
MODELOS DE PREDICCIÓN EN EDIFICACIÓN
Álgebra lineal numérica
Actividad B12. Diseño de una configuración de iluminación.

Estudiaremos una aplicación del álgebra lineal al diseño de una configuración de iluminación. Este enunciado va acompañado del fichero `ActividadB12.mlx`, que contiene las funciones de Matlab necesarias para afrontar la resolución de la práctica.

Consideramos un espacio en forma de prisma rectangular (aunque se podría aplicar a otras geometrías). Suponemos que tenemos 4 puntos de luz en el techo, ubicados en los vértices de un rectángulo cuyos lados miden A y B unidades de longitud, como se indica en la Figura 1. Denotamos por i_1, i_2, i_3 e i_4 la intensidad luminosa de cada uno de los cuatro puntos de luz.¹

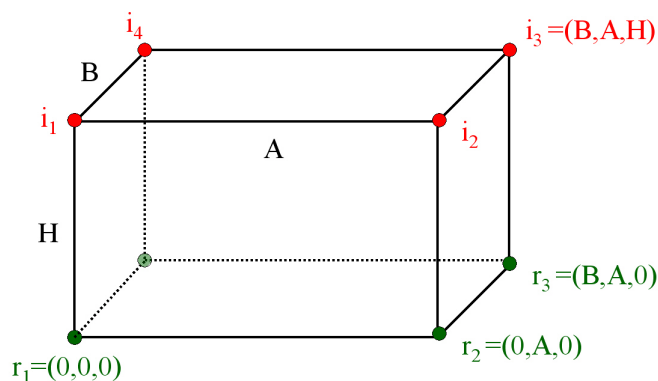


Figura 1: Ubicación de los puntos de luz i_j , $j = 1, \dots, 4$, y los sensores r_j , $j = 1, \dots, 4$.

Nuestro propósito es determinar cómo hay que regular estas intensidades para alcanzar las intensidades de iluminación adecuadas en el piso (suelo) del receptor. Para ello, hemos instalado varios sensores (luminómetros) en el suelo justo debajo de cada uno de los puntos de luz; denotamos por r_1 , r_2 , r_3 y r_4 las intensidades luminosas recibidas por cada sensor. Obviamente, los valores r_1 , r_2 , r_3 y r_4 dependen de las intensidades i_1 , i_2 , i_3 e i_4 emitidas por los focos de luz. Por otro lado, asumiendo que la altura de la habitación es H unidades de longitud, es fácil calcular la intensidad detectada por los sensores por medio de la *ley del coseno de Lambert*, que afirma que la intensidad luminosa recibida es proporcional al coseno del ángulo de incidencia.

Por ejemplo, la intensidad recibida por el primer sensor, r_1 , será la suma de las intensidades recibidas desde cada punto de emisión de luz. Desde el primer foco, recibe

¹En el sistema métrico internacional, la intensidad luminosa se mide en *candelas*. En esta actividad, nos referiremos más vagamente a unidades de luminosidad, e igualmente a unidades de longitud.

$i_1 \cos(0^\circ) = i_1$; desde el segundo, recibe $i_2 \cos(\alpha)$, donde el ángulo de incidencia α es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa del triángulo formado por el segmento que une el segundo punto de luz con el sensor. No es difícil ver que satisface $\cos(\alpha) = H/\sqrt{H^2 + A^2}$. De manera análoga, podemos calcular las otras dos intensidades y obtener:

$$r_1 = i_1 + \frac{H}{\sqrt{H^2 + A^2}} i_2 + \frac{H}{\sqrt{H^2 + A^2 + B^2}} i_3 + \frac{H}{\sqrt{H^2 + B^2}} i_4.$$

Observemos que esta relación es lineal, es decir, r_1 es una combinación lineal de i_1, i_2, i_3 e i_4 ya que se supone que A, B y H son datos conocidos.

1. Configuración de cuatro focos.

- Encontrar las ecuaciones lineales que determinan r_2, r_3 y r_4 . Escribir el sistema resultante como $M \vec{i} = \vec{r}$, donde M es una matriz real 4×4 , $\vec{i} = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ y $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)$.²
- Encontrar la intensidad necesaria de los cuatro puntos de luz para obtener una configuración que proyecte más intensidad luminosa en el sensor r_1 , de modo que: $\vec{r} = (0.8, 0.6, 0.6, 0.6)$ unidades de luminosidad.
- Calcular la intensidad luminosa recibida en un punto genérico del suelo con coordenadas $(x, y, 0)$. Hacer un mapa de calor del suelo que muestre dichas intensidades. (se puede dividir el suelo en una cuadrícula de $n \times n$ puntos.)
- Supongamos ahora que el foco número 2 sufre una avería, de modo que $i_2 = 0$. ¿Podríamos mantener la misma intensidad?

2. Configuración de cinco focos.

Supongamos que se restaura el foco número 2 y que agregamos un quinto foco en el techo, en el punto Q_H ubicado en $(B/2, A/2, H)$; volver a calcular la distribución de intensidades para volver a obtener $\vec{r} = (0.8, 0.6, 0.6, 0.6)$. ¿Existe una solución única? ¿Por qué?

3. Configuración de cinco sensores.

Reconsideramos la situación con cuatro puntos de luz, como en el enunciado 1, pero agregamos un quinto sensor en el punto Q_0 ubicado en $(B/2, A/2, 0)$; denotamos por r_5 la intensidad luminosa recibida por este sensor.

- Explicar porqué algunas configuraciones de iluminación en los cinco sensores, $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$, ya no son posibles.
- Escoger un ejemplo que no tenga solución y encontrar la mejor de las “no-soluciones” por el método de mínimos cuadrados.

Bonus: Diseñar un programa que, dadas las coordenadas de m puntos de iluminación (posición en el techo e intensidad luminosa), efectúe un mapa de calor de la intensidad luminosa para cualquier sección de altura $h \in [0, H)$.

²En el *Live Editor* de Matlab podéis insertar (**Insert**) ecuaciones.