

Modelos de predicción en edificación

Bloque 1. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Sección 4. Sistemas dinámicos

Toni Guillamon

Dept. Matemàtiques - UPC

13 de Octubre de 2020

Teoría cualitativa de EDs

- Regresamos a la **ley de enfriamiento de Newton**, que se escribe mediante la primera **ecuación diferencial** (ED) que vimos en el curso:

$$\frac{du(t)}{dt} = \alpha (T_A - u(t)),$$

donde $u(t)$ es la temperatura de un cuerpo inmerso en un ambiente con temperatura T_A , y $\alpha > 0$ representa la tasa de enfriamiento.

- Esta ED admite la **solución** $u(t) = T_A + c \exp(-\alpha t)$, donde $c = u(0) - T_A$.
- Hemos visto que:
 - A menudo, las EDs **no se pueden resolver de manera exacta**.
 - Existen **métodos numéricos** que nos permiten hallar **soluciones aproximadas** de las EDs; e.g., el método de Euler, que se basa en una linealización de las soluciones:

$$u' = f(u) \Rightarrow u_{n+1} = u_n + h f(u_n), \quad h \ll 1, \quad u_0 = u(0).$$

Teoría cualitativa de EDs

- Un enfoque muy útil es concentrarse en describir cuál va a ser el **estado final del sistema** dadas unas condiciones iniciales. En el caso de la ley de enfriamiento de Newton sabemos que, sea cual sea la condición inicial $u(0)$, la temperatura va a tender al valor constante T_A :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = T_A + (u(0) - T_A) \exp(-\alpha t) = T_A.$$

- Podíamos haber estudiado directamente el **punto de equilibrio** para $\frac{du(t)}{dt} = \alpha (T_A - u(t))$:

$$f(u) := \alpha (T_A - u) = 0 \Leftrightarrow u = T_A := u^*$$

Además, $f'(u) = -\alpha < 0$. Aplicando Taylor a un valor cercano $u^* + \epsilon$,

$$f(u^* + \epsilon) = f(u^*) + \epsilon f'(u^*) + O(\epsilon^2) \approx \epsilon f'(u^*).$$

Así pues, si ϵ es suficientemente pequeño, $f(u^* + \epsilon) \approx -\epsilon \alpha$, que nos informa de que todo lo que está alrededor de u^* tiende a u^* : el punto u^* se llama **atractor** (si α fuera negativo, sería **repulsor**).

Teoría cualitativa y sistemas dinámicos

- La **teoría cualitativa de EDs** y, en general, los **sistemas dinámicos**, se centra en los **objetos invariantes** del sistema: puntos de equilibrio, soluciones periódicas, . . . que **atraen** a las demás órbitas.
- Un **sistema dinámico** es un proceso donde cada estado depende de los estados anteriores.¹
- Los sistemas dinámicos se clasifican en:
 - **Continuos (SDC)**: Ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales.
 - **Discretos (SDD)**: $x_{n+1} = f(x_n)$, a partir de x_0 conocido. Los métodos numéricos para EDs, por ejemplo, suelen ser SDD.

¹Se trata de una definición no rigurosa.

Los sistemas dinámicos en este curso

- Ley de enfriamiento de Newton.
- Trazado de una curva sobre una superficie con una pendiente determinada (RampUp.mlx).
- Transmisión de calor en un edificio (ver S2-ActividadB12-Ejemplo-TransmisionCalor.pdf).

T_1	T	T_2
-------	-----	-------

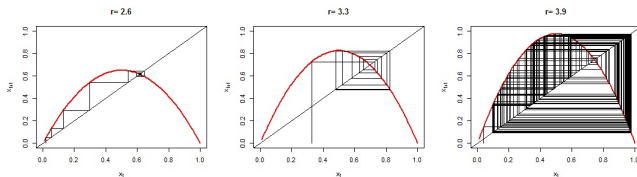
$$\frac{dT}{dt} = \alpha_1 (T_1 - T) + \alpha_2 (T_2 - T).$$

- Resolución numérica de la ecuación del calor al avanzar en el tiempo (ActividadB1.3).

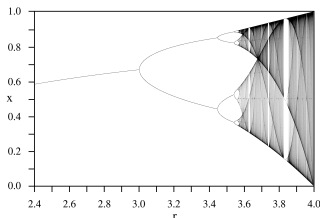
Sistemas dinámicos y atractores

La ecuación logística (SDD)

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t), \quad x_0 \in [0, 1]$$

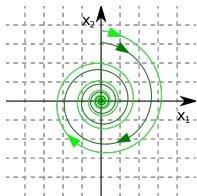


Dinámica del SDD generado por la ecuación logística para diferentes valores del parámetro r .

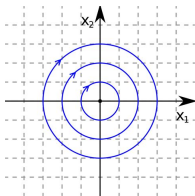


Sistemas dinámicos y atractores

Sistemas dinámicos continuos: puntos de equilibrio



$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_2(t), \\ x_2'(t) = \beta x_1(t) + \alpha x_2(t), \end{cases}$$



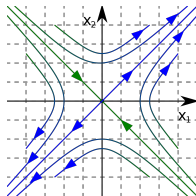
$$\begin{cases} x_1'(t) = -\beta x_2(t), \\ x_2'(t) = \beta x_1(t), \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha < 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$$



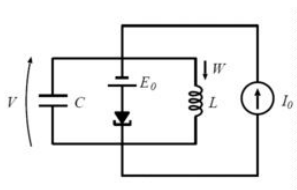
$$\begin{cases} x_1'(t) = -\lambda_1 x_1(t), \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t), \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Sistemas dinámicos y atractores

Sistemas dinámicos continuos: órbitas periódicas

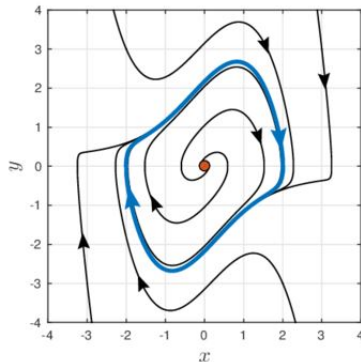
Ecuación de van der Pol (Philips, 1920)



Circuito eléctrico con un diodo túnel.

$$\begin{cases} x' = \mu(y - x + x^3/3), \\ y' = -x/\mu, \end{cases}$$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, μ parámetro.

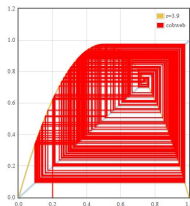


Ciclo límite (órbita periódica) de la ecuación de van der Pol.

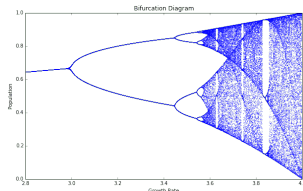
Sistemas dinámico y atractores

Dependencia sensible a las condiciones iniciales y caos

Ecuación logística: $x_{t+1} = r x_t (1 - x_t)$



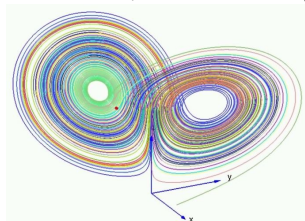
<http://sites.saintmarys.edu/~sbroad/example-logistic-cobweb.html>



Modelo de Lorenz y Fetter (1963) de convección atmosférica.

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x), \\ y' &= \rho x - y - xz, \\ z' &= -\beta z + xy, \end{cases}$$

con $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.



Estabilidad

Puntos de equilibrio en el plano

$$\begin{cases} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \end{cases}$$

La **matriz diferencial** (ver apuntes S1, diapositiva 28) o **jacobiana**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

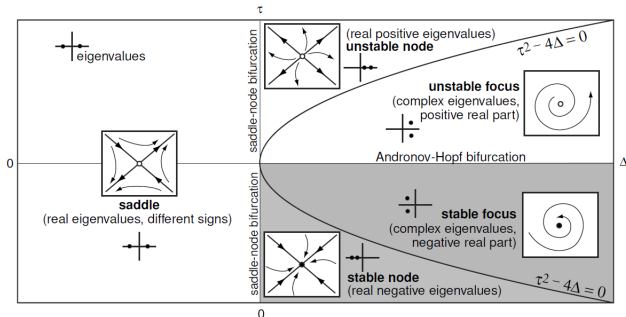
contiene la información para determinar la **tipología** y la **estabilidad** de los puntos de equilibrio ($f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$). En el caso lineal, la matriz diferencial coincide con la matriz del sistema.

Estabilidad

Puntos de equilibrio en el plano

Sea τ la **traza** de J en el punto de equilibrio y Δ el **determinante**.

$$\tau = \left. \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \quad \Delta = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)}$$



[Izhikevich, 2007]