

Modelos de predicción en edificación

Bloque 1: Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Sección 1: Cálculo, preliminares

Toni Guillamon

Dept. Matemàtiques - UPC

15 y 22 de Septiembre de 2020

Funciones y derivadas en una variable

Funciones y derivadas en una variable

Cocientes incrementales

Sea $f(x)$ una función continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definimos el **cociente incremental** para $x, x_0 \in D$ como

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se corresponde con los conceptos de **secante**, **velocidad media** y, en general, una **variación media** de la función f a lo largo del intervalo $\langle x, x_0 \rangle$.

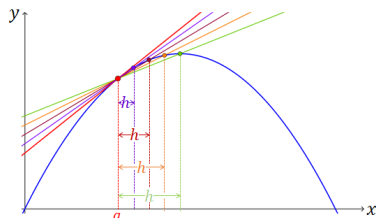
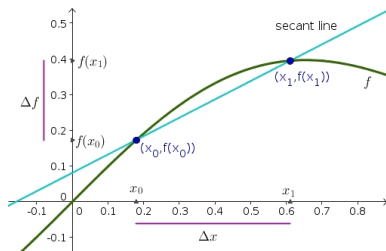
Cocientes incrementales

Sea $f(x)$ una función continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definimos el **cociente incremental** para $x, x_0 \in D$ como

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se corresponde con los conceptos de **secante**, **velocidad media** y, en general, una **variación media** de la función f a lo largo del intervalo $\langle x, x_0 \rangle$.

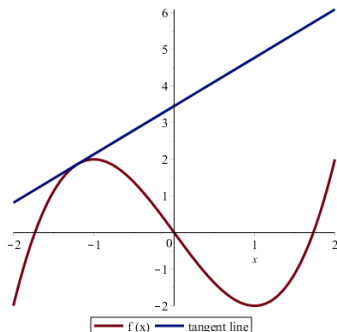


Derivadas

Definimos la **derivada de f en $x_0 \in D$** como

$$f'(x_0) := \frac{df(x)}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se corresponde con los conceptos de **tangente**, **velocidad instantánea** y, en general, una **variación instantánea** de la función f en el punto/instante x_0 . Observemos que involucra el concepto de límite.

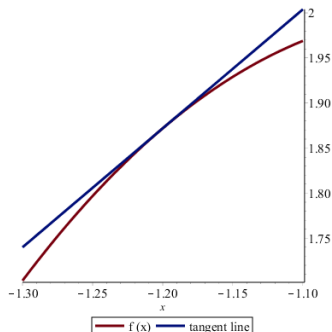


Derivadas

Definimos la **derivada de f en $x_0 \in D$** como

$$f'(x_0) := \frac{df(x)}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se corresponde con los conceptos de **tangente**, **velocidad instantánea** y, en general, una **variación instantánea** de la función f en el punto/instante x_0 . Observemos que involucra el concepto de límite.

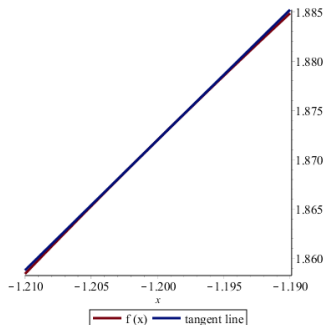


Derivadas

Definimos la **derivada de f en $x_0 \in D$** como

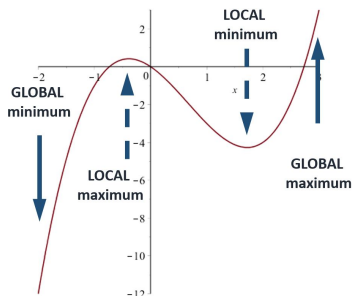
$$f'(x_0) := \frac{df(x)}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se corresponde con los conceptos de **tangente**, **velocidad instantánea** y, en general, una **variación instantánea** de la función f en el punto/instante x_0 . Observemos que involucra el concepto de límite.



Observemos también que nos da una buena aproximación de la función en un intervalo pequeño: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es una **linealización** de f alrededor de x_0 .

Derivadas: interpretación geométrica, optimización



Significado de **signo de $f'(x)$** , soluciones de $f'(x) = 0$, **signo de $f''(x)$** , soluciones de $f''(x) = 0$, ...

Preparación previa: Puede ser necesario refrescar (con algunos ejemplos) como realizar derivadas y su importancia en problemas de optimización. Las derivadas de orden superior tienen implicaciones en otras características de la función (curvaturas, ...).

De nuevo la ecuación diferencial...

$$\frac{du(t)}{dt} = k(u_0 - u(t))$$

donde k , u_0 son constantes reales.

- ¿Podríamos darle sentido, ahora, a esta ecuación?
- ¿Seríamos capaces de resolverla? ¿Analíticamente, numéricamente,...

Desarrollo de Taylor

- Sea $x_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un punto donde f y sus derivadas se conocen hasta orden r .
- Sea $\mathcal{D}$ un intervalo abierto que contiene x_0 .
- Sea $x = x_0 + h \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un punto cualquiera en un entorno de x_0 en que f puede ser “difícil” de calcular.

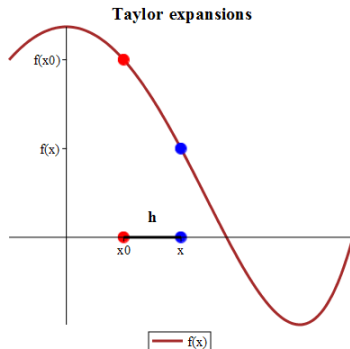


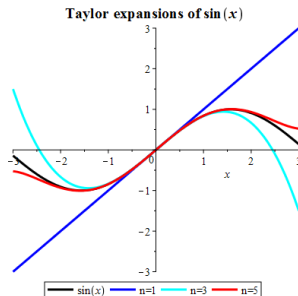
Figura: Elementos esenciales para el desarrollo de Taylor.

Desarrollo de Taylor

- Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas continuas hasta (al menos) orden 2.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ hasta aquí, linealización} \\ + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

aproximaciones de orden superior



Mini-proyecto B11a: propuesta

Actividad B11a. Derivadas y ecuaciones diferenciales lineales

Actividad B11a: ley de enfriamiento de Newton

Sabemos que la ley de enfriamiento de Newton proporciona una fórmula (ecuación diferencial, ED) para la dinámica de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo inmerso en un entorno/ambiente con temperatura T_A :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha (T_A - T),$$

donde α se denomina *tasa de enfriamiento*.

Esta ED admite la solución $T(t) = T_A + c \exp(-\alpha t)$, donde c es una constante real.

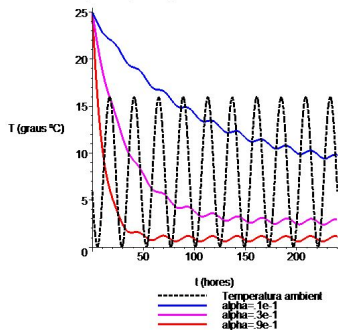
Actividad B11a: ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = \alpha (T_A - T) \implies T(t) = T_A + c \exp(-\alpha t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

- ❶ Dada una temperatura ambiente T_A ,
 - ❶ ¿qué significado tiene la constante C ?
 - ❷ Una vez hallada C , ¿cuántas informaciones (datos) adicionales se requieren para obtener α , y qué tipo de datos deben ser?
- ❷ Imaginar que la temperatura ambiente es variable, y viene dada por $T_A(t) = 20 + 4 \sin(1/12 \pi (t - 8))$, en grados Celsius, donde t se mide en horas. Usando el ordenador, calcular y representar la temperatura de un cuerpo inmerso en este ambiente a lo largo de un día ($t \in [0, 24]$) si $T(0) = 37^\circ\text{C}$. Para diferentes valores de α ($\alpha \in \{0.01, 0.03, 0.09\} h^{-1}$), comparar e interpretar el rol de la tasa de enfriamiento. La Figura 3 muestra algunos ejemplos.

Actividad B11a: ley de enfriamiento de Newton

Evolució de la temperatura (10 dies) per a diferents taxes de refredament



Evolución de la temperatura de un cuerpo inmerso en un ambiente con temperatura variable. La figura muestra las oscilaciones de las temperaturas (ambiente y cuerpo) a lo largo de 10 días. La temperatura inicial del cuerpo se fijó en 25°C para diferentes tasas de enfriamiento ($\alpha\{0.01, 0.03, 0.09\} \text{ h}^{-1}$). La radiación solar no sigue la misma fórmula que la del enunciado.

Figura:

Campos escalares, derivadas en dimensión superior

Campos escalares, derivadas en dimensión superior

Campos escalares

Un **campo escalar** es una función f que va de un cierto dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ al conjunto de los números reales:

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Ejemplos: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y, z) = \log(1 + z^2)(x + y), \dots$

Derivadas en dimensión superior

Sea $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ una función continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la **derivada de f en $\vec{x}_0 \in D$** en la dirección $\vec{v}$ (vector unitario) como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h \vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}.$$

Se denomina **derivada direccional** y se puede calcular a partir del **gradiente**:

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \bigg|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{v} == \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$$

Preparación previa: Derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Ejemplos:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, ...
- $f(x, y, z) = \log(1 + z^2)(x + y)$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \log(1 + z^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \log(1 + z^2)$,
 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(x+y)2z}{1+z^2}$, ...

Gráficas de un campo escalar: superficies I

Consideremos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\text{Graph}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$, lo que da una **superficie** S .

Gráficas de un campo escalar: superficies II

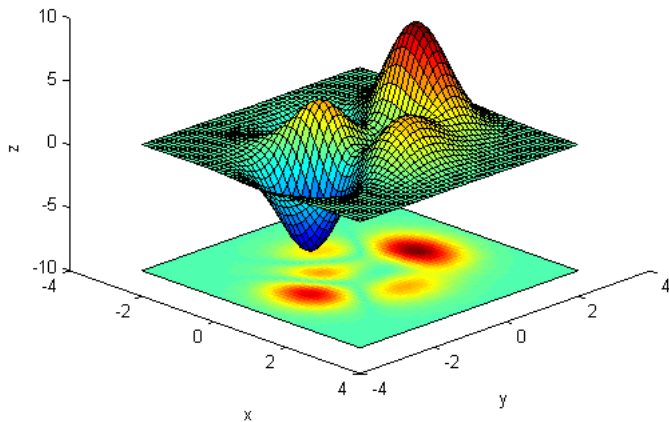


Figura: Plot de $z = f(x, y)$

Curvas de nivel. I

Representar S gráficamente acarrea ciertas dificultades de visualización. Las **curvas de nivel** dan una buena aproximación de la gráfica. Consisten en la intersección de S con los planos $z = k$, lo que da curvas definidas por $f(x, y) = k$.

Curvas de nivel. II

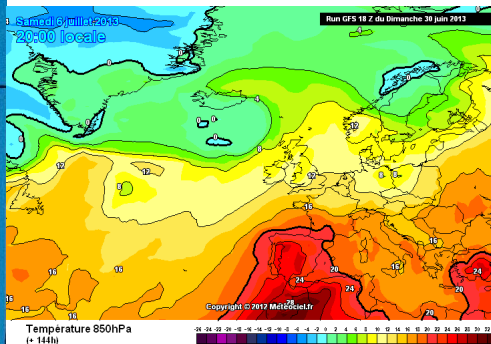
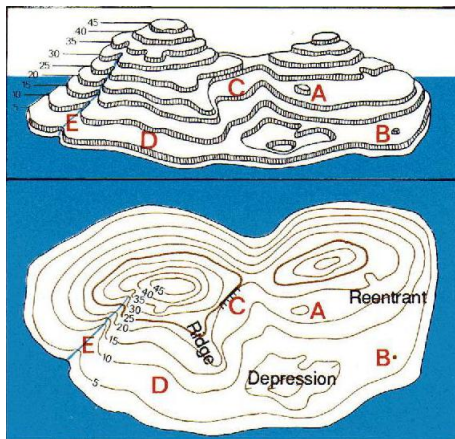


Figura: Ejemplos de curvas de nivel. Altitud y térmicas.

El gradiente.

Gradiente: Interpretación.

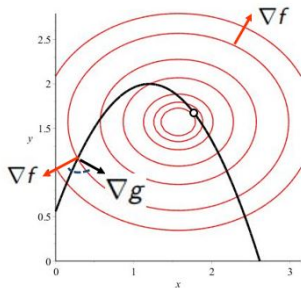
$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(x_0)\| \cos \alpha, \text{ con } \alpha \text{ ángulo}$$

Pregunta: Si se representan las curvas de nivel correspondientes a valores equiespaciados de la función f , ¿de qué nos informa la separación entre ellas?

Pregunta: ¿Cuáles serán los máximos y mínimos de $f(x, y)$ sobre la curva $g(x, y) = 0$ en negro si las curvas en rojo indican curvas de nivel de f ?

$$\cos \alpha = \frac{\nabla f \cdot \nabla g}{\|\nabla f\| \|\nabla g\|}.$$

(condición de extremo).



Desarrollos de Taylor para campos escalares

- Sea $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, un punto donde f y sus derivadas se conocen hasta orden r .
- Sea $\mathcal{U}$ una bola abierta centrada en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.
- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_1, \mathbf{y}_0 + \mathbf{h}_2) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera en un entorno de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ en que f es “difícil” de calcular.

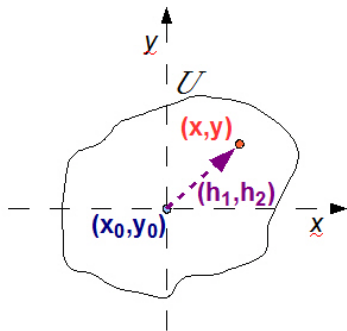


Figura: Elementos esenciales para el desarrollo de Taylor: dominio.

Desarrollos de Taylor para campos escalares

- Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas hasta (al menos) orden 2.

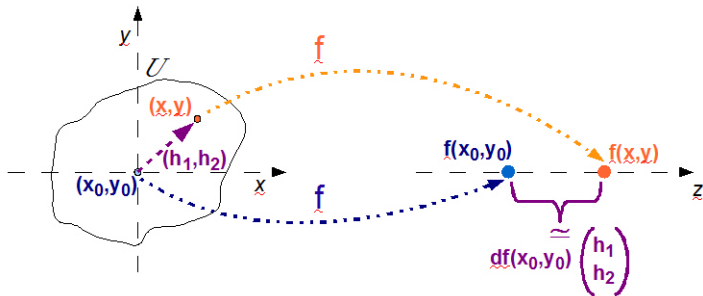


Figura: Elementos esenciales para el desarrollo de Taylor: función.

Desarrollos de Taylor para campos escalares

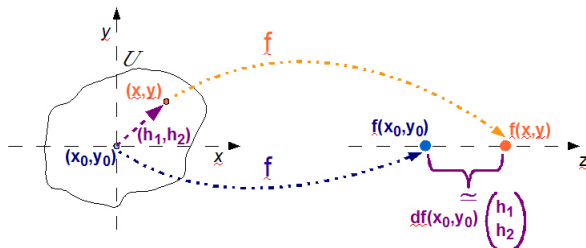


Figura: Elementos esenciales para el desarrollo de Taylor: función.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \right] \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Desarrollos de Taylor para campos escalares

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 \right] \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 \right] + \dots \\
 &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2!} (h_1 \quad h_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La matrices diferencial y hessiana

La matriz de la diferencial:

$$df_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

El **operador diferencial** es una aplicación lineal que asigna la pendiente del plan tangente a una dirección (h_1, h_2) cualquiera.

La **matriz hessiana**

$$Hf_{(x_0, y_0)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

La **matriz hessiana** define una aplicación bilinear simétrica que asigna un número real (relacionado con las curvaturas de la superficie) a una dirección (h_1, h_2) cualquiera.

Taylor en 2D, en términos de la diferencial

Denotamos $p = (x, y)$, $p_0 = (x_0, y_0)$,
 $\Delta p = p - p_0 = (h_1, h_2)$ y
 $\Delta f = f(p) - f(p_0)$; entonces, el
 desarrollo de Taylor hasta orden 1 se
 escribe como:

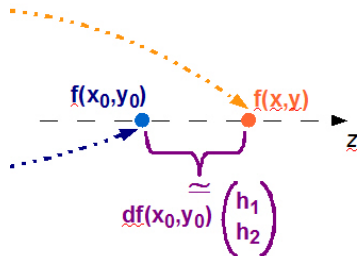


Figura: Linearización: la aplicación diferencial.

$$\Delta f = df_{p_0} \Delta p,$$

que es la expresión compacta de la *linearización* del campo escalar f en un entorno de p_0 .

Mini-proyecto B11b: propuesta

Actividad B11b. Curvas de nivel y gradientes

Actividad B11b: curvas de nivel y gradientes

Hemos explorado la función `DropDown` en un ejemplo previo. Proponemos ahora una modificación de aquel programa: **diseñar un camino** que trepe por la superficie dada por $z = f(x, y)$ **con una pendiente pre-establecida** positiva $\sigma(x, y)$, donde

$$\sigma(x, y) = \min\{2\%, \|\nabla f(x, y)\|\},$$

saliendo del punto (x_0, y_0) , donde x_0 e y_0 son la segunda y la tercera coordenada de la m -ésima tripleta del conjunto de puntos `InitialConditionsSet` y m es el índice asignado a vuestro grupo de trabajo.

- Calcular el camino hasta conseguir la altura máxima. Representar gráficamente la solución obtenida tanto en 3D como en la proyección 2D, usando en esta última la instrucción `xxx` de Matlab.
- Comparar diferentes pasos de integración (3 órdenes de magnitud por ejemplo). ¿Por qué la solución no coincide exactamente?

Indicación: Activar las líneas de Matlab marcadas con la notación `%U%`.