ i $B = 100^{\circ} 49'$. Calculeu-ne els elements.
12. Resoleu el següents triangles esfèrics rectilàters dels quals se'n donen dues dades i $c = 90^{\circ}$ sempre.
- (a) $a = 60^{\circ} 34'$, $B = 122^{\circ} 18'$.
 - (b) $A = 32^{\circ} 53'$, $B = 115^{\circ} 24'$.
 - (c) $a = 69^{\circ} 15'$, $A = 56^{\circ} 45'$.

2 Problemes de navegació

Uns “esquitxos” de vocabulari de navegació.

Demora: Direcció o rumb en què és situat un objecte respecte a un punt de la costa, una embarcació, etc, definit per l'angle que forma aquest rumb amb la línia nord-sud veritable.

“Departure”: Longitud d'un arc de paral·lel que uneix dos punts a una mateixa latitud.

Distància ortodròmica d'A a B: Longitud de l'ortodròmia que passa per A i B.

Milla nàutica o milla marina: és la longitud corresponent a un arc de circumferència màxima terrestre d'angle $1'$. Equival a 1852 metres. Fixeu-vos que en donar aquesta mesura s'ha suposat que la Terra és una esfera perfecta de radi aproximat 6366.707 kms.

Nus: Mesura de velocitat igual a 1 milla nàutica per hora.

Ortodròmia: En una superfície esfèrica, és l'arc de cercle màxim que passa per dos punts.

Rumb o derrota: és l'angle que forma la trajectòria amb el meridià del lloc.

Vèrtex de la derrota: és el punt d'una trajectòria que té latitud més gran.

1. Quina és la distància ortodròmica en metres que uneix Salses ($2^{\circ} 55' E$, $42^{\circ} 50' N$) i Guardamar ($0^{\circ} 39' W$, $38^{\circ} 05' N$)? I la que uneix Fraga ($0^{\circ} 21' E$, $41^{\circ} 31' N$) i Maó ($4^{\circ} 16' E$, $39^{\circ} 53' N$)?
2. Deduïu una fórmula que serveixi per calcular la distància ortodròmica entre dos punts qualssevol del globus terrestre (penseu en els càlculs que heu fet al Problema 1).
3. Un barco surt del port de Palamós ($41^{\circ} 51' N$, $3^{\circ} 09' E$) i navega seguint un circumferència màxima terrestre. El rumb de sortida és de 130° .
 - (a) Després de recórrer 412 milles nàutiques, quin idioma hauran de parlar els seus navegants si volen entendre's amb els nadius?
 - (b) Suposant que seguissin indefinidament aquest circumferència màxima, en quin punt de la seva trajectòria estarien més al nord?

4. Deduïu una fórmula que relacioni el rumb inicial i el rumb final d'una trajectòria ortodròmica entre dos punts A i B amb les coordenades geogràfiques d'ambdós punts.
5. Un aeroplà surt de Sabadell ($41^{\circ} 33' \text{ N}$, $2^{\circ} 7' \text{ E}$) amb un rumb de $40^{\circ} 43'$.
 - (a) Cerqueu el punt del recorregut més proper al Pol Nord.
 - (b) Per quina latitud passa quan la longitud de la seva posició és de 14° a l'est?
6. La demora d'un vaixell, presa des d'El Masnou ($41^{\circ} 29' \text{ N}$, $2^{\circ} 19' \text{ E}$) és $25^{\circ} 23' \text{ E}$, i la distància 1300 milles nàutiques. Esbrineu la situació del vaixell.
7. Dos vaixells surten del mateix port (instant $t = 0$). El primer vaixell ho fa amb un rumb de $15^{\circ} 23'$ i navega a una velocitat de 12 nusos, mentre que el segon surt amb un rumb de $75^{\circ} 01'$ i navega a una velocitat de 14 nusos. Sigui $d(t)$ la distància que els separa a l'instant t (expressat en hores).
 - (a) Expliqueu la manera de calcular la funció $d(t)$ en milles.
 - (b) Si seguissin així indefinidament, quantes voltes a la Terra haurien de donar cadascun per col·lidir?
8. Una ciclista *de muntanya* (un pèl tossut, tot s'ha de dir!) surt de Beget ($42^{\circ} 19' \text{ N}$, $2^{\circ} 29' \text{ E}$) i vol arribar a Lisboa ($38^{\circ} 44' \text{ N}$, $9^{\circ} 8' \text{ O}$). No li importa per on ha de passar, sinó que vol anar-hi pel camí més curt.
 - (a) Quin rumb inicial haurà de prendre?
 - (b) Si va a una mitjana de 20 Kms/h, quin serà el temps efectiu de viatge (si no ha enganxat algun precipici pel camí)?
 - (c) Per quina direcció arribarà a Lisboa?
9. Un barco surt d'Altafulla ($41^{\circ} 9' \text{ N}$, $1^{\circ} 23' \text{ E}$) amb un rumb inicial cap a l'est al llarg d'una circumferència màxima. Trobeu el seu rumb i posició després de recórrer 525 milles nàutiques.
10. Un barco surt d' A ($36^{\circ} 50' \text{ N}$, $76^{\circ} 20' \text{ W}$) i navega al llarg d'una circumferència màxima que talla l'Equador en un punt de longitud 50° W . Trobeu el rumb inicial i la distància recorreguda.
11. Un vaixell ha de sortir del port A ($20^{\circ} 31' \text{ N}$, $70^{\circ} 11' \text{ E}$) i ha d'arribar al port B ($42^{\circ} 22' \text{ N}$, $10^{\circ} 45' \text{ W}$). Calculeu:
 - (a) La distància ortodròmica.
 - (b) El rumb inicial.
 - (c) El rumb final.

- (d) El vèrtex de la derrota seguida pel vaixell.
12. Un vaixell surt d'A ($41^{\circ} 35' \text{ N}$, $12^{\circ} 03' \text{ W}$) i navega amb rumb de sortida de $60^{\circ} 12'$ durant 8 hores, a una velocitat de 14 nusos, recorrent sempre l'arc de circumferència màxima. Calculeu la situació del vaixell al cap de les 8 hores.
 13. Un vaixell surt del port P situat a l'hemisferi nord amb rumb $56^{\circ} 12'$ i arriba al port R amb rumb $73^{\circ} 47'$, després d'haver navegat 3240 milles seguint sempre una circumferència màxima. Calculeu les latituds dels ports P i R .
 14. A les $14^h 20^{min}$ del dia 3 de Gener va sortir un vaixell del port A ($39^{\circ} 33' \text{ N}$, $82^{\circ} 11' \text{ E}$) a 10 nusos de velocitat, navegant segons un arc de paral·lel. D'un port situat a $20^{\circ} 45' \text{ N}$, $23^{\circ} 10' \text{ E}$, en va sortir un altre per perseguir el primer a 20 nusos de velocitat, seguint també un arc de circumferència màxima, i el va atrapar a les $21^h 10^{min}$ del dia 5 de Gener. Esbrineu:
 - (a) El rumb de sortida del segon vaixell.
 - (b) El dia i l'hora en què va sortir aquest vaixell.
 - (c) La situació del punt de trobada dels dos vaixells.
 15. Dos vaixells surten simultàniament dels ports A ($15^{\circ} 54' \text{ N}$, $45^{\circ} 11' \text{ W}$) i B ($42^{\circ} 21' \text{ N}$, $14^{\circ} 44' \text{ E}$) navegant a 10 nusos de velocitat, i seguint tots dos circumferències màximes. Si coincideixen en passar pel meridià de longitud $10^{\circ} 32' \text{ E}$, calculeu:
 - (a) La latitud del punt de trobada.
 - (b) La distància navegada pels dos vaixells.
 16. Des d'un cert lloc A , de longitud $\lambda_A = 9^{\circ} 13' \text{ Oest}$, a l'Hemisferi Nord, s'observa que l'estel θ de l'Ossa Major ($\delta = 51^{\circ} 40'$) es troba a l'horitzó amb un azimuth de 180° . Un mariner inicia en A una travessia seguint un cercle màxim terrestre, a una velocitat de 20 nusos per hora. Després de 44 hores, arriba a un punt B de longitud $\lambda_B = 28^{\circ} \text{ Oest}$.
 - (a) Calculeu la latitud Φ_A del punt de sortida A .
 - (b) Calculeu la latitud Φ_B del punt d'arribada B .
 - (c) Quin és el rumb inicial (angle que forma la trajectòria amb el meridià del lloc)?

3 Astronomia de posició: qüestions

1. Quina és l'altura del Nord d'un lloc de latitud ϕ ?
2. Proveu que a l'equador terrestre totes les estrelles són visibles durant exactament 12 hores i calculeu els seus azimuts en sortir i pondre's.
3. En observar un estel es veu que va pujant cada vegada més. En quina direcció de la volta celeste s'està mirant?
4. En quins dos casos l'altura dels astres per sobre l'horitzó no canvia en el transcurs del dia?
5. Obteniu la fórmula que determina la distància zenital dels astres en culminació superior.
6. Quina és la declinació del zenit d'un lloc si la latitud geogràfica és de 42° ?
7. Quins són l'angle horari i l'azimut del zenit?
8. Quines són l'ascensió recta i la declinació del punt vernal?
9. En un lloc de latitud 45° , la màxima digressió d'un estel circumpolar és de 45° . Proveu que la declinació de l'estel és de 60° .
10. Què es veu al cel del Pol Nord el dia que el Sol passa pel punt Àries?
11. El temps sideri és igual a $21^h 14^{min}$. L'ascensió recta d'una estrella és igual a $14^h 30^{min}$. Calculeu el seu angle horari.
12. Els dos estels més brillants de l'hemisferi boreal del cel són Vega ($\alpha = 18^h 34^{min}$) i Capella ($\alpha = 5^h 10^{min}$). A quina part del cel (occidental o oriental) i sota quin angle horari es troben en el moment de la culminació superior del punt vernal? I en el moment de la culminació inferior d'aquest mateix punt?
13. Quin interval de temps sideri transcorre des de la culminació inferior de Capella fins a la culminació superior de Vega? (vegeu les dades de la qüestió 12)
14. Quina és la declinació dels estels que poden ser visibles a l'horitzó en qualsevol lloc de la Terra? En quin lloc de la Terra, aquests estels es troben sempre per damunt de l'horitzó?
15. En quines condicions l'azimut d'una estrella no varia des de la seva sortida fins a la seva culminació?
16. Quines condicions s'han de donar perquè l'altura sobre l'horitzó d'un cos fix a l'esfera celeste sigui constant al llarg de tot un dia?

17. En quins llocs poden coincidir l'eclíptica i l'horitzó?
18. Quin angle formen l'eclíptica i l'horitzó en el moment de la sortida i de la posta del punt vernal a Barcelona?
19. Quina és la declinació dels estels visibles de Barcelona?
20. Quins són els angles màxim i mínim que poden formar l'eclíptica i l'horitzó per a un observador que estigui a Barcelona?
21. Quin és el lloc geomètric dels punts de l'esfera per als quals la latitud astronòmica (latitud en coordenades eclíptiques) és igual a l'ascensió recta? I en quins és igual a la declinació?
22. Quin és l'azimut d'una estrella en el moment de la seva culminació superior en un lloc de latitud ϕ ? És el mateix per a totes les estrelles?
23. Quins astres observats des de Barcelona no tenen mai azimut zero?
24. Quin dia de l'any el Sol es troba al zenit d'un lloc situat sobre el Tròpic de Capricorn?

4 Astronomia de posició: problemes

1. Demostreu que l'angle ψ que la trajectòria d'una estrella forma amb l'horitzó al seu orto i al seu ocàs ve donat per:

$$\psi = \arccos(\sin \phi \sec \delta).$$

2. Proveu que la distància zenital z del pol nord eclíptic ve donada per

$$z = \arccos(\cos \epsilon \sin \phi - \sin \epsilon \cos \phi \sin T),$$

on T és el temps sideri local.

3. Demostreu que l'altura d'una estrella a la seva culminació inferior s'expressa per la fórmula $h = \phi + \delta - 90^\circ$.
4. Sigui t l'angle horari del centre del Sol. L'*hora aparent local* d'un observador es defineix com $12\text{h} - t$ si el Sol es troba cap a l'Est, i com $12\text{h} + t$ si el Sol es troba cap a l'Oest.
 - (a) Cerqueu l'hora aparent local de Barcelona (latitud $41^\circ 24'$) en el moment en què l'altura del Sol és $34^\circ 32'$, la seva declinació $+12^\circ 54'$, i a més, estic esmorçant tranquil·lament al bar de la Facultat.
 - (b) Cerqueu l'azimut del Sol i l'hora aparent local de Beijing (latitud $39^\circ 55'$) en el moment de la tarda en què l'altura del Sol és $25^\circ 40'$ i la seva declinació $-19^\circ 15'$.
5. Quina serà l'altura màxima del Sol sobre l'horitzó de Barcelona (latitud $41^\circ 24'$) el dia en què la seva declinació és -20° ?
6. L'azimut d'un astre és de $76^\circ 12'$ i la seva altura és de $49^\circ 25'$, observat des d'un lloc de latitud $43^\circ 34'$. Calculeu la declinació d'aquest astre.
7. Calculeu l'altura meridiana el Sol el dia en què la seva declinació és de $23^\circ 26' 30''$, a Soses (latitud $41^\circ 32'$). En aquest instant del pas del meridià, quant medeix l'ombra que produeix un pal vertical de 2m sobre un pla horitzontal?
8. Un mariner calcula una nit l'altura de l'estrella polar, que és de $42^\circ 21'$. El Sol s'ha post a les 7 de la tarda. Com calcularà la declinació del Sol a l'instant de la seva posta?
9. Volem determinar la latitud d'un punt de l'hemisferi nord. Per això, un dia que el Sol està a una declinació $\delta = 15^\circ 20'$, hi instal·lem verticalment una barra de longitud $l = 2.5\text{m}$. Al cap de $3^{\text{h}} 40^{\text{min}}$ de temps sideri des de la culminació superior del Sol, la barra projecta sobre el pla horitzontal una ombra de longitud $l = 3.831\text{m}$. Quina és, doncs, la latitud?

10. Determineu la distància zenital i l'azimut d' α -Dragó ($\alpha = 14^h 1^{min} 57^s$, $\delta = 64^\circ 48' 48''$) a Olot ($\phi = 42^\circ 11'$) a les $16^h 24^{min} 33^s$ de temps sideri.
11. Calculeu α i δ d'un estel que a Moscó, al moment de temps sideri $s = 11^h 11^{min} 36^s$ tenia les coordenades $z = 49^\circ 15' 10''$ i $A = 298^\circ 28' 50''$.
12. Un cometa té les coordenades equatorials $\alpha = 81^\circ 48' 42''$ i $\delta = +68^\circ 28'$. Quines són les seves coordenades eclíptiques λ i β ?
13. Aquesta nit un estel surt a les 10h. D'aquí a un mes, a quina hora sortirà?
14. Calculeu la latitud d'un lloc sabent que un estel circumpolar ha estat observat en les posicions

$$\begin{cases} z = 12^\circ 21' 32'', \\ z' = 68^\circ 43' 42''. \end{cases}$$

En ambdós casos l'azimut de l'estel era de 180° . Trobeu també la declinació de l'estel.

15. En un lloc de latitud ϕ s'han observat les digressions d'un estel de declinació $81^\circ 22'$ respecte d'un cert origen d'angles, i s'ha obtingut $77^\circ 18'$ (a l'Est) i $45^\circ 27'$ (a l'Oest). Calculeu:
 - (a) La latitud del lloc.
 - (b) L'altura de l'estel en el moment de les digressions.
16. A les $4^h 45^{min} 15^s$ de la tarda (hora oficial) s'observa que l'azimut del centre del Sol és $75^\circ 40' 10''$. Immediatament després s'enfoca un estel i s'obté que el seu azimut és $180^\circ 12' 20''$. Calculeu l'azimut de l'estel coneguent

$$\begin{aligned} \phi &= 41^\circ 23' 2.5'' \text{ N (latitud geogràfica)} \\ \lambda &= 8^h 38^{min} \text{ E (longitud geogràfica)} \\ \delta &= 19^\circ 15' 25'' \text{ (declinació del Sol)} \\ E &= 6^h 24^{min} \text{ (equació del temps).} \end{aligned}$$

17. Un estel passa pel zenit d'un lloc i roman visible durant $14^h 24^{min}$. Calculeu:
 - (a) La latitud del lloc.
 - (b) La declinació de l'estel.
 - (c) L'angle horari de l'estel en el seu orto i el seu ocàs.
18. Sabem que la declinació del Sol un cert dia és $\delta = 12^\circ 19' 46''$ i que la latitud del lloc d'observació és $\phi = 43^\circ 36' 44''$. Calculeu l'hora de sortida del Sol (l'hora que despunta el cap del Sol) i de la seva posta, així com el seu azimut en aquests instants.

19. En un lloc de latitud $\phi = 30^\circ$, l'altura d'un estel a l'instant de la seva culminació superior és $h = 45^\circ$. Calculeu l'altura d'aquest estel al cap de 3 hores sidèries.
20. A quina distància zenital passa per la seva culminació l'estrella Capella ($\delta = +45^\circ 54'$) a Vielha ($\phi = 41^\circ 42'$)? I a Ulldecona ($\phi = 40^\circ 36'$)?
21. Determineu en quins llocs de la Terra comença a ser visible la constel·lació Creu del Sud, situada entre els límits de la declinació austral de -55° fins a -64° , i definiu a quins països pertoca.
22. En un lloc s'observa la culminació inferior de l'estel β de l'Ossa Major ($\delta = +74^\circ 31'$) a una distància de $63^\circ 46'$. Quina és la latitud d'aquest lloc?
23. L'estrella α d'Auriga ($\delta = +45^\circ 54'$) en el moment de la seva culminació inferior es veu a l'horitzó. Quina és l'altura del pol celeste sobre l'horitzó en el lloc d'aquesta observació?
24. Cerqueu la latitud d'un observador situat a l'hemisferi nord si, quan la seva hora aparent local és 10:25:36AM, l'altura del Sol és $40^\circ 10'$ i la seva declinació $15^\circ 38'$.
25. Cerqueu l'hora aparent local de Rejkjavik (latitud $64^\circ 9'$) i l'azimut del Sol en el moment de l'orto i de l'ocàs, quan la declinació del Sol és $+15^\circ 45'$.
26. Quant dura el dia més curt de l'any (declinació del Sol = $-23^\circ 26' 30''$) a Rejkjavik (latitud $64^\circ 9'$) i l'azimut del Sol a l'orto i a l'ocàs corresponents a aquest dia. I a Barcelona (latitud $41^\circ 24'$)? I a Quito (latitud $-0^\circ 14'$)?
27. El 9 de Maig l'ascensió recta del Sol era de $45^\circ 30'$. Coneguent l'obliquïtat de l'eclíptica a l'equador ($\epsilon = 23^\circ 26' 30''$), determineu la declinació del Sol.
28. Un punt d'observació està a latitud $\phi = 52^\circ 30' N$. Al cap de $3^h 40^{min}$ de temps sideri després de la culminació superior del Sol, es troba a una altura $h = 33^\circ 8'$. Quins són l'azimut i la declinació del Sol en el moment de l'observació?
29. Calculeu la latitud d'un lloc sabent que des d'ell s'observa la digressió Oest de l'estel Algol ($\delta = 40^\circ 49' 20''$) amb un azimut de $112^\circ 18' 40''$. Quant temps es manté aquest estel sobre l'horitzó?
30. Sabent que la Terra dóna 1 volta completa a l'entorn del seu eix cada $23^h 56^{min} 4^s$ de temps solar mitjà, calculeu en segons d'arc respecte segons de temps ($''/\text{seg}$) la velocitat angular que té el vertical d'un estel de declinació δ en el moment de la seva digressió Est o Oest.
31. Calculeu la fracció de dia sideri en què una estrella és visible des d'un lloc de latitud 45° , sabent que el sinus de la declinació val $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

32. En un instant donat, dos estels tenen altures $h_1 = 12^\circ 23' 42''$ i $h_2 = 21^\circ 12' 53''$ i una diferència d'azimuts $\Delta a = 137^\circ 42' 27''$. Calculeu la distància angular entre els dos estels.
33. Calculeu el temps que tarda en sortir el Sol en un lloc de latitud $\phi = 65^\circ$, un dia que la declinació del Sol és $\delta = 23^\circ 26' 30''$.
34. Calculeu les coordenades horitzontals a València ($\phi = 39^\circ 28' 31''$) de l'estrella Aldebaran, a l'instant en què les seues coordenades horàries són $\delta = 16^\circ 27' 41''$ i $H = 13^h 27^{min} 15^s$.
35. Si volem observar l'estel Betelgeuse ($\delta = 7^\circ 24' 7''$) a Barcelona ($\phi = 41^\circ 24'$) quan creua el vertical de 315° , amb quin angle horari i distància zenital ho hem de fer?
36. A les $23^h 39^{min} 19^s$ de temps sideri local s'observa a l'horitzó de Ceret ($\phi = 42^\circ 29'$) l'estrella Castor amb un azimut $A = 228^\circ 15' 24''$. Calculeu les seves coordenades equatorials.
37. Donada certa longitud del Sol, $\theta = 4^h 30^{min}$, esbrineu les seves coordenades horàries a Santa Margalida ($\phi = 39^\circ 42' N$) a les 6^h de temps sideri local. ($\epsilon = 23^\circ 26' 30''$)
38. Quines coordenades cal introduir a un teodolit estacionat a Alacant ($\phi = 38^\circ 21' N$) per observar l'estrella γ - Bootis ($\lambda = 197^\circ 22' 34''$, $\beta = 49^\circ 32' 54''$) a les 20h de temps sideri local (preneu, com sempre, $\epsilon = 23^\circ 26' 30''$).
39. En un lloc inconcret s'observa que un estel inconcret surt a les $6^h 30^{min} 22^s$ i es pon a les $17^h 50^{min} 22^s$, totes dues hores de temps sideri local. Sabent que la distància zenital a la culminació superior és de $32^\circ 53' 44''$, calculeu les coordenades equatorials absolutes de l'estrella així com la latitud del lloc.
40. Calculeu la latitud d'un lloc sabent que una estrella de declinació δ ha trigat un temps τ per passar de l'altura h_1 a l'altura h_2 .
Apliqueu-ho a $\delta = 25^\circ 14' 12''$, $h_1 = 45^\circ 15' 02''$, $h_2 = 32^\circ 23' 58''$, $\tau = 2^h 03^{min} 04^s$.
41. En un observatori s'aprecia que dues estrelles de declinacions $\delta_1 = -\delta_2 = 30^\circ$ tenen el seu orto simultàniament, mentre que quan la primera passa pel meridià del lloc, la segona ja està a l'ocàs. Cerqueu la latitud del lloc.
42. Un dia en què l'hora sideral de Greenwich a les 0h UT és $\theta_0 = 8^h 13^{min} 52^s$, es vol saber a quina hora UT i amb quina distància zenital es podrà observar, des d'un observatori del meridià de Greenwich de latitud $42^\circ 56' 12'' N$, l'estrella de coordenades $\alpha = 3^h 15^{min} 7^s$, $\delta = 5^\circ 2'$, exactament en la direcció oest.

43. Si el crepuscle astronòmic acaba quan el centre del Sol està 18° per sota l'horitzó, proveu que a l'Equador, la duració del crepuscle en hores és

$$\frac{12}{\pi} \arcsin(\sin(18^\circ) \sec \delta).$$

44. Calculeu l'hora oficial i l'altura del Sol a Mequinensa a l'instant en què finalitzà el crepuscle civil a Kiev, el dia 30 de Maig de 1980. A Tòquio, ja havia sortit el Sol, en aquell moment?

Dades:

Kiev: $\phi = 50^\circ 27' 10''$ N, $\lambda = 2^h 2^{min} 1^s$ E,

Mequinensa: $\phi = 41^\circ 22' 26''$ N, $\lambda = 0^h 32^{min} 9^s$ E,

Tòquio: $\phi = 36^\circ 0' 23''$ N, $\lambda = 9^h 16^{min} 46^s$ E,

$\epsilon = 23^\circ 26' 30''$, $\alpha_\odot = 4^h 28^{min} 3^s$ (ascensió recta del Sol),

$\theta_0 = 16^h 30^{min} 39^s$ (temps sideral a Greenwich a les 0hUT).

45. Quin dia julià serà el dia de Sant Esteve d'aquest any? A quines hores de temps oficial tindran lloc els següents fenòmens a Olot ($\phi = 42^\circ 11'$) aquell dia?

(a) Començament del crepuscle astronòmic del matí.

(b) Orto aparent del Sol.

(c) Culminació superior del Sol.

(d) Ocàs teòric del Sol.

(e) Fi del crepuscle civil del vespre.

(f) Representació d'*Els Pastorets*.

Dades:

$\alpha_\odot = 18^h 20^{min} 40^s$ (ascensió recta del Sol),

$\theta_0 = 6^h 18^{min} 7^s$ (temps sideral a Greenwich a les 0hUT),

$\delta_\odot = -23^\circ 21' 23''$ (declinació del Sol).

46. Calculeu les magnituds absolutes dels estels següents:

	SIRIUS	VEGA	BETELGEUSE	SOL
Magnitud aparent	-1.58	0.14	0.92	-26.72
Distància en anys llum des de la Terra	9	26	190	$15.812 \cdot 10^{-6}$

47. Un viatger de l'espai s'allunya del sistema solar en direcció a Betelgeuse. Es demana:
- El punt de la seva trajectòria en el qual el Sol i Betelgeuse tenen la mateixa magnitud. Digueu quina és.
 - El punt de la seva trajectòria en el qual el Sol es deixa de percebre a ull nu.
48. Des de dos observatoris situats a latituds $\phi_1 = 41^\circ 27' 16''$ i $\phi_2 = -25^\circ 10' 9''$ i sobre el mateix meridià, es fa una observació simultània de la Lluna. Les distàncies zenitals que s'obtenen (corregides ja de refracció) són $z_1 = 45^\circ 52' 12''$ i $z_2 = 21^\circ 46' 27''$, respectivament. Calculeu la distància del centre de la Terra a la Lluna.
- Dades:
 $R = a = 6378.160$ Kms. (radi de la Terra),
 $e^2 = 0.00669454$ (excentricitat el·lipsoide terrestre).
49. Les coordenades equatorials de certa estrella el 1980.0 eren $\alpha_0 = 0^\circ 30'$, $\delta_0 = 53^\circ 26'$. Calculeu les noves coordenades per a l'any 2000.0 per efecte de la precessió.
50. D'aquí a quatre dies, com aquell qui diu, serem a l'hivern. Però, a quin dia i hora començarà? I quants dies i quantes hores durarà l'hivern que ens espera?
51. Fa uns mesos (entre 0 i 12, per no donar pistes), anàvem cap a casa prop de les 12 de la nit i vàrem veure l'estel Deneb ($\alpha = 20^h 42^{min}$, $\delta = 45^\circ 17'$) en direcció al Sud. Quina estació de l'any era?
52. Calculeu $\alpha_\odot$, $\delta_\odot$ a l'època de 1999 Novembre 30, 12^h TD.
53. Problema *interactiu*.
- Busqueu les següents dades del dia d'avui a les 12^h TD: dia julià (JDE), e_T (excentricitat de l'òrbita de la Terra), ϵ_0 (obliquïtat mitjana de l'eclíptica), $\Delta T = \text{TD} - \text{UT}$.
 - Quin ha estat el temps solar aparent a Barcelona (latitud $41^\circ 24'N$, longitud $2^\circ 10'E$) al moment en què el centre del Sol ha travessat l'horitzó aquest matí?
 - Sabent que el diàmetre del Sol és, aproximadament, de $32'$, determineu a quin temps solar aparent es produeix la sortida de la part superior del Sol.
- Suposem ara que avui en Toni es troba a Greenwich (latitud $51^\circ 32'N$, longitud $0^\circ 0'$) i en Josep (1.84m), a Barcelona. Situem-nos a les 12^h UT.

Argument del perigeu	$\omega \simeq 282^\circ 56'$.
Equació del centre	$C \simeq 2e \sin M$
Equació del temps	$E \simeq \tan^2\left(\frac{e}{2}\right) \sin(2l_0) - 2e \sin M$
Excentricitat òrbita Terra	$e \simeq 0.017$

- (d) Quanta estona fa o falta perquè en Toni vegi el Sol transitant (suposant que avui, excepcionalment i contra tota predicció, faci un sol esplèndid a Londres)?
- (e) Quina hora marca el rellotge de polsera d'en Josep (suposant que funcioni bé, és clar) quan el Sol transita a Barcelona?
- (f) Quines coordenades (α, δ) té el zenit a Barcelona en el moment del trànsit?
- (g) En Josep es troba observant el trànsit del Sol. Suposem que el sol està perfectament anivellat. Quina és la llargada de l'ombra que projecta en Josep i en quina direcció ho fa?
54. (a) Quants eclipsis de Lluna hi haurà l'any 1997? Quins dies seran?
- (b) Sabem que a l'època 1994 Octubre 31, 0^hTD li correspon el dia julià JDE 2449656.5 i que la setmana del 31 d'Octubre de 1994 (dilluns) al 5 de Novembre (diumenge) va tenir lloc un eclipsi. Preciseu el dia de la setmana en què es va produir, si va ser de Sol o de Lluna i expliqueu per què.
55. Prenent com a indicació que falten uns 29 dies per al perigeu:
- (a) Calculeu de manera aproximada la durada del dia d'avui a Barcelona (longitud $\lambda = 2^\circ 08'E$, latitud $\Phi = 41^\circ 24' N$) sense tenir en compte la refracció i considerant el centre del Sol per a la seva sortida i posta.
- (b) Digueu aproximadament l'hora oficial de la sortida i de la posta del centre del Sol també sense tenir en compte la refracció.

Podeu prendre per bones les següents aproximacions:

56. La nit de Sant Patllari, quin dels següents estels es pot veure a Barcelona?

$$\begin{array}{ll} \text{Vega} & \alpha = 18^h 37^{min}, \quad \delta = 38^\circ 47'. \\ \text{Betelgeuse} & \alpha = 5^h 55^{min}, \quad \delta = 7^\circ 24'. \end{array}$$

References

- [1] F. Ayres, Jr. *Trigonometría plana y esférica*, McGraw-Hill, 1970.
- [2] J.A. Docobo, A. Elipe. *Astronomía. 280 problemas resueltos*, Imprenta de la Universidad de Santiago, ISBN 84-300-9278-1, 1983 (exhaurit).
- [3] Martín Asín. *Problemas de Astronomía*, Ed. Paraninfo.
- [4] A. Vila Mitjà. *Elements de trigonometria esfèrica*, Edicions UPC, 1994.
- [5] B.A. Vorontsov-Veliámínov. *Problemas y ejercicios prácticos de astronomía*, Ed. Mir, 1979.