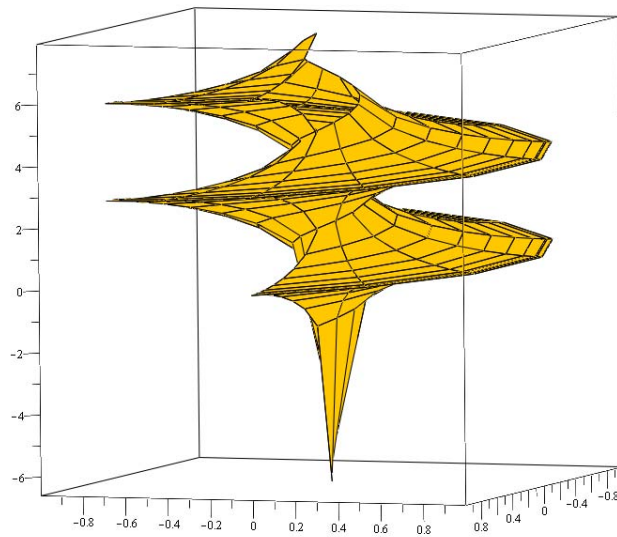

Mètodes matemàtics



Grau en enginyeria geomàtica i geoinformació
Dep. Matemàtica Aplicada I
EPSEB Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

I	Geometria diferencial de corbes i superfícies	7
1	Corbes	9
	Coneixements previs	10
	Introducció	10
1.1	Funcions vectorials de variable real	12
1.1.1	Límits i continuïtat	15
1.1.2	Derivada	15
1.2	Corbes planes	17
1.2.1	Funcions	17
1.2.2	Equacions	17
1.2.3	Corbes parametritzades	18
1.2.4	Corbes en coordenades polars	25
1.3	El paràmetre longitud d'arc	27
1.4	Corbes a $\mathbb{R}^3$	28
1.4.1	Vector tangent. Curvatura	28
1.4.2	Corbes no parametritzades per l'arc	31
1.5	Curvatura d'una corba d' $\mathbb{R}^2$	34
1.5.1	Curvatura d'una corba plana parametritzada	34
1.5.2	Curvatura d'una funció	35
1.5.3	La curvatura com a variació de l'angle de contingència	35
1.6	Exercicis	40
2	Superfícies	43
2.1	Introducció	44
2.2	Superfícies	45
2.2.1	Camps escalars. Superfície explícita	45
2.3	Pla tangent i recta normal	48
2.3.1	Superfícies parametritzades	48
2.3.2	Superfícies donades en forma explícita	50
2.3.3	Superfícies donades en forma implícita	51
2.4	Parametrització d'algunes superfícies	51
2.5	Primera forma quadràtica fonamental	53
2.5.1	Primera forma quadràtica fonamental	53

2.5.2	Longitud d'un arc de corba sobre una superfície.	55
2.5.3	Angle entre dues corbes sobre una superfície	56
2.5.4	Àrea sobre una superfície	56
2.6	Exercicis	58
II	Equacions diferencials	61
3	Equacions diferencials	63
	Coneixements previs	64
	Introducció	64
3.1	Concepte d'equació diferencial i de solució	66
3.2	Equacions diferencials ordinàries: mètodes bàsics de resolució	71
3.2.1	Equacions diferencials lineals de primer ordre	71
3.2.2	Equacions diferencials exactes	72
3.2.3	Exercicis d'enunciat més complex	74
3.3	Famílies de corbes ortogonals	76
3.4	Exercicis	77
3.4.1	Equacions de primer ordre	77
3.4.2	Formació de models	79
3.4.3	Equacions de segon ordre i sistemes d'equacions	82
III	Variable complexa	87
3.5	Introducció	89
4	Els nombres complexos	91
4.1	Definició	91
4.1.1	Les potències de i	91
4.1.2	El complex conjugat	92
4.1.3	El pla complex	92
4.1.4	El cos dels nombres complexos	93
4.1.5	El mòdul d'un nombre complex	93
4.1.6	Forma polar i trigonomètrica d'un complex	94
4.1.7	Relació entre la presentació binòmica i polar d'un complex	94
4.1.8	Producte i potència de complexos en forma polar	95
4.2	Exercicis	97
5	Funcions de variable complexa	99
5.1	Introducció	99
5.1.1	Exemples de funcions de variable complexa	99
5.2	Diferenciació. Equacions de Cauchy-Riemann	104
5.2.1	Regles de derivació	107

5.2.2	Interpretació geomètrica de la derivada	107
5.3	Funcions holomorfes rellevants	109
5.3.1	La funció exponencial	109
5.3.2	Les funcions trigonomètriques i hiperbòliques	111
5.3.3	La funció logaritme	112
5.4	Funcions harmòniques. Equació de Laplace	113
5.5	Exercicis	115

Part I

Geometria diferencial de corbes i superfícies

Capítol 1

Corbes

Coneixements previs

En aquesta lliçó es suposen conegudes

- les **funcions reals d'una variable**, així com la seva representació gràfica. En particular, es farà ús dels conceptes de límit, continuïtat, asímptota, derivada i integral per a funcions reals d'una variable.
- També es suposa conegut l'**espai vectorial euclidià**. En particular, es farà ús dels conceptes de producte escalar i producte vectorial entre vectors, distància i angle entre vectors i norma d'un vector.

NOTA: L'existència de les actuals calculadores gràfiques i programes d'ordinador que permeten bones representacions gràfiques, condiciona l'enfocament que s'ha donat a alguns temes com la representació gràfica de funcions i corbes, i suposa que el lector no és aliè a l'ús d'aquests instruments.

Introducció

Des de la forma que pren una corda penjada dels seus extrems fins al moviment d'un planeta a l'espai, passant per la resposta del cervell d'una persona a un estímul extern o la llei de l'oferta i la demanda, existeixen tota mena de fenòmens lligats a les activitats tecnològiques o a les ciències, ja sigui de la naturalesa, humanes o socials, que s'estudien a partir de models donats per corbes.

Aquesta lliçó tracta, precisament, de l'estudi de les corbes i de la manera com les matemàtiques ens permeten obtenir informació sobre els fenòmens que modelen mitjançant corbes. En topografia d'obres, per exemple, les corbes d' $\mathbb{R}^2$ tenen gran importància pel traçat de tota mena de vies i conduccions. El concepte de curvatura en un punt, que tothom intueix, ens indica “quant” es separa la corba de la recta tangent en aquest punt. Per tant, una recta té curvatura 0 en tots els punts. Veurem que en tots els punts d'una circumferència de radi R , la curvatura és la mateixa, $1/R$, creix al disminuir el radi. Així, una recta també la podem entendre com una circumferència de radi infinit. Per unir diferents rectes i circumferències ens interessa trobar una corba on la curvatura augmenti o disminueixi progressivament; aquestes corbes s'anomenen clotoïdes.

Ens haurem de familiaritzar amb les diferents formes d'expressar matemàticament una corba, tant al pla com a l'espai. Sabem que una funció real d'una variable representa una corba plana. Per exemple, la funció $y = x^2$ representa una paràbola d'eix vertical i vèrtex a l'origen de coordenades (fig. 1.1). També suposem conegut que una equació amb dues variables representa una corba plana, com és el cas de l'el·lipse $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ (fig. 1.2). Però hi ha una infinitat de corbes que no es poden representar per una equació, ni molt menys per una funció. Per exemple, l'epicicloïde (fig. 1.3), que és la corba que descriu un punt d'una circumferència que roda per damunt d'una altra fixa. D'altra banda, hi ha corbes a $\mathbb{R}^3$ que es poden representar com a intersecció de dues superfícies. Per exemple, en geometria afí s'acostuma a donar una recta com a intersecció de dos plans (fig. 1.4).

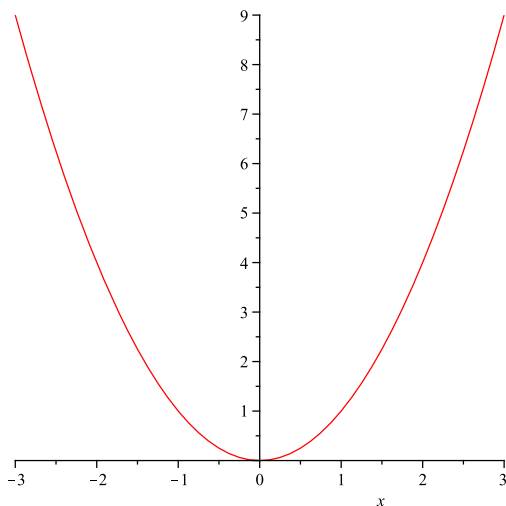
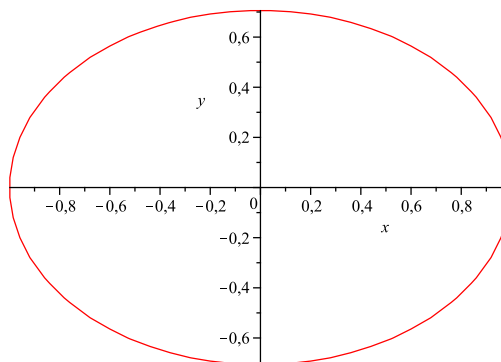
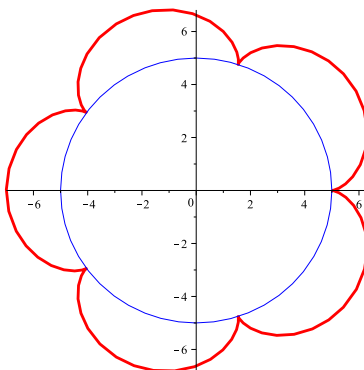
Figura 1.1: Paràbola $y = x^2$.Figura 1.2: El·lipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

Figura 1.3: Epicicloide.

De la mateixa forma es poden representar altres corbes. Per exemple, la intersecció del paraboloid $z = x^2 + y^2$ amb el pla $z = 1$ ens donarà la circumferència de centre en $(0,0,1)$ i radi 1 (fig. 1.5).

Però donada una corba qualsevol a $\mathbb{R}^3$, en general no podrem trobar dues superfícies d'equació coneguda la intersecció de les quals doni la corba en qüestió. La pregunta que ens fem és: com podem representar aquestes corbes tant al pla com a l'espai?

La forma més general de donar una corba és parametritzant-la amb una funció vectorial. Això vol dir que a cada valor real d'un cert paràmetre t li fem correspondre un punt de $\mathbb{R}^3$ representat pel vector $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, o de $\mathbb{R}^2$ representat pel vector $r(t) = (x(t), y(t))$ en cas que sigui al pla (fig. 1.6).

Convindrà, doncs, començar introduint aquestes funcions vectorials de variable real, la qual cosa farem a la Secció 1.1.

En la Secció 1.2 tractarem les corbes a $\mathbb{R}^2$. Repassarem les diferents formes de donar una

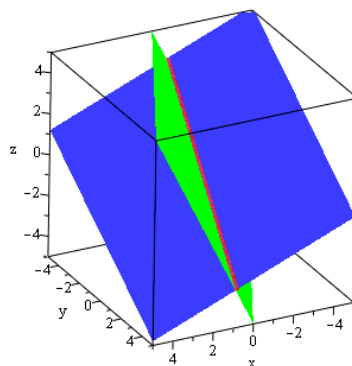


Figura 1.4: Recta intersecció de dos plans.

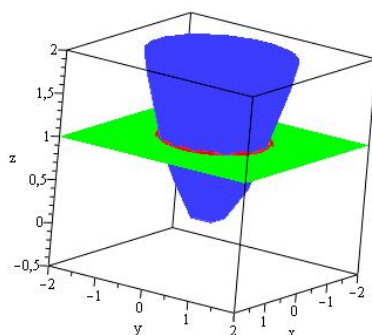


Figura 1.5: Corba intersecció de dues superfícies.

corba plana i dedicarem especial atenció a les corbes parametritzades, per a les quals ens proposarem fer la seva representació gràfica, tot i estudiant les principals característiques. Veurem també la seva representació quan la corba ve donada en coordenades polars.

En la Secció 1.4 estudiarem les corbes a l'espai. Aquí, la finalitat no serà la seva representació gràfica sinó introduir els conceptes de longitud d'arc i curvatura de forma general (amb aplicació al cas particular de les corbes planes).

1.1 Funcions vectorials de variable real

Definició 1.1 (Funcions vectorials. Corbes parametritzades). *Una **funció vectorial de variable real** és una aplicació d'un domini I de nombres reals sobre $\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} r : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

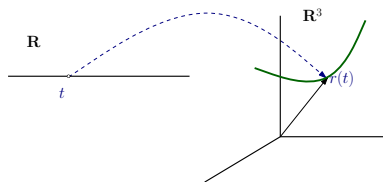


Figura 1.6: Funció vectorial.

de forma que a cada valor t del conjunt I de $\mathbb{R}$ li fa correspondre un vector $r(t)$ de $\mathbb{R}^n$ que té com a components les n funcions reals d'una variable $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Una **corba parametritzada per la funció vectorial** $r(t)$ és el conjunt de punts $\{r(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}$. Tota funció vectorial defineix, doncs, una corba de $\mathbb{R}^n$ però, com veurem més endavant, una mateixa corba pot tenir diferents parametritzacions.

Donar una funció vectorial de variable real $r(t)$ equival, doncs, a donar n funcions reals d'una variable $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, les propietats de les quals es suposen conegudes.

A continuació hi ha exemples d'algunes corbes conegudes donades per funcions vectorials. Com s'ha comentat a la introducció, les funcions vectorials que ens interessin són les de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^3$, que representen les corbes a l'espai, i les de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$, que representen les corbes al pla.

Exemple 1. Una parametrització de la recta que passa pel punt $A(a_1, a_2, a_3)$ i té vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és

$$r(t) = (a_1 + v_1t, a_2 + v_2t, a_3 + v_3t) = a + tv$$

on $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és un vector de posició i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és un vector director de la recta (fig. 1.7).

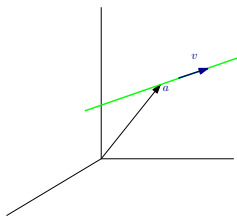


Figura 1.7: Elements de la parametrització d'una recta.

Exemple 2. L'epicicloide esmentada anteriorment (fig. 1.3) generada per la circumferència de radi b que roda sobre un altra circumferència de radi a^1 , ve donada per les equacions paramètriques

$$r(t) = \left((a+b) \cos t - b \cos \left(\frac{a+b}{b} \right) t, (a+b) \sin t - b \sin \left(\frac{a+b}{b} \right) t \right).$$

¹En aquest exemple $a = 5, b = 1$

Exemple 3. La circumferència de radi R i centre a l'origen de coordenades (fig. 1.8), ve donada per les equacions paramètriques

$$r(t) = (R \cos(t), R \sin(t)) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Observació 1. Ja s'ha comentat que una mateixa corba pot tenir diferents parametritzacions. Per exemple, les equacions paramètriques

$$r(\bar{t}) = (R \cos(2\bar{t}), R \sin(2\bar{t})) \quad ; \quad 0 \leq \bar{t} \leq \pi$$

també representen la circumferència de radi R i centre a l'origen de coordenades. I encara, una altra parametrització de la mateixa circumferència.

$$r(\hat{t}) = (R \cos(\hat{t}), -R \sin(\hat{t})) \quad ; \quad 0 \leq \hat{t} \leq 2\pi$$

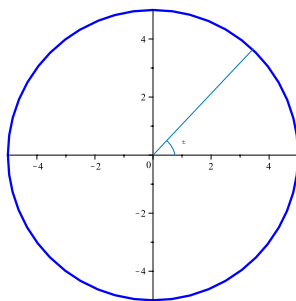


Figura 1.8: Parametrització d'una circumferència.

Exemple 4. I si a la parametrització de la circumferència, afegim una component z proporcional al paràmetre t , tenim l'hèlix circular (fig. 1.9)

$$r(t) = (R \cos(t), R \sin(t), Kt)$$

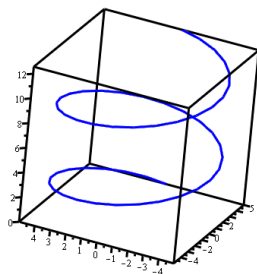


Figura 1.9: Hèlix circular.

1.1.1 Límits i continuïtat

El concepte de límit per a funcions reals d'una variable, s'estén a funcions vectorials component a component:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \end{pmatrix}$$

on t_0 , en particular, pot ser infinit. A més, així definit el límit, les propietats conegudes dels límits de funcions reals, es generalitzen per a funcions vectorials.

A partir d'aquí, és evident que una funció vectorial $r(t)$ serà contínua en t_0 quan ho siguin cada una de les funcions components $x_i(t)$.

Exemple 5. Límit d'una funció vectorial *Considerem la funció vectorial*

$$r(t) = \left(\frac{t}{t^3 + 1}, \frac{t^2}{t^3 + 1} \right)$$

i tenim en compte els valors positius del paràmetre t des de $t = 0$ fins a $t \rightarrow +\infty$. És immediat que la corba surt del punt $(0,0)$ per a $t = 0$ i tendeix a tornar al mateix punt quan $t \rightarrow +\infty$.

Si representem aquesta corba per a t des de 0 fins a 2 i fins a 10, obtindrem, respectivament, els dibuixos de la figura 1.10

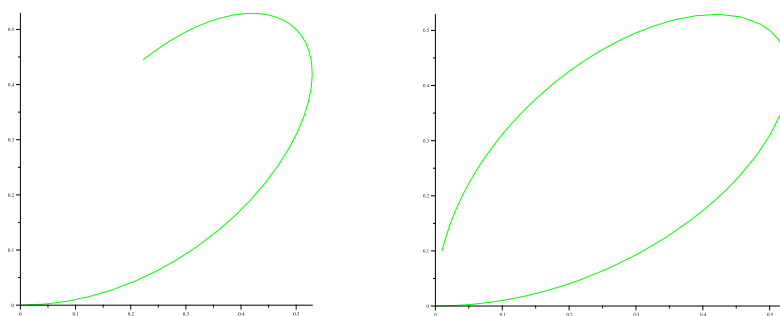


Figura 1.10: Límit d'una funció vectorial.

1.1.2 Derivada

La **derivada**, com a límit que és, queda definida component a component:

$$r'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

Interpretació geomètrica.

La derivada $r'(t_0)$ del vector $r(t)$ en un punt t_0 , introduïda anteriorment per components, és **un** vector tangent a la corba en el punt t_0 .

Efectivament, $r'(t_0)$ també es pot escriure de la forma

$$r'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$$

on $r(t) - r(t_0)$ és un vector secant entre els punts de la corba corresponents als valors del paràmetre t i t_0 respectivament. La derivada és, doncs, un vector en la direcció límit d'aquest vector secant quan el punt $r(t)$ s'acosta al punt $r(t_0)$ (fig. 1.11).

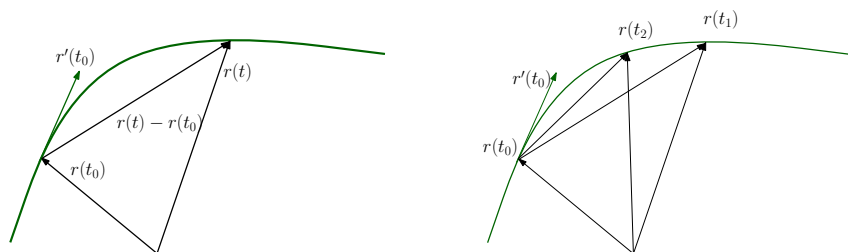


Figura 1.11: Derivada d'una funció vectorial.

Exemple 6. Vector derivada d'una funció vectorial *En particular, en el cas de la circumferència, el vector $r'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$ és perpendicular al vector $r(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ en qualsevol punt (fig. 1.12). I en el cas de la recta, el vector $r'(t) =$*

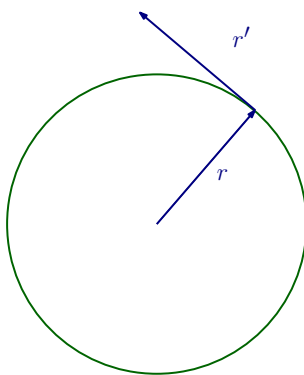


Figura 1.12: Vector derivada.

(v_1, v_2, v_3) és, precisament, el vector director de la recta.

Exemple 7. Equacions de moviment *Donada una funció vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si el significat del paràmetre t és el temps, el vector $r(t)$ ens dona la posició d'un mòbil a cada instant t . La seva derivada $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ és la velocitat a l'instant t que, evidentment, és tangent a la trajectòria.*

1.2 Corbes planes

A continuació es descriuen diferents maneres d'expressar els punts d'una corba.

1.2.1 Funcions

Sabem que tota funció $y = f(x)$ representa la corba plana formada pels punts $(x, f(x))$ i suposem coneguts els conceptes que serveixen per definir els seus trets característics: camp de definició, simetria, extrems relatius, creixement i decreixement, punts d'inflexió, concavitat i asímptotes.

Es podria pensar que amb una calculadora gràfica o un programa de càlcul simbòlic, la representació d'una funció és automàtica, però sense aquests conceptes no podríem definir adequadament els valors que s'han de introduir. Com per exemple, per a quins valors de la variable volem que faci la gràfica. Ni tampoc, en molts casos, no es podria interpretar el resultat de manera correcta.

Exemple 8. Representació gràfica d'una funció. *Per exemple, la funció $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ té les següents característiques:*

El seu camp de definició és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Es simètrica respecte a l'origen de coordenades.

Talla els eixos de coordenades només en el punt $(0, 0)$.

Presenta un màxim relatiu en el punt $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) \simeq (-1.73, -2.60)$ i un mínim relatiu en el punt $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}) \simeq (1.73, 2.60)$.

És creixent per a $x < -\sqrt{3}$ i per a $x > \sqrt{3}$ i decreixent per a $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Té un punt d'inflexió en $(0, 0)$.

Presenta concavitat negativa per a $x < -1$ i en l'interval $0 < x < 1$, mentre que presenta concavitat positiva per a $x > 1$ i a l'interval $-1 > x > 0$.

Te dues asímptotes verticals a les rectes $x = -1$ i $x = 1$, i una asímptota obliqua a la recta $y = x$.

Podem obtenir una bona versió de la seva representació gràfica s'ha de dir que la dibuixi en els intervals $-5 < x < 5$ per $-5 < y < 5$ i saber interpretar com asímptotes les línies quasi verticals que dibuixa a l'entorn de $x = -1$ i $x = 1$ (fig. 1.13). Observeu que si la funció fos, per exemple, $y = \frac{x^3}{x^2-36}$, per a aquest rang de variació de les variables la calculadora o el programa de càlcul simbòlic, només dibuixaria la part de la corba situada entre les asímptotes.

Per tant, és imprescindible un estudi previ dels trets generals de la corba abans de demanar la seva representació a una calculadora o al programari de càlcul simbòlic.

1.2.2 Equacions

Una equació amb dues variables $g(x, y) = 0$ representa la corba plana descrita pels punts $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ que la satisfan.

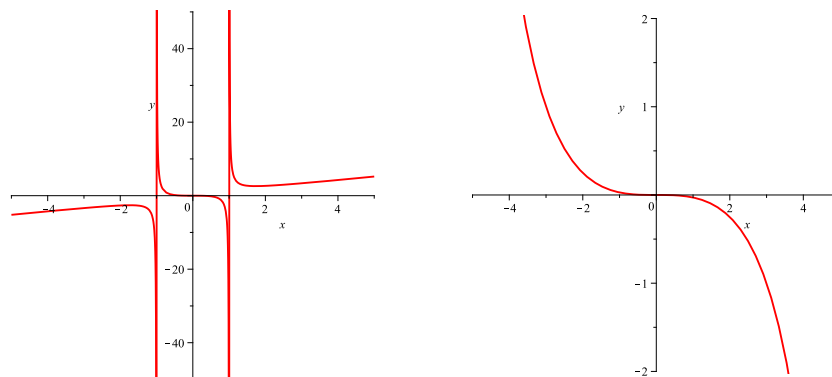


Figura 1.13: Corbes donades per les funcions $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ i $y = \frac{x^3}{x^2-36}$ respectivament, amb $-5 < x < 5$.

Exemple 9. Corba donada per una equació Per exemple, l'equació $x^2 + y^2 = 4$ representa la circumferència de centre l'origen i radi 2. En l'interval $-2 < x < 2$, podem considerar les dues funcions $y = \sqrt{4 - x^2}$ i $y = -\sqrt{4 - x^2}$, definides per la anterior equació, que representen, per parts, la mateixa corba (fig. 1.14).

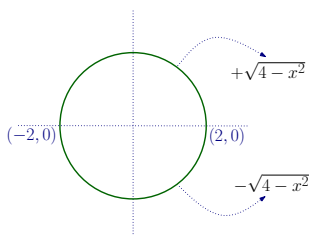


Figura 1.14: Corba donada per l'equació $x^2 + y^2 = 4$.

1.2.3 Corbes parametritzades

Definició 1.2 (Corba plana parametritzada). Donada una funció vectorial de variable real d'un domini I de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} r : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de forma que a cada valor t del conjunt I de $\mathbb{R}$ li fa correspondre un vector $r(t)$ de $\mathbb{R}^2$, anomenarem **corba parametritzada** per la funció $r(t)$ al conjunt de punts del pla $\{(x(t), y(t)); t \in I\}$.

L'estudi complet d'una corba parametritzada per una funció vectorial de $\mathbb{R}^2$ és anàleg al que es fa amb una funció. és a dir, conèixer una corba plana parametritzada i fer la

seva representació gràfica acurada equival a conèixer les seves principals característiques. A continuació veurem quines són les diferències de procediment que s'han d'introduir respecte a l'estudi de funcions quan es tracta de corbes parametritzades. Després ho aplicarem a un exemple suposant, a més, que disposem d'una calculadora gràfica.

a) Camp de definició

El primer pas en l'estudi d'una corba parametritzada sempre ha de ser buscar per a quins valors del paràmetre t estan definides les dues variables $x(t)$ i $y(t)$. A més, de cara a definir el rang de variació de les coordenades x i y a la pantalla, hem de veure quin és aquest rang de variació per a aquests valors de t . Aleshores, la pregunta que ens fem és: fins a quins valors màxim i mínim de x i y hem de disposar a la pantalla perquè no quedi fora de camp cap característica de la corba? Evidentment podem anar fent proves fins a obtenir una corba que ens doni la impressió que és completa, però no és una forma científica i rigorosa de procedir. Coneixent les tendències asimptòtiques de la corba i la situació dels seus punts més representatius podrem decidir el rang de variació que volem per al paràmetre i les variables d'una forma coherent.

Però un pas previ sempre interessant de fer consisteix en estudiar la seva

b) Simetria

Un test senzill per a detectar algunes simetries en una corba parametritzada consisteix en observar l'efecte que té un canvi de signe del paràmetre sobre les variables x i y :

- Si $x(-t) = x(t)$ mentre que $y(-t) = -y(t)$, aleshores la corba és simètrica respecte l'eix ox .
- Si $x(-t) = -x(t)$ mentre que $y(-t) = y(t)$, aleshores la corba és simètrica respecte l'eix oy .
- Si $x(-t) = -x(t)$ i a més $y(-t) = -y(t)$, aleshores la corba és simètrica respecte l'origen de coordenades (fig. 1.15).

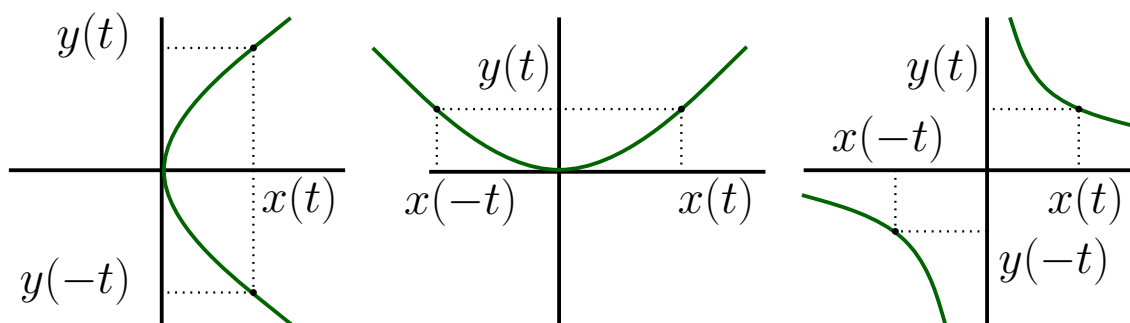


Figura 1.15: Simetria en una corba parametritzada.

Observació 2. Aquestes són condicions suficients però no necessàries. És a dir, pot no verificar-se la condició i existir la simetria corresponent. A més, hi han molts altres tipus de simetries respecte altres rectes o altres punts, evidentment no detectades per aquest test.

c) Asímptotes

L'anterior estudi del camp de definició ens ha preparat el terreny per trobar les asímptotes segons les següents definicions:

Definició 1.3 (Asímptotes). *Es diu que una corba parametritzada té una **asímptota horitzontal** en la recta $y = y_0$, quan existeix un valor t_0 del paràmetre t que pot ser $t_0 = +\infty$ o $t_0 = -\infty$, per al qual*

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= y_0\end{aligned}$$

*Es diu que una corba parametritzada té una **asímptota vertical** en la recta $x = x_0$, quan existeix un valor t_0 del paràmetre t que pot ser $t_0 = +\infty$ o $t_0 = -\infty$, per al qual*

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= x_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= \infty\end{aligned}$$

*Es diu que una corba parametritzada té una **asímptota obliqua** en la recta $y = mx + b$, quan existeix un valor t_0 del paràmetre t que pot ser $t_0 = +\infty$ o $t_0 = -\infty$, per al qual*

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} &= m \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - mx(t) &= b\end{aligned}$$

d) Punts notables

- Talls amb els eixos

La corba tallarà l'eix ox en els punts corresponents als valors de t per als quals $y(t) = 0$.

La corba tallarà l'eix oy en els punts corresponents als valors de t per als quals $x(t) = 0$.

- Punts de tangent vertical, de tangent horitzontal i punts singulars

El pendent de la tangent en un punt de la corba ve donada pel valor de la derivada $\frac{dy}{dx}$ en aquest punt. Com que no disposem d'una funció $y(x)$ sinó que tenim la corba parametritzada per dues funcions $x(t)$ i $y(t)$, aquesta derivada l'haurem de calcular de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Els punts de tangent horitzontal, és a dir, els possibles extrems relatius, són els corresponents als valors del paràmetre t que fan $\frac{dy}{dx} = 0$, la qual cosa es verificarà quan $\frac{dy}{dt} = 0$ i $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

Els punts de tangent vertical són els corresponents als valors del paràmetre t que fan $\frac{dy}{dx} = \infty$, la qual cosa es verificarà quan $\frac{dy}{dt} \neq 0$ i $\frac{dx}{dt} = 0$.

Els punts singulars són aquells per als quals la tangent no està definida. Això passarà quan $\frac{dy}{dt} = 0$ i $\frac{dx}{dt} = 0$. Acostumen a ser punts on la tangent és doble i on la corba presenta forma de pic.

Des d'un altre punt de vista, podem recordar que el vector derivada $r'(t) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ (fig. 1.16) ens dona la direcció de la tangent a la corba en cada punt. Aquesta direcció serà horitzontal quan la segona component sigui zero i vertical quan ho sigui la primera; evidentment, no estarà definida quan s'anul·lin ambdues components. Cinemàticament, si

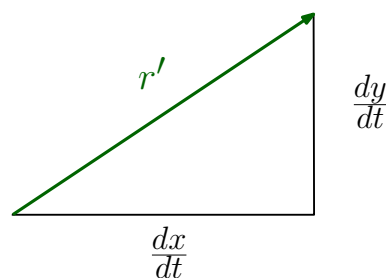


Figura 1.16: Components del vector derivada.

$r(t) = (x(t), y(t))$ és el vector de posició d'un mòbil i $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ la seva velocitat, en un punt de tangent horitzontal s'anul·la la component vertical $y'(t)$ de la velocitat (instant en que el mòbil assoleix l'altura màxima en el tir parabòlic), en un punt de tangent vertical s'anul·la la component horitzontal $x'(t)$ de la velocitat (instant en el que un "boomerang" comença el camí de tornada) i en un punt singular s'anul·len les dues components $x'(t)$, $y'(t)$ de la velocitat (instant en que el mòbil s'atura).

Exemple 10. Punt singular d'una corba parametritzada de $\mathbb{R}^2$ Per exemple, la corba parametritzada per $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, presenta un punt singular en $(0,0)$ per a $t = 0$ (fig. 1.17), on les dues branques tenen la mateixa tangent coincident amb l'eix x .

- Punts d'inflexió

Els punts d'inflexió estaran entre els corresponents als valors del paràmetre t que fan $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Aquest càlcul acostuma a ser complicat i, en tal cas, es pot prescindir de trobar-los. A banda que una calculadora gràfica una mica potent disposa de prou recursos per resoldre equacions numèricament, de fet només és necessari situar "més o menys" la solució per tal de poder indicar a la calculadora el rang de variació adient per al paràmetre i les variables.

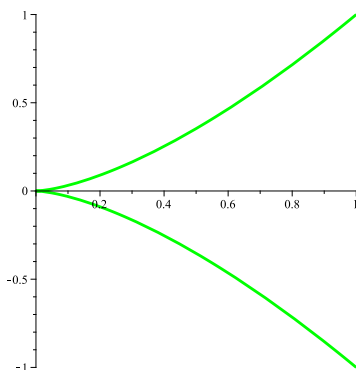


Figura 1.17: Punts singulars.

e) Representació gràfica. Conclusions

Coneguts els punts més representatius de la corba, sabrem quin és el rang de variació de les coordenades x i y que cal introduir a la calculadora i podrem procedir a la seva representació gràfica. Com que també coneixem les tendències asimptòtiques, podrem interpretar correctament algunes formes que pot prendre la imatge que observem.

A més, sobre la representació gràfica podrem localitzar els intervals corresponents a branques on la corba és creixent i decreixent, o té concavitat positiva o negativa, sense necessitat de calcular el signe de les derivades de y respecte de x , la qual cosa pot arribar a ser força incòmoda.

Exemple 11. Representació gràfica d'una corba parametritzada de $\mathbb{R}^2$ La corba que estudiarem és la parametritzada per

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 2t}{t - 1} \\ y(t) = \frac{2t + 1}{t - 1} \end{cases}$$

a) Camp de definició

En el nostre cas existeixen punts $((x(t), y(t)))$ de la corba per a valors de t del conjunt $D_t = \mathbb{R} - \{1\}$ i caldrà estudiar quin és el rang de variació de les variables x i y per a valors de t en els dos intervals $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$. Veiem, doncs, com es comporten en els

extrems d'aquets intervals.

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow 2 \end{cases}$$

$$t \rightarrow 1- \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$t \rightarrow 1+ \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2 \end{cases}$$

Veiem, doncs, que tant x com y prenen valors en tota la recta real.

b) Simetria

Com que

$$x(-t) = \frac{t^2 - 2t}{-t - 1} \begin{cases} \neq x(t) \\ \neq -x(t) \end{cases}$$

i

$$y(-t) = \frac{-2t + 1}{-t - 1} \begin{cases} \neq y(t) \\ \neq -y(t) \end{cases}$$

aquest test no detecta cap tipus de simetria.

c) Asímtotes

És fàcil comprovar que la corba té una asímtota horitzontal en la recta $y = 2$ i una asímtota inclinada en la recta $y = x - 2$, sense més que calcular els límits corresponents.

d) Punts notables

-Interseccions amb els eixos

$x = 0 \Leftrightarrow t = 0, 2$; $y(0) = -1$, $y(-2) = 1$. *Passa per $(0, 1)$ i $(0, -1)$.*

$y = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$; $x(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. *Passa per $(\frac{1}{2}, 0)$.*

-Punts de tangent horitzontal, de tangent vertical i punts singulars

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 2t - 2}{(t-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t^2 - 2t - 2}$$

No hi ha punts de tangent horitzontal ja que $y'(t)$ no s'anul·la per a cap valor de $t \in D_t$.

En canvi, $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{3}$ ($\simeq -0.73$ i 2.73) mentre que $y'(1 \pm \sqrt{3}) \neq 0$.

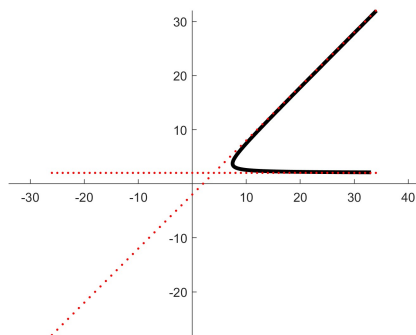


Figura 1.18: Corba $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2 + 2t}{t - 1}, \frac{2t + 1}{t - 1}\right)$; amb $t \in (-\infty, 1)$.

Per tant, la corba presenta dos punts de tangent vertical:
 $(x(1 \pm \sqrt{3}), y(1 \pm \sqrt{3}))$ que són els punts $A \simeq (0.5, 0.3)$ i $B \simeq (7.5, 3.7)$.

-Punts d'inflexió

En aquest cas, és fàcil calcular

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \frac{(t - 1)^3}{(t^2 - 2t - 2)^3}$$

i veure que no s'anul·la per a cap valor de $t \in D_t$. Per tant, la corba no presenta punts d'inflexió.

e) Representació gràfica. Conclusions

Hem vist que t varia en els dos intervals $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$. El primer conté el punt de tangent vertical A , corresponent a $t_A \simeq -0.73$. Veiem que quan t pren valors en l'interval $(-\infty, t_A)$, la corba decreix amb concavitat negativa; quan t pren valors en l'interval $(t_A, 1)$, la corba creix amb concavitat positiva.

El segon interval conté el punt de tangent vertical B , corresponent a $t_B \simeq 2.73$. Observem que quan t pren valors en l'interval $(1, t_B)$, la corba decreix amb concavitat negativa i quan t pren valors en l'interval $(t_B, +\infty)$, la corba creix amb concavitat positiva. Avaluant els punts de la corba per a diferents valors de t , veurem que un rang de variació apropiat del paràmetre i les variables per tal d'obtenir la representació la branca dreta és $t=1.4 \dots 15$. Representant la corba entre aquests valors del paràmetre s'obté la figura 1.19.

Ambdues branques donen la gràfica de la figura 1.20

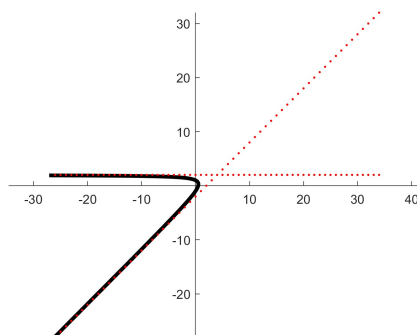


Figura 1.19: Corba $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2 + 2t}{t - 1}, \frac{2t + 1}{t - 1}\right)$; amb $t \in (1, +\infty)$.

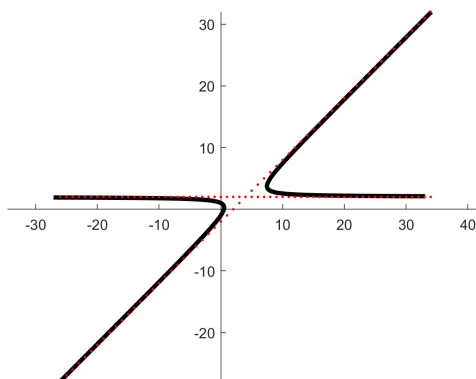


Figura 1.20: Corba parametritzada per $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2 + 2t}{t - 1}, \frac{2t + 1}{t - 1}\right)$.

1.2.4 Corbes en coordenades polars

a) Coordenades polars

Si escollim un punt O del pla que anomenarem "pol" i una semirecta partint del pol que anomenarem "eix polar", un punt P qualsevol del pla queda determinat per dos nombres: la distància ρ del punt P al pol i l'angle θ des de l'eix polar al segment OP . Aquests nombres ρ i θ s'anomenen coordenades polars del punt P (fig. 1.21).

Donat un sistema de coordenades cartesianes x, y , prenent el pol a l'origen de coordenades i l'eix polar a la semirecta de les x positives, aleshores la relació entre les coordenades polars i les coordenades cartesianes d'un punt P és:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

b) Representació de corbes en coordenades polars

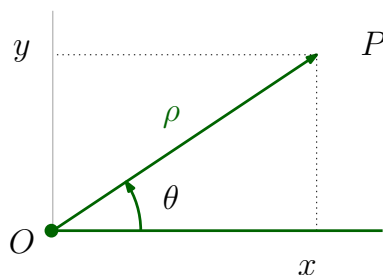


Figura 1.21: Coordenades polars.

Una corba donada per una funció en coordenades polars

$$\rho = f(\theta)$$

sempre es pot representar en coordenades cartesianes. Només cal tenir en compte les anteriors relacions entre els dos tipus de coordenades:

$$\begin{aligned}x &= f(\theta) \cos \theta \\ y &= f(\theta) \sin \theta\end{aligned}$$

amb la qual cosa tenim un parell d'equacions paramètriques amb paràmetre θ . Per tant, podem fer la seva representació gràfica tal i com s'ha indicat a la secció anterior. Tanmateix, si disposem d'un programa de càlcul simbòlic adequat, podem fer la representació gràfica directament en coordenades polars sempre i quan tinguem prou cura de fer un estudi previ per tal d'introduir les dades correctament. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 12. La Lemniscata de Bernoulli en coordenades polars *Considereu la corba anomenada "Lemniscata de Bernoulli", representada per la següent funció donada en coordenades polars.*

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

a) Camp de definició. Rang de variació de θ

Quan una corba està representada per una funció donada en coordenades polars i la coordenada θ figura dins de funcions trigonomètriques, aleshores només cal estudiar-la entre 0 i 2π degut a la periodicitat d'aquestes funcions. Dins d'aquest rang de variació, cal veure per a quins valors està definida la funció. En el nostre cas, ho està per a valors de θ que fan $\cos 2\theta$ positiu, és a dir, per a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{8\pi}{4}$.

b) Rang de variació de ρ

En aquest cas és evident que la coordenada ρ pren valors entre 0 i a degut a què $\sqrt{\cos 2\theta}$ pren valors entre 0 i 1. Per tant, la gràfica estarà confinada dins del quadrat de centre l'origen de coordenades i costat $2a$. Agafant el cas particular corresponent al valor del paràmetre $a = 1$, s'obté la gràfica de la corba que es mostra a la figura 1.22.

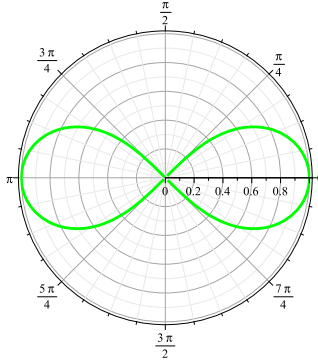


Figura 1.22: Lemniscata (polars).

Veurem ara alguns conceptes relatius a corbes parametritzades que s'introdueixen d'una forma general a $\mathbb{R}^n$, però hem de pensar que, per nosaltres, és $n = 2$ o 3 .

1.3 El paràmetre longitud d'arc

Sigui una corba a $\mathbb{R}^n$ parametritzada per

$$\begin{aligned} \vec{r} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definició 1.4 (Longitud d'arc). *El paràmetre **longitud d'arc**, $s(t)$, entre els dos punts corresponents als valors t_0 i t del paràmetre t es defineix com*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

és a dir,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt.$$

Observació 3. *Si el vector $\vec{r}(t)$ representa el vector de posició d'un mòbil i el paràmetre t té el significat de temps, aleshores $\vec{r}'(t)$ és el vector velocitat. La longitud d'arc recorreguda és la integral del mòdul $\|\vec{r}'(t)\|$ de la velocitat.*

A més, de la definició de la funció $s(t)$ i del teorema fonamental del Càlcul, resulta immediatament que la seva derivada és $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$, és a dir, el mòdul de la velocitat és la derivada de l'espai recorregut respecte el temps.

Si donada la parametrització inicial amb paràmetre t aconseguim efectuar la integral de l'anterior definició, podrem calcular la funció $s(t)$ que relaciona ambdós paràmetres. Si a més podem invertir aquesta funció per a obtenir la relació $t(s)$, estarem en condicions de canviar de paràmetre i tenir la corba parametritzada per la longitud d'arc, $\vec{\alpha}(s) = \vec{r}(t(s))$.

Exemple 13. Parametrització per l'arc de l'hèlix circular *Considerem l'hèlix circular parametritzada per*

$$\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t, kt)$$

La longitud d'arc des del punt corresponent a $t = 0$ fins a t , vindrà donada per

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t) + k^2} dt = \sqrt{R^2 + k^2} t$$

i per tant

$$t = \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}.$$

Introduint aquesta relació en la parametrització inicial, obtindrem la corba parametritzada per l'arc.

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, k \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}} \right). \quad (1.1)$$

Com veurem més endavant, tenir la corba parametritzada per l'arc facilita considerablement la forma de donar algunes definicions i de fer alguns càlculs.

1.4 Corbes a $\mathbb{R}^3$

1.4.1 Vector tangent. Curvatura

Donada una corba parametritzada per la funció vectorial $\vec{r}(t)$, ja hem establert que el vector derivada $\vec{r}'(t)$ dona la direcció de la tangent a la corba en cada punt.

Definició 1.5 (Vector tangent). *Anomenarem **vector tangent** a una corba en un punt, i l'indicarem per $\vec{t}$, al vector unitari en la direcció de la tangent en aquest punt.*

Per tant, el vector tangent es pot calcular dividint el vector derivada $\vec{r}'(t)$ pel seu mòdul:

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

La següent proposició ens proporciona un mètode per saber si la corba parametritzada per l'arc.

Proposició 1.6. *La primera derivada $\vec{r}'(s)$ d'una funció vectorial respecte del paràmetre arc, dona un vector unitari:*

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1.$$

Demostració. En efecte, només cal aplicar la regla de la cadena

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

i tenir en compte que, com es dedueix de la definició del paràmetre arc,

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

■

Exemple 14. El vector tangent a l'hèlix de l'Exemple 13

$$\vec{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + k^2}} \left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, k \right)$$

Comprovem que es satisfà la Proposició 1.6 calculant el mòdul,

$$\|\vec{r}'(s)\| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + k^2}} \sqrt{\left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}} \right)^2 + \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}} \right)^2 + k^2} = 1$$

Observació 4. En cas de tenir la corba parametritzada per l'arc, la Proposició 1.6 ens permet calcular el vector tangent

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

sense més que calcular la primera derivada.

Donat que el vector tangent és de mòdul constant, l'única variació que experimenta al recórrer la corba ho és en la seva direcció. Per tant, la derivada de $\vec{t}$ respecte del paràmetre arc s ens ha de donar la magnitud d'aquesta variació de direcció, la qual cosa ens porta a la següent definició:

Definició 1.7 (Curvatura. Radi de curvatura). Anomenarem **vector curvatura** $\vec{k}$ d'una corba $\vec{r}(s)$ en un punt, a la derivada del vector tangent respecte al paràmetre arc en aquest punt.

$$\vec{k}(s) = \vec{t}'(s) = \frac{d\vec{t}}{ds}$$

Anomenarem **curvatura** κ d'una corba $\vec{r}(s)$ en un punt, al mòdul del vector curvatura en aquest punt.

$$|\kappa(s)| = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| \text{ (Curvatura sense signe)}$$

Anomenarem **radi de curvatura** a la inversa de la curvatura.

Exemple 15. Curvatura de la circumferència *Les equacions de la circumferència*

$$\vec{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

parametritzada per l'arc, són

$$\vec{\alpha}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right).$$

El vector tangent és

$$\vec{t}(s) = \vec{\alpha}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right)$$

i la seva derivada

$$\vec{t}'(s) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right).$$

La curvatura és, per tant

$$\kappa(s) = \left\| \vec{t}'(s) \right\| = \frac{1}{R}$$

constant en tots els punts i el radi de curvatura és precisament R .

Observació 5. Donada una corba amb curvatura κ en un punt P , el cercle tangent a la corba en P i de radi $\frac{1}{\kappa}$ (fig. 1.23), té la mateixa curvatura κ en P i rep el nom de cercle osculador de la corba en aquest punt.

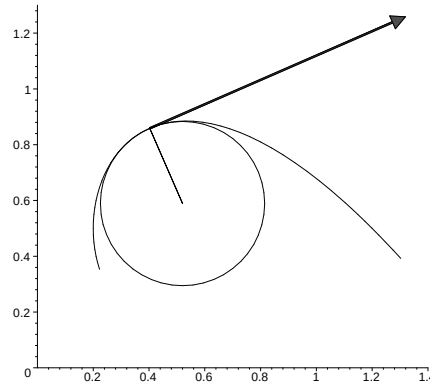


Figura 1.23: Radi de curvatura, cercle osculador i vector tangent

Proposició 1.8. El vector curvatura $\vec{t}'(s)$ és perpendicular al vector tangent $\vec{t}(s)$.

Demostració. De fet, és una propietat comuna a tot vector de mòdul constant, com es dedueix a continuació:

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 \Rightarrow (\vec{t} \cdot \vec{t})' = 0$$

però

$$(\vec{t} \cdot \vec{t})' = \vec{t}' \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \vec{t}' = 2\vec{t} \cdot \vec{t}' = 0 \Rightarrow \vec{t} \perp \vec{t}'$$

■

Definició 1.9 (Vector normal). Anomenarem **vector normal** i el denotarem per $\vec{n}$, al vector unitari en la direcció del vector curvatura. Per tant, podem escriure

$$\vec{k}(s) = \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\vec{n}(s)$$

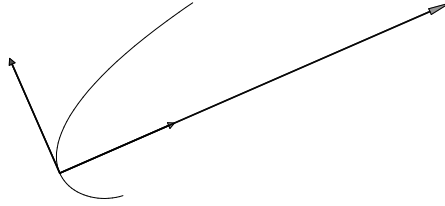


Figura 1.24: Vector curvatura, vector normal i vector tangent.

Definició 1.10 (Pla osculador. Vector binormal). Anomenarem **pla osculador** d'una corba en un punt $\vec{\alpha}(s_0)$ al pla determinat per $\vec{\alpha}(s_0)$ i els vectors $\vec{n}(s_0)$ i $\vec{t}(s_0)$ en aquest punt.

Anomenarem **vector binormal** i el denotarem per $\vec{b}$, al vector unitari en la direcció perpendicular al pla osculador. Per tant, podem escriure

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)$$

Els tres vectors $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ reben el nom de **triedre intrnsec** o **triedre de Frenet** de la corba en el punt corresponent.

Observació 6. Una corba plana és la que està continguda en un pla i aquest és el pla osculador. Per tant, en aquest cas, el vector binormal és constant en tots els seus punts.

1.4.2 Corbes no parametritzades per l'arc

Si la corba no està parametritzada per l'arc, es poden calcular les derivades respecte s d'una funció $\phi(t)$ aplicant la regla de la cadena:

$$\frac{d\phi(t)}{ds} = \frac{d\phi(t)}{dt} \frac{dt}{ds}$$

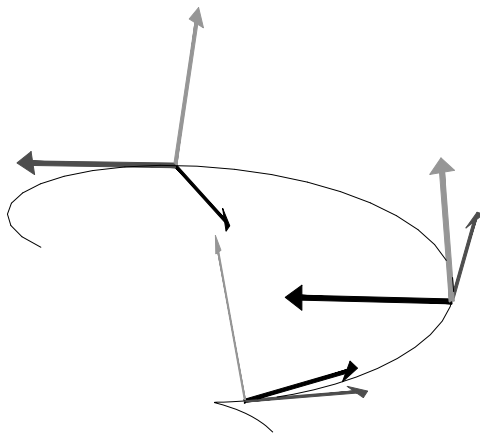


Figura 1.25: Triedre de Frenet

i tenint en compte que

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

A més, també es demostra que

$$\vec{r}''(t) = \frac{d\|\vec{r}'(t)\|}{dt} \vec{t}(t) + \kappa \|\vec{r}'(t)\|^2 \vec{n}(t)$$

Per tant, $\vec{r}''(t)$ pertany al pla osculador en el punt $\vec{r}(t)$ (fig. 1.27).

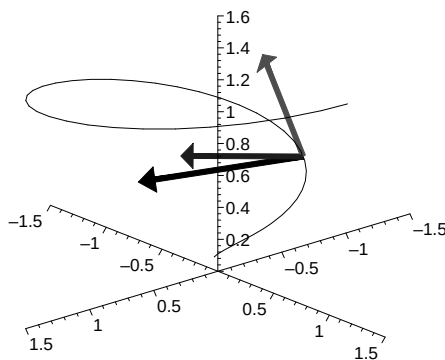


Figura 1.26: Vector derivada segona.

Així doncs, la direcció del pla osculador queda determinada per les dues primeres derivades $\vec{r}'(t)$ i $\vec{r}''(t)$ i la direcció del vector binormal $\vec{b}$ es pot calcular fent $\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)$.

A més, $\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \wedge \vec{t}(t)$.

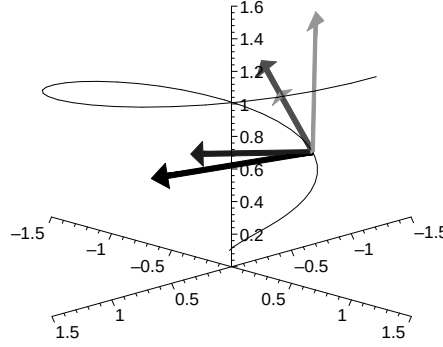


Figura 1.27: Vector binormal.

Quan el paràmetre t és el temps, $\vec{r}'(t)$ és l'acceleració $\vec{a}(t)$ i $\|\vec{r}'(t)\|$ és el mòdul de la velocitat, denotem-lo $v(t)$. Amb aquesta notació, l'anterior resultat s'escriu

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{t}(t) + \frac{v^2}{R} \vec{n}(t)$$

on R és el radi de curvatura. Per la Cinemàtica sabem que l'acceleració té dues components: l'acceleració tangencial $\frac{dv}{dt}$ (en la direcció del vector tangent $\vec{t}(t)$) deguda a la variació del mòdul de la velocitat i l'acceleració centrípeta $\frac{v^2}{R}$ (en la direcció del vector normal $\vec{n}(t)$) deguda a la variació de la direcció de la velocitat.

Multiplicant vectorialment per $\vec{r}'(t)$, es dedueix que es pot calcular la curvatura amb la fórmula

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Exemple 16. Càlcul del triedre intrínsec o de Frénet de la corba parametritzada per

$$r(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t, \sin t)$$

Calculem $r'(t), r''(t)$

$$r'(t) = (-2 \cos t \sin t, -\sin^2 t + \cos^2 t, \cos t) = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

$$r''(t) = (-2 \cos 2t, -2 \sin 2t, -\sin t)$$

El vector tangent

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} (-\sin 2t, -\cos 2t, \cos t)$$

El vector binormal

$$r'(t) \wedge r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 \sin 2t & \cos 2t & \cos t \\ -2 \cos 2t & -2 \sin 2t & -\sin t \end{vmatrix} = ((2 \cos^2 t + 1) \sin t, -2 \cos^3 t, 2)$$

$$\vec{b}(t) = \frac{r'(t) \wedge r''(t)}{\|r'(t) \wedge r''(t)\|} = \frac{((2 \cos^2 t + 1) \sin t, -2 \cos^3 t, 2)}{\sqrt{5 + 3 \cos^2 t}}$$

El vector normal

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \wedge \vec{t}(t) = \frac{(-2(\cos^4 t + 2 \cos^2 t - 1), -\sin t \cos t(5 + 2 \cos^2 t), \sin t)}{\sqrt{5 + 3 \cos^2 t} \sqrt{1 + \cos^2 t}}$$

I la curvatura

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{3 \cos^2 t + 5}}{(\cos^2 t + 1)^{3/2}}$$

1.5 Curvatura d'una corba d' $\mathbb{R}^2$

1.5.1 Curvatura d'una corba plana parametritzada

Si una corba plana està parametritzada per $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, sempre es pot considerar com una corba a $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$ i aplicar els resultats que acabem d'obtenir. En particular, calculant la curvatura $\kappa(t)$ amb aquest vector, s'obté:

$$|\kappa(t)| = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Exemple 17. Curvatura de la catenària La catenària és la corba que descriu un cable de densitat uniforme quan es penja dels seus extrems (fig. 1.28).

La seva equació és

$$y = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} = a \cosh \frac{x}{a}$$

i les seves dues primeres derivades són $y'(x) = \sinh \frac{x}{a}$ i $y''(x) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$. Aplicant la fórmula que hem donat per a la curvatura d'una funció i tenint en compte que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, obtindrem que la curvatura de la catenària ve donada per

$$\kappa(x) = \frac{1}{a \cosh^2 \frac{x}{a}}.$$

Observeu que, segons aquest resultat, la curvatura és màxima en el vèrtex corresponent a $x = 0$ i tendeix a 0 a mida que x augmenta en valor absolut.

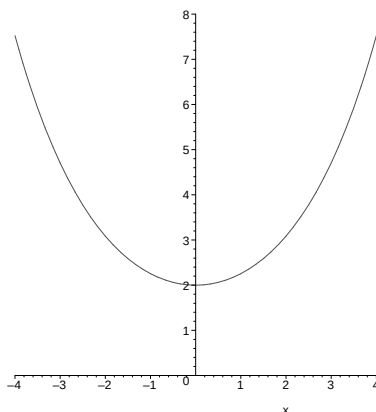


Figura 1.28: Catenària $y = 2 \cosh \frac{x}{2}$.

1.5.2 Curvatura d'una funció

Una funció $y = f(x)$ sempre es pot considerar com una corba plana parametritzada per $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$. Per tant, l'anterior expressió de la curvatura queda:

$$|\kappa(x)| = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Observació 7. Si el pendent $y'(x)$ és petit, aleshores es pot prendre $|\kappa(x)| = |y''(x)|$.

1.5.3 La curvatura com a variació de l'angle de contingència

Definició 1.11 (Angle de contingència). *L'angle de contingència d'una corba en un punt, també anomenat angle de rotació del vector tangent, és l'angle que forma el vector tangent a la corba en el punt amb l'horitzontal.*

Estudiarem la relació que hi ha entre el paràmetre arc s i el paràmetre angle de contingència (fig. 1.29).

El vector tangent es pot escriure $\vec{t} = (x'(s), y'(s))$ i també $\vec{t} = (\cos \tau(s), \sin \tau(s))$. La curvatura és, per tant, la derivada de l'angle de contingència respecte el paràmetre arc:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\vec{t}}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \right\| = \|(-\sin \tau(s), \cos \tau(s))\| \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{ds}$$

Exemple 18. La clotoide

La clotoide es defineix com la corba tal que la seva curvatura $\kappa(s)$ és proporcional al paràmetre arc s , és a dir $\kappa(s) = as$. Per tant, és una bona corba d'enllaç entre trams de recta (curvatura constant $\kappa = 0$) i trams de circumferència (curvatura constant $\kappa = \frac{1}{R}$).

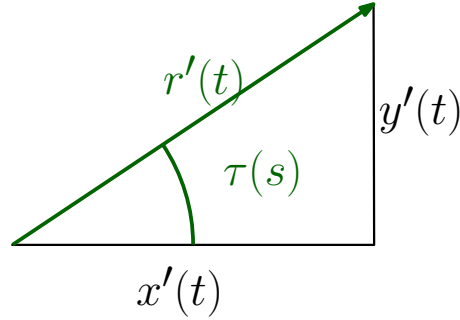


Figura 1.29: Angle de contingència $\tau(s)$.

Segons la interpretació de la curvatura com a variació de l'angle de contingència, la relació $\kappa(s) = as$ que defineix la clotoide es pot escriure

$$as = \frac{d\tau}{ds} \Rightarrow d\tau = as ds$$

que, com veurem en un capítol posterior, és una equació diferencial amb variables separades. Integrant i imposant la condició $\tau = 0$ per a $s = 0$, obtenim:

$$\tau(s) = a \frac{s^2}{2}.$$

Ara, per trobar les equacions paramètriques de la clotoide només cal tenir en compte que

$$\mathbf{t} = (x'(s), y'(s)) = \left(\cos a \frac{s^2}{2}, \sin a \frac{s^2}{2} \right)$$

i integrar:

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos a \frac{t^2}{2} dt \\ y(s) &= \int_0^s \sin a \frac{t^2}{2} dt \end{aligned}$$

que són les equacions paramètriques de la clotoide definides per integrals. Si representem gràficament les dues funcions $\cos\left(a \frac{s^2}{2}\right)$ i $\int_0^s \cos\left(a \frac{t^2}{2}\right) dt$ (fig. 1.30), podrem comprendre l'evolució de la coordenada x dels punts de la corba, i el mateix podríem fer amb la coordenada y .

La representació gràfica de la corba donada per aquestes integrals, amb $a = 2$ i fins a $s = 3$, es veu en la figura 1.31

I la dependència respecte del paràmetre a es pot veure en la figura 1.32 per a $a = 0.5, 1$ i 2 i fins a $s = 1.5$

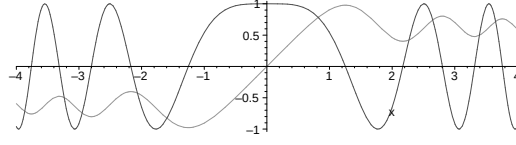


Figura 1.30: Funcions $\cos\left(a\frac{s^2}{2}\right)$ i $\int_0^s \cos\left(a\frac{t^2}{2}\right) dt$.

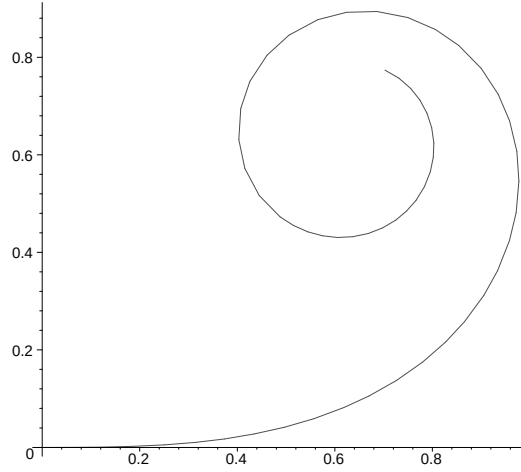


Figura 1.31: Clotoide per $a = 2$ i fins a $s = 3$.

A la pràctica, no s'utilitzen les equacions de la clotoide donades per integrals sinó els seus desenvolupaments en sèrie. Fent el desenvolupament de $\cos a\frac{t^2}{2}$ i $\sin a\frac{t^2}{2}$ i integrant, s'obtenen les series

$$x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-2}}{(2n-2)!} \frac{s^{4n-3}}{4n-3} = s - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 s^5}{2! \cdot 5} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4 s^9}{4! \cdot 9} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^6 s^{13}}{6! \cdot 13} + \dots$$

$$y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{s^{4n-1}}{4n-1} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right) s^3}{1! \cdot 3} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3 s^7}{3! \cdot 7} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^5 s^{11}}{5! \cdot 11} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^7 s^{15}}{7! \cdot 15} + \dots$$

En la figura 1.33 es comparen les corbes donades per les integrals amb les aproximacions per als 3 i 4 primers termes de les sèries.

El "zoom" ens permet veure millor fins a quin punt l'aproximació és correcta (fig. 1.34).

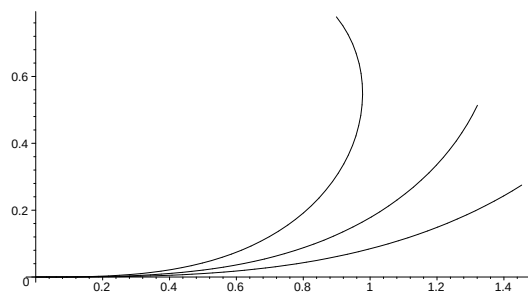


Figura 1.32: Clotoide per a $a = 0.5, 1$ i 2 i fins a $s = 1.5$.

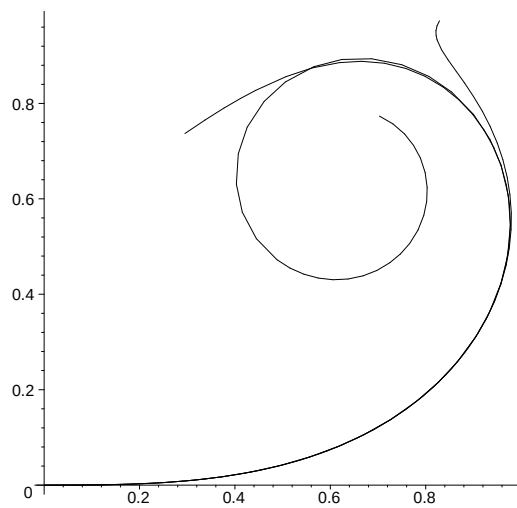


Figura 1.33: Clotoide. Aproximacions per polinomis de 3 i 4 termes.

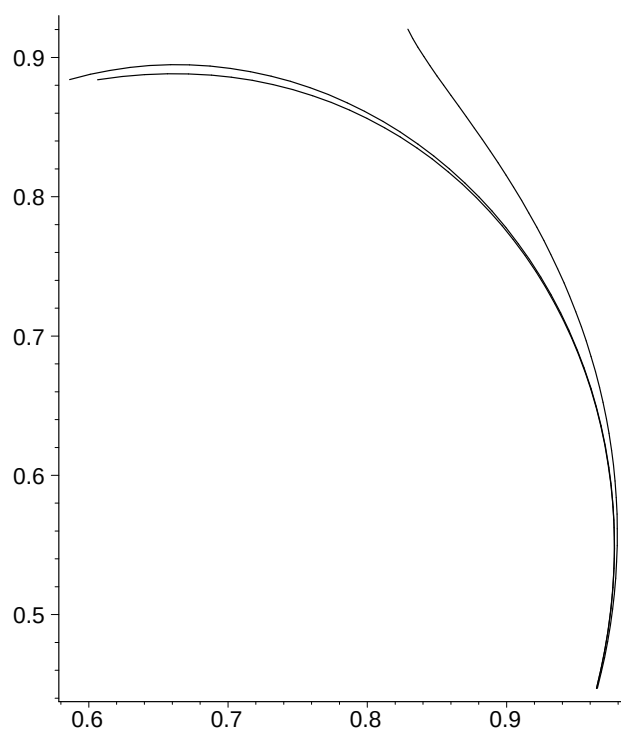


Figura 1.34: Clotoide. Efecte del “zoom”.

1.6 Exercicis

1. Trobeu les interseccions amb els eixos de la corba $\alpha(t) = \left(t^2 - 4, \frac{t+1}{t-1}\right)$
2. Trobeu les interseccions amb els eixos de la corba $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2+4}{t^2-4}\right)$
3. Trobeu les asímptotes de la corba de l'exercici 1
4. Trobeu totes les asímptotes de la corba

$$r(t) = \left(\frac{t^2+4}{t^2-4}, \frac{2t}{t^2+4}\right)$$

5. Trobeu totes les asímptotes de la corba $r(t) = \left(\frac{t^3+5}{(t-3)^2}, \frac{1-3t^2}{t+1}\right)$
6. Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t)$ en l'origen de coordenades i en el punt $t = \frac{\pi}{4}$.
7. Feu l'estudi complet de cadascuna de les corbes següents i representeu-les gràficament. Compareu la vostra representació amb l'obtinguda fent servir un programa de càlcul simbòlic.

i) $x(t) = t^2$; $y(t) = \frac{t+1}{t-1}$

ii) $x(t) = \frac{2t}{t^2+1}$; $y(t) = \frac{t^2+4}{t^2-4}$

iii) $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$; $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ²

iv) $x(t) = \frac{at^2}{1+t^2}$; $y(t) = \frac{at^3}{1+t^2}$ ³.

v) $x(t) = a(t - \sin t)$; $y(t) = a(1 - \cos t)$ ⁴.

vi) $x(t) = a \cos^3 t$; $y(t) = a \sin^3 t$ ⁵.

vii) $x(t) = \frac{-3t^2}{t^3-1}$; $y(t) = \frac{4t^3}{t^3-1}$

viii) $x(t) = \frac{t}{1-t}$; $y(t) = \frac{1+t^2}{t^2}$

²Per $a = 2$ és el *Folium de Descartes*.

³Quan $a = 3$ és la corba que s'anomena *Cisoide de Diocles*

⁴Quan $a = 2$ és la corba que s'anomena *Cicloide*

⁵Quan $a = 2$ és la corba que s'anomena *Astroide*

I en coordenades polars

- ix) Cardioide: $\rho = 2(1 + \cos(\alpha))$
 - x) Rosa de 3 pètals: $\rho = 2 \sin(3\alpha)$
 - xi) Espiral d'Arquímedes: $\rho = 2\alpha$
 - xii) Espiral hiperbòlica: $\rho = \frac{2}{\alpha}$
 - xiii) Cargol de Pascal: $\rho = 2 + 3 \cos(\alpha)$
 - xiv) Cargol de Pascal: $\rho = 3 + 2 \cos(\alpha)$
8. Proveu que la corba definida a l'exercici 7iv, es pot definir també mitjançant l'equació $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.
9. Proveu que la corba definida a l'exercici 7iii, es pot definir també mitjançant l'equació $x^3 + y^3 + 3axy = 0$.
10. Proveu que la corba definida a l'exercici 7vi, es pot definir també mitjançant l'equació $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
11. Doneu una parametrització de l'el·lipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} = 1$. Trobeu el vector tangent $\vec{t}$, el vector normal $\vec{n}$ i la curvatura $\kappa(t)$ en un punt qualsevol.
12. Calculeu la curvatura de la corba donada per la funció $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ en el punt $x = 1$.
13. Calculeu la longitud de l'arc de corba $r(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$ per $t \in [0, 2\pi]$
14. Trobeu per a quin valors de t la corba $\alpha(t) = (t^2 - 2t, \ln(1 + t^2))$ té
- (a) tangent vertical
 - (b) tangent horitzontal
15. Considereu l'hèlix d'equacions $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = kt$
- a) Demostreu que està situada sobre un cilindre circular d'eix de simetria a l'eix de coordenades OZ .
 - b) Demostreu que els vectors tangent i binormal formen un angle constant amb l'eix OZ .
 - c) Comproveu que la curvatura és constant a tots els seus punts i val $\kappa = \frac{a}{a^2 + k^2}$.
- A la vista d'aquest resultat, quin és el significat dels paràmetres a i k en relació a la curvatura d'aquesta corba?

- d) Comproveu que el pla osculador és diferent a cada punt, la qual cosa prova que la corba no és plana.

16. Donada la corba d'equacions paramètriques

$$x(t) = \cos^2 t; \quad y(t) = \sin t \cos t; \quad z(t) = \sin t,$$

calculeu els vectors tangent, normal i binormal en el punt corresponent a $t = \frac{\pi}{4}$. Calculeu, a més, la curvatura en aquest punt.

17. Demostreu que la corba d'equacions paramètriques

$$x(t) = a \sin^2 t; \quad y(t) = a \sin t \cos t; \quad z(t) = a \cos t,$$

està situada sobre una superfície esfèrica centrada a l'origen de coordenades i que tots els seus plans normals (perpendiculars a $\mathbf{t}$) passen per aquest punt.

18. Donada la corba

$$\alpha(t) = (t - e^t, e^t, t)$$

- i) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba en $t_0 = 4$
 - ii) Per a quin valor de t , si existeix, la recta tangent a la corba és paral·lela a l'eix Y ?
 - iii) Trobeu el vector tangent, la normal, i la curvatura en un punt qualsevol.
19. Demostreu que les corbes següents són planes i doneu, en cada cas, l'equació del pla que les conté.

i) $x(t) = 3t^3 + 2t; \quad y(t) = 2t^4 + t^3 + 2; \quad z(t) = t^4 - t^3 - t + 3$

ii) $x(t) = t; \quad y(t) = \frac{1+t}{t}; \quad z(t) = \frac{1-t^2}{t}$

20. Calculeu el radi de curvatura, en un punt arbitrari, de cadascuna de les corbes

$$x^2 = 2ay; \quad x^3 = 3a^2y; \quad 2xy = a^2.$$

21. Donada la circumferència parametritzada per $r(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, comproveu que el pla osculador és el mateix per a tots els punts i és el pla que conté la corba.
22. Comproveu que el radi de curvatura de la paràbola $y = \frac{1}{2p}x^2$ en el vèrtex, és igual a la distància p del seu focus a la seva directriu.

Capítol 2

Superfícies

2.1 Introducció

Les ciències cartogràfiques tracten, d'una manera o altra, la representació del terreny. En una primera aproximació, el terreny es representa per una superfície tridimensional que l'aproxima. En l'estudi dels camps escalars, hem vist com una funció real de dues variables representa un tipus particular de superfícies, que no es poden doblegar sobre elles mateixes. Una esfera o un el·lipsoide, per posar dos exemples amb els que s'acostuma a representar la superfície de la terra, no es poden representar, globalment, mitjançant un camp escalar. Les funcions vectorials de dues variables representen superfícies. Aquesta és la forma més general de fer-ho i en aquest capítol veurem com la diferenciabilitat d'aquests camps vectorials ens permetrà estudiar les seves característiques i les de les corbes traçades sobre superfícies. D'altra banda, quan estem situats sobre una superfície tendim a considerar-la localment plana, encara que sigui només en un petit entorn del punt on som. Podem pensar, intuïtivament, que el pla tangent a la superfície en el punt en qüestió és una bona representació plana d'aquesta.

Però una de les parts bàsiques de les ciències cartogràfiques tracta, precisament, de la representació d'una superfície en una altra. En particular, les projeccions cartogràfiques tracten de les diferents maneres de representar la superfície esfèrica i l'el·lipsoide de revolució en el pla. Pensem, per exemple, en la projecció ortogonal de tots els punts de l'esfera sobre el cilindre tangent a l'equador.

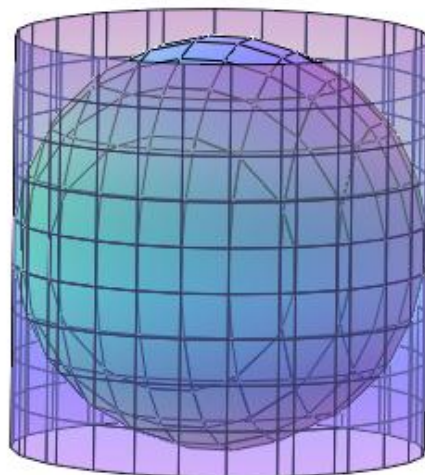


Figura 2.1: Cilindre tangent a una esfera

Si desenvolupem el cilindre tallant per una recta en la direcció de l'eix, tots els paral·lels de l'esfera es projectaran en el mateix segment de longitud $2\pi R$. Com serà la distorsió de formes que patirà una certa regió de l'esfera en la projecció? Haurem de considerar els dos conceptes mètrics bàsics: distàncies i angles. La distància entre dos punts de l'equador es conserva en aquesta projecció, però la distància entre dos punts de qualsevol altre paral·lel patirà una distorsió que augmentarà al acostar-nos als pols. Quedarà afectat, en la

projecció sobre el cilindre, l'angle entre dues corbes que es tallen en l'esfera? Ens fem les següents preguntes:

- Quina és la forma més general i/o útil de representar una superfície?
- Com es poden definir i calcular característiques geomètriques de les superfícies?
- Quin és el pla que millor aproxima la superfície localment?
- Com es defineix matemàticament i com es calcula aquest pla ?
- Com podem representar una corba de $\mathbb{R}^3$ que està situada sobre una superfície?
- Els vectors tangents a les corbes sobre la superfície que passen per un punt, són també vectors del pla tangent a la superfície en aquest punt?
- Com podem calcular distàncies i angles sobre la superfície?

2.2 Superfícies

2.2.1 Gràfica d'un camp escalar. Superfície en forma explícita

De la mateixa manera que en el cas de funcions d'una variable, la gràfica d'una funció de dues variables pot ajudar a comprendre el comportament de la funció.

La gràfica dels camps escalars de $\mathbb{R}^2$ està formada pels punts $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vegeu Fig. 2.2, tals que $z = f(x, y)$ i el que obtenim és una **superfície** S que diem **definida en forma explícita** per $z = f(x, y)$,

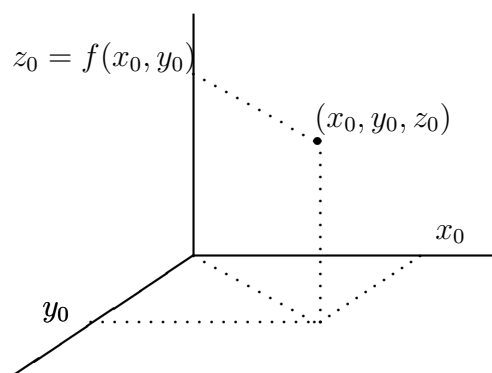


Figura 2.2: Representació gràfica $z = f(x, y)$

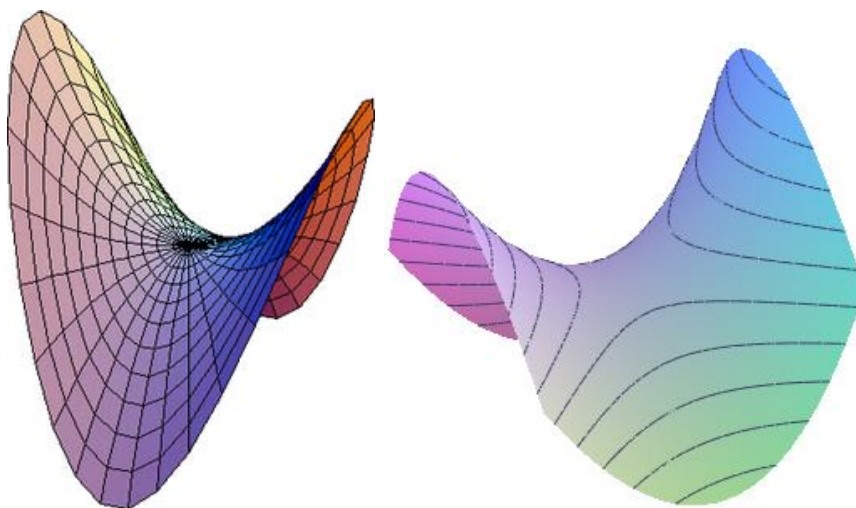


Figura 2.3: Gràfiques del paraboloid hiperbòlic $z = x^2 - y^2$

Una altra manera de representar un camp escalar és projectant sobre el pla x,y les seccions amb plans $z = \text{constant}$. Al fer la intersecció de la superfície amb un pla de la forma

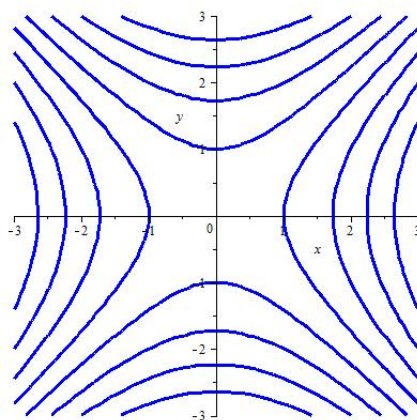


Figura 2.4: Corbes de nivell del paraboloid hiperbòlic $z = x^2 - y^2$

$z = k$, obtenim una corba $f(x, y) = k$ que es pot representar en el pla XY , i que en diem corba de nivell, vegeu la definició a la pàgina 50. Per exemple, en un mapa meteorològic, si z és la pressió en el punt (x, y) , les corbes de nivell uneixen punts que tenen la mateixa pressió, és a dir són les *isòbares*. Si z és la temperatura en el punt (x, y) , les corbes de nivell uneixen punts d'igual temperatura, llavors se'n diuen *isotermes*. En els mapes topogràfics, on z és l'altura en el punt (x, y) , les corbes de nivell de la funció $z = f(x, y)$ uneixen punts de la mateixa altura sobre el nivell del mar. Si els valors de k estan igualment espaiats, quin significat té que les corbes de nivell estiguin molt juntes? I que estiguin separades? Observeu Fig. 2.5



Figura 2.5: Mapa amb corbes de nivell

Definició 2.1 (Superfície parametritzada). Una **superfície diferenciable de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per ϕ** és el conjunt imatge d'una funció diferenciable

$$\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, és a dir, el conjunt de punts (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ amb $(x, y, z) = \phi(u, v)$ per a $(u, v) \in \mathcal{U}$. A la funció $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se'n diu una **parametrització** de la superfície, i es diu que la superfície està definida de forma paramètrica per ϕ .

Observació 8. D'ara endavant direm simplement **superfície** per referir-nos a una superfície diferenciable.

Definició 2.2 (Corba sobre una superfície). Sigui $\mathcal{S}$ una superfície de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per ϕ . La funció diferenciable $f : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, amb $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ defineix una **corba $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{S}$** , la parametritzada per

$$\phi \circ f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

D'entre totes les corbes sobre una superfície, són especialment rellevants les anomenades corbes coordenades a una superfície en un punt, que resulten de mantenir fixa una de les dues variables i deixar variar l'altre lliurement, tal com es defineixen a continuació.

Definició 2.3 (Corbes coordenades). Sigui $P = \phi(u_0, v_0)$ un punt de $\mathcal{S}$, suposem els intervals $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ amb $u_0 \in I_1, v_0 \in I_2$. Anomenarem **primera corba coordinada** de la

superfície $\mathcal{S}$ en el punt P a la corba definida per $r_1(t) = \phi(t, v_0)$, $t \in I_1$ i **segona corba coordinada** de la superfície $\mathcal{S}$ en el punt P a la definida per $r_2(t) = \phi(u_0, t)$, $t \in I_2$.

Definició 2.4 (Punt regular). *Sigui $\mathcal{S}$ una superfície de $\mathbb{R}^3$, parametritzada per ϕ . $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Un punt $P = \phi(u_0, v_0)$ de $\mathcal{S}$ és **regular** si la matriu de la diferencial de ϕ en el punt (u_0, v_0) , $d\phi_{(u_0, v_0)}$, té rang 2.*

$$d\phi_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

És a dir, els dos vectors columna no són proporcionals. És habitual anomenar $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ a les columnes de la matriu de $d\phi$.

2.3 Pla tangent i recta normal

2.3.1 Superfícies parametritzades

Definició 2.5 (Pla tangent). *Sigui $\mathcal{S}$ una superfície de $\mathbb{R}^3$, parametritzada per ϕ i $P = \phi(u_0, v_0)$ un punt regular de $\mathcal{S}$. El **pla tangent** a $\mathcal{S}$ en P és el pla que passa per P i té vectors directores*

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

és a dir, al pla $P + \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle$.

Observació 9. *Els vectors $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ i $\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ són els vectors tangents a la primera i segona corba coordinada de $\mathcal{S}$ en P .*

La proposició següent justifica la definició donada d'aquest pla tangent.

Proposició 2.6. *Sigui $\mathcal{S}$ una superfície de $\mathbb{R}^3$, parametritzada per $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ una corba sobre $\mathcal{S}$ definida per $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ i sigui $P = (\phi \circ f)(t_0)$ un punt de $\mathcal{C}$. Aleshores el vector tangent a $\mathcal{C}$ en P pertany al pla director del pla tangent a $\mathcal{S}$ en P i té coordenades $(u'(t_0), v'(t_0))$ en la base*

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(f(t_0)), \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(t_0)) \right).$$

Per la regla de la cadena:

$$d(\phi \circ f)_{(t_0)} = d\phi_{(f(t_0))} df_{(t_0)} = u'(t_0) \frac{\partial \phi}{\partial u}(f(t_0)) + v'(t_0) \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(t_0))$$

és combinació lineal de dos vectors directores del pla tangent a $\mathcal{S}$ en P , amb coeficients $u'(t_0), v'(t_0)$. Si P és regular $\frac{\partial \phi}{\partial u}(f(t_0)), \frac{\partial \phi}{\partial v}(f(t_0))$ és una base del pla tangent a $\mathcal{S}$ en P .

Exemple 19. Calculeu l'equació del pla tangent a la superfície d'equacions paramètriques:

$$x = \cos u - v \sin u$$

$$y = \sin u + v \cos u$$

$$z = v$$

és a dir, definida per $\phi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)$ en el punt $P = \phi(\frac{\pi}{4}, 1)$.

Comproveu que es tracta de l'hiperboloide d'un full d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Els vectors directores del pla tangent són

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) &= (-\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u, 0)_{\left(\frac{\pi}{4}, 1 \right)} = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = -\sqrt{2}(1, 0, 0), \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) &= (-\sin u, \cos u, 1)_{\left(\frac{\pi}{4}, 1 \right)} = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2). \end{aligned}$$

El punt de tangència és $P = \phi\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = (0, \sqrt{2}, 1)$.

L'equació paramètrica del pla tangent és:

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = \lambda - \sqrt{2}\mu \\ y - \sqrt{2} = \sqrt{2}\mu \\ z - 1 = 2\mu \end{cases}$$

I l'equació implícita del pla tangent $-2y + \sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0$.

Definició 2.7 (Vector normal). El **vector normal** a la superfície $\mathcal{S}$ en el punt $P = \phi(u_0, v_0)$ és el vector

$$N_P = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)_{(u_0, v_0)}$$

Exemple 20. Per la superfície de l'exemple anterior, el vector normal en $(0, \sqrt{2}, 1)$ és:

$$N = (1, 0, 0) \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) = (0, -2, \sqrt{2}).$$

A continuació es dedueix com calcular el pla tangent a superfícies definides en forma explícita i implícita.

2.3.2 Superfícies donades en forma explícita

Proposició 2.8. *Sigui*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow z = f(x, y) \end{aligned}$$

diferenciable. Aleshores, prenent x, y com a paràmetres,

$$\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in \mathcal{U}\}$$

és una superfície diferenciable els punts de la qual són tots regulars. El vector normal en $(a, b, f(a, b))$ és

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right) \quad (2.1)$$

Es diu que la superfície està definida de forma explícita per $z = f(x, y)$.

Demostració. Sigui $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. ϕ és diferenciable i es té $\frac{\partial \phi}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$. Per tant $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in \mathcal{U}\}$ és una superfície diferenciable. A més, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ són vectors independents, per tant, tots els punts de la superfície són regulars i el vector normal és

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

■

Exemple 21. *Pla tangent a la superfície $z = x^3 - 3xy - y^2$ en el punt $(1, -1, 3)$. El vector normal és $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)_{(1, -1, 3)} = (-2x^2 + 3y, 3x + 2y, 1)_{(1, -1, 3)} = (-6, 1, 1)$. I l'equació implícita del pla tangent és*

$$-6x + y + z + 4 = 0$$

Definició 2.9 (Corbes de nivell). *Sigui $\mathcal{S}$ una superfície definida en forma explícita per $z = f(x, y)$. S'anomenen **corbes de nivell** de $\mathcal{S}$ a les corbes planes d'equació $f(x, y) = k$, on $k \in \mathbb{R}$. Les corbes de nivell de $\mathcal{S}$ són les projeccions sobre el pla xy de les corbes intersecció de $\mathcal{S}$ amb plans d'equació $z = k$, (paral·lels al pla xy). Pot representar-se $\mathcal{S}$ mitjançant les corbes de nivell i seccions per plans paral·lels a l'eix z .*

Exemple 22. *Les corbes de nivell del paraboloide $z = x^2 + y^2$ són circumferències. Les corbes de nivell del paraboloide hiperbòlic de la figura 2.3 són hipèrboles.*

2.3.3 Superfícies donades en forma implícita

Donada una funció

$$\begin{aligned} g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\rightarrow g(x, y, z) \end{aligned}$$

diferenciable, l'equació $g(x, y, z) = 0$ defineix una superfície com el lloc geomètric de tots els punts que satisfan l'equació. Si $g'_z \neq 0$ en un punt, aleshores, en un entorn d'aquest punt, l'equació $g(x, y, z) = 0$ defineix implícitament z com a funció de x i de y i la superfície es pot parametritzar per

$$\{(x, y, z(x, y)) | (x, y, z) \in \mathcal{U}\}$$

Derivant implícitament i multiplicant per g'_z , l'expressió 2.1 del vector normal queda

$$N = \nabla g = (g'_x, g'_y, g'_z)$$

Exemple 23. Calculeu el pla tangent a la superfície definida en forma implícita per l'equació $x^3 + y^3 - 2xyz = 0$ en el punt $(1, 1, 1)$.

El vector normal és

$$N = (g'_x, g'_y, g'_z)_{(1,1,1)} = (3x^2 - 2yz, 3y^2 - 2xz, -2xy) = (1, 1, -2)$$

I l'equació del pla tangent és

$$(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0.$$

2.4 Parametrització d'algunes superfícies

La superfície esfèrica. Latitud i longitud

Considerem els paràmetres *latitud* φ i *longitud* λ que corresponen als angles de la figura 2.6

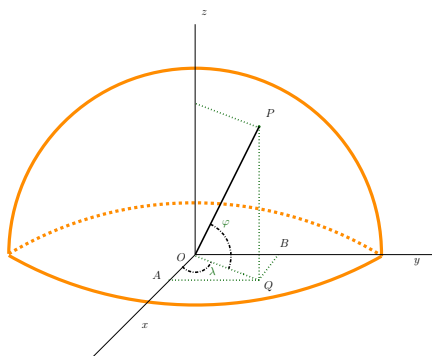


Figura 2.6: Superfície esfèrica de radi R i centre O

Considerem un punt $P(x, y, z)$ de la superfície esfèrica, per tant està a distància $R = OP$ de l'origen. Atès que el triangle OPQ és rectangle en Q ,

$$z = PQ = R \sin \varphi$$

i a més $OQ = R \cos \varphi$. Com que el triangle OAQ és rectangle en A ,

$$\begin{cases} \cos \lambda = \frac{OA}{OQ} = \frac{x}{R \cos \varphi} \\ \sin \lambda = \frac{AQ}{OQ} = \frac{y}{R \cos \varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \end{cases}$$

i obtenim la parametrizació de la superfície esfèrica en latitud φ i longitud λ

$$\phi(\varphi, \lambda) = (R \cos \varphi \cos \lambda, R \cos \varphi \sin \lambda, R \sin \varphi), \quad (2.2)$$

per $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\lambda \in [0, 2\pi)$.

Superfícies de revolució

Definició 2.10 (Superfície de revolució). *Una superfície de revolució és la superfície que s'obté en fer girar una corba plana respecte un eix*

La superfície de revolució que s'obté a partir de la rotació de la funció $y = f(x)$ respecte l'eix OX

$$\Phi(u, v) = (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v),$$

per $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$.

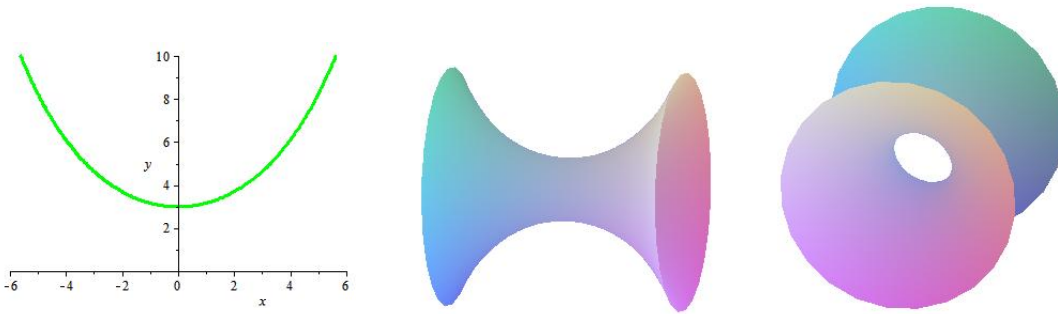


Figura 2.7: La catenoide com a superfície de revolució a partir de la catenària

Exemple 24 (La trompeta de Gabriel). *La trompeta o banya de Gabriel, figura 2.8, és la superfície de revolució que s'obté al fer girar la corba $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 10$ respecte l'eix OX . Una parametrització de la superfície és*

$$\phi(u, v) = \left(u, \frac{1}{u} \cos v, \frac{1}{u} \sin v \right), \quad 1 \leq u \leq 10, v \in [0, 2\pi].$$

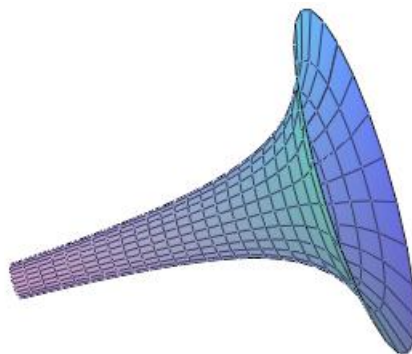


Figura 2.8: La superfície de revolució a partir de $f(x) = \frac{1}{x}$

2.5 Primera forma quadràtica fonamental

Sigui S una superfície de $\mathcal{R}^3$ parametritzada per la funció

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\longrightarrow \phi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sigui $P \in S$ un punt de la superfície i sigui $T_p(S)$ el pla tangent a S en P . Els vectors $w \in T_p(S) \subset \mathcal{R}^3$ del pla tangent a S en P són vectors de $\mathcal{R}^3$ i s'escriuen $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Però com a vectors tangents a una corba $r(t) = \phi(u(t), v(t))$ sobre la superfície, es poden escriure com a combinació lineal de la base $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$ de $T_p(S)$

$$w = r'(t) = u'(t) \frac{\partial \phi}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

Es tracta d'establir un producte escalar a l'espai $T_p(S)$, intrínsec a la superfície S , que ens permeti fer un tractament dels problemes mètrics en termes de les coordenades u' i v' dels vectors $w \in T_p(S)$ sense necessitat de recórrer al producte escalar de l'espai "ambient" $\mathcal{R}^3$.

2.5.1 Primera forma quadràtica fonamental

Definició 2.11 (Primera forma quadràtica fonamental). *La primera forma quadràtica fonamental de la superfície S en el punt P és una aplicació*

$$\begin{aligned} I_p : T_p(S) &\longrightarrow \mathcal{R} \\ w &\longrightarrow I_p(w) = w \cdot w = \|w\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

on $\cdot$ indica el producte escalar ordinari de $\mathcal{R}^3$.

La matriu de la primera forma fonamental en la base $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\}$ del pla tangent $T_p(S)$ s'escriu

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

on

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

Observació 10. Fent servir l'expressió de w en la base $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\}$ del pla tangent, el càlcul de $I_p(w)$ seria:

$$\begin{aligned} w \cdot w &= \left(u' \frac{\partial \phi}{\partial u} + v' \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \cdot \left(u' \frac{\partial \phi}{\partial u} + v' \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \\ &= u'^2 \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} + 2u'v' \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ &= u'^2 E + 2u'v' F + v'^2 G \\ &= (u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I expressant w en la base usual de l'espai ambient $\mathbb{R}^3$:

$$w \cdot w = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Evidentment, de les dues formes hem d'obtenir el mateix resultat.

Exemple 25. Primera forma fonamental de la superfície esfèrica

Donada la parametrització de la superfície esfèrica de radi R i centre a l'origen

$$\phi(\varphi, \lambda) = (R \cos \varphi \cos \lambda, R \cos \varphi \sin \lambda, R \sin \varphi),$$

la base del pla tangent en un punt qualsevol $P = \Phi(\varphi_0, \lambda_0)$, de la superfície és

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)_{\phi(\varphi_0, \lambda_0)} = (-R \sin \varphi_0 \cos \lambda_0, -R \sin \varphi_0 \sin \lambda_0, R \cos \varphi_0),$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right)_{\phi(\varphi_0, \lambda_0)} = (-R \cos \varphi_0 \sin \lambda_0, R \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, 0).$$

Calculant els coeficients de la primera forma quadràtica fonamental,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = R^2 \\ F &= \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \\ G &= \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = R^2 \cos^2 \varphi \\ IFQF &= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \varphi_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.5.2 Longitud d'un arc de corba sobre una superfície.

Sigui la corba $r(t) = \phi(u(t), v(t))$ sobre la superfície, corresponent a una parametrització $u(t), v(t)$. Sabem que la longitud de l'arc de corba entre els punts corresponents als valors t_0 i t del paràmetre, és

$$s(t) = \int_0^t \|r'(t)\| dt$$

que, utilitzant la norma del pla tangent, s'escriu

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt \quad (2.3)$$

Observació 11. De l'anterior expressió es dedueix

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

la qual cosa ens permet escriure el diferencial d'arc o element de línia de la corba $u(t), v(t)$, de la forma

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

i el diferencial d'arc al quadrat

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

que és una manera habitual de donar la primera forma quadràtica fonamental d'una superfície.

Els elements de línia sobre les corbes coordenades són

$$u = c, v = t \rightarrow u' = 0, v' = 1 \rightarrow ds_v = \sqrt{G}dv, \overrightarrow{ds}_v = \frac{\Phi'_v}{\|\Phi'_v\|} \sqrt{G}dv$$

$$u = t, v = c \rightarrow u' = 1, v' = 0 \rightarrow ds_u = \sqrt{E}du, \overrightarrow{ds}_u = \frac{\Phi'_u}{\|\Phi'_u\|} \sqrt{E}du$$

Exemple 26. Primera forma quadràtica fonamental de la superfície esfèrica.

Sovint s'expressa la primera forma quadràtica fonamental de la superfície esfèrica de la forma:

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Exemple 27. Longitud d'un meridià. Longitud d'un paral·lel

Donada la parametrització de la superfície esfèrica, (2.2), el meridià que passa pel punt $P = \phi(\varphi_0, \lambda_0)$, és la corba sobre la superfície que s'obté amb $\varphi = t, \lambda = \lambda_0$. Per tant, $\varphi' = 1, \lambda' = 0$, i la longitud del meridià serà

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E\varphi'^2 + 2F\varphi'\lambda' + G\lambda'^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2} dt = \pi R$$

Equivalentment, el paral·lel que passa pel punt $P = \phi(\varphi_0, \lambda_0)$, és la corba sobre la superfície que s'obté amb $\varphi = \varphi_0, \lambda = t$. En aquest cas, $\varphi' = 0, \lambda' = 1$, i la longitud del paral·lel és

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E\varphi'^2 + 2F\varphi'\lambda' + G\lambda'^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi_0} dt = 2\pi R \cos \varphi_0$$

2.5.3 Angle entre dues corbes sobre una superfície

Considerem dues corbes sobre la superfície $\mathcal{S}$ que està parametritzada per $\phi(u, v)$ i dues corbes $r_1(t) = \phi(u_1(t), v_1(t))$ i $r_2(t) = \phi(u_2(t), v_2(t))$ que es tallen en el punt $P = \phi(u_0, v_0)$ amb $u_0 = u_1(t_0) = u_2(t_0)$ i $v_0 = v_1(t_0) = v_2(t_0)$, aleshores es defineix l'angle que formen les corbes $r_1(t)$ i $r_2(t)$ com l'angle α que formen els respectius vectors tangents en aquest punt,

$$\cos \alpha = \frac{r'_1(t) \cdot r'_2(t)}{\|r'_1(t)\| \|r'_2(t)\|}$$

fent servir la primera forma quadràtica fonamental

$$\cos \alpha = \frac{(u'_1 \ v'_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(u'_1 \ v'_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}} \sqrt{(u'_2 \ v'_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix}}} \quad (2.4)$$

Exemple 28. *Angle entre les corbes coordenades. Si la corba $r_1(t)$, $r_2(t)$ són la primera corba i la segona corba coordinada respectivament en el punt $P = \phi(u_0, v_0)$, llavors $u_1 = 1, v_1 = 0, u_2 = 0, v_2 = 1$. Per tant, substituïnt a (2.4), l'angle α entre les corbes coordenades és*

$$\cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Això fa que sigui natural la següent definició:

Definició 2.12 (Parametrització ortogonal). *Una parametrització es diu que és ortogonal quan $F = 0$ per tots els punts i, per tant, les dues famílies de corbes coordenades són ortogonals entre sí.*

Exemple 29 (Parametrització ortogonal de la superfície esfèrica). *Hem vist que per a la parametrització de la superfície esfèrica (2.2), es compleix $F = 0$ en tots els punts, i per tant podem dir que és una parametrització ortogonal. Dit d'altra manera, per a qualsevol punt d'una superfície esfèrica hi passen un meridià i un paral·lel que formen un angle de 90 deg.*

Observació 12. *Si els coeficients de la primera forma quadràtica fonamental són $E = 1, F = 0, G = 1$ aleshores diem que la parametrització és ortonormal i, en aquest cas, la matriu de I_p és la identitat com correspon a la matriu de tot producte escalar en una base ortonormal. Hem vist que la parametrització habitual de la superfície esfèrica és ortogonal però no ortonormal.*

2.5.4 Àrea sobre una superfície

Donada una superfície parametritzada per $\phi(u, v)$ amb $(u, v) \in U$, es defineix l'àrea, A , de la porció de superfície corresponent a un domini $D \subset U$ dels paràmetres u, v , com la integral de l'element d'àrea sobre aquest domini

$$\begin{aligned}
dA &= \|\vec{ds_u} \wedge \vec{ds_v}\| = ds_u ds_v \sin \alpha = ds_u ds_v \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \\
dA &= \sqrt{EG} \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv \\
A &= \int \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Exemple 30 (Àrea d'un tor). *Un tor és una superfície de revolució que s'obté fent girar una circumferència respecte una recta exterior. Per exemple*

$$\phi(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u),$$

amb $u, v \in [0, 2\pi]$, és una parametrització del tor que s'obté al fer girar la circumferència en el pla XZ , de centre $(2, 0, 0)$ i radi 1 respecte l'eix OZ . Per calcular l'àrea d'aquesta superfície de revolució, trobem els vectors del pla tangent

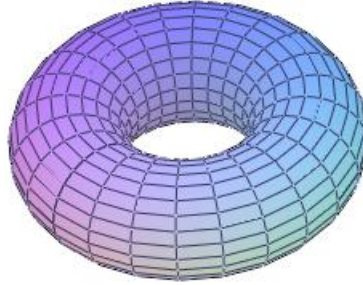


Figura 2.9: Tor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial u} &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\
\frac{\partial \phi}{\partial v} &= (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0),
\end{aligned}$$

i els coeficients de la primera forma quadràtica fonamental

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = (2 + \cos u)^2$$

Aplicant la fórmula (2.5),

$$A = \int \int_D \sqrt{(2 + \cos u)^2} du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 + \cos u)^2} du dv = \int_0^{2\pi} 4\pi dv = 8\pi^2.$$

2.6 Exercicis

1. Calculeu l'equació implícita del pla tangent a la superfície $x^2 + 3y^3 - z^2 = 1$ en els punts $P(x, y, z)$, tals que $x = z$.
2. Busqueu una parametrització de l'el·lipsoide de semieixos a, a, c pensat com a superfície de revolució al voltant de l'eix X .
3. Determineu els plans tangents a la superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en els punts $(x, y, 0)$. Proveu que són paral·lels al l'eix z .
4. Donat el cilindre parametritzat per $\Phi(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, $0 \leq u < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$, calculeu la longitud de la corba sobre el cilindre (hèlix) $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t)) = (R \cos t, R \sin t, 9t)$ per $0 \leq t \leq 2\pi$.
5. Considereu la superfície donada per la parametrització

$$\varphi(u, v) = \left(u, \frac{v}{k}, uv\right).$$

Demostreu que si prenem $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, aquesta superfície és el paraboloid hiperbòlic d'equacions $z = kxy$.

6. Busqueu una parametrització de la superfície de revolució obtinguda al fer girar la gràfica de $y = \pi/2 + \arctan x$ al voltant de l'eix OX .
7. Considereu la superfície donada per la parametrització

$$\Phi(u, v) = \left(u, \frac{v}{\sqrt{1+k^2u^2}}, \frac{kuv}{\sqrt{1+k^2u^2}}\right).$$

Demostreu que si prenem $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, aquesta superfície és el paraboloid hiperbòlic d'equació $z = kxy$.

8. Considereu la superfície donada per la parametrització

$$\Phi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v).$$

Demostreu que si prenem $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, aquesta superfície és l'hiperboloide de revolució $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

9. Trobeu la primera forma quadràtica fonamental de la superfície de revolució definida per la corba $r(v) = (f(v), h(v))$, $v \in I \subset \mathbb{R}$, girant al voltant de l'eix z , on f, g són funcions derivables a I .

10. Donada una corba de $\mathbb{R}^3$ $\alpha(t)$ i un vector $w(t)$ per a cada valor del paràmetre t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, es defineix una *superfície reglada* com el conjunt de totes les rectes que passen pel punt $\alpha(t)$ i que tenen vector director $w(t)$. A cadascuna de les rectes $L_t = \alpha(t) + v w(t)$ se'n diu una *generatriu* i a la corba $\alpha(t)$ se'n diu la *directriu*. Una parametrització d'una superfície reglada és

$$\Phi(t, v) = \alpha(t) + v w(t) \quad t \in I, v \in \mathbb{R}$$

- i) Comproveu que l'hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ és una superfície reglada de directriu la circumferència $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ i generatriu amb vector director $w(t) = (0, 0, 1) + \alpha'(t)$. Calculeu el pla tangent en el punt $(0, 0, 1)$
 - ii) Comproveu que un helicoide és una superfície reglada de directriu l'hèlix $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, kt)$ i generatrius rectes paral·leles al pla xy que tallen l'eix z .
11. Donada la superfície

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

- i) Trobeu l'equació del pla tangent a superfície en el punt $P(1, -1, 2)$.
 - ii) Calculeu la primera forma quadràtica fonamental associada.
 - iii) Trobeu l'expressió de la corba $\alpha(t) = \Phi(t^2, t)$ sobre la superfície donada.
12. Calculeu la primera forma quadràtica fonamental de les següents superfícies parametritzades en els punts on siguin regulars
- i) $\Phi(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$ (el·lipsoide).
 - ii) $\Phi(u, v) = (a u \cos v, b u \sin v, u^2)$ (parabolode el·líptic).
 - iii) $\Phi(u, v) = (a u \cosh v, b u \sinh v, u^2)$ (parabolode hiperbòlic).
 - iv) $\Phi(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$ (hiperboliode de dos fulls).
13. Trobeu la primera forma quadràtica fonamental d'una superfície de revolució. Apliqueu el resultat obtingut per a calcular la primera forma quadràtica fonamental d'un tor.
14. Trobeu la longitud de l'arc de corba definida per $(u(t), v(t)) = (e^{t \cot \beta / \sqrt{2}}, t)$ on $0 \leq t \leq \pi$, i $\beta = \text{const}$, sobre el con $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.
15. Demostreu que la corba de l'exercici 14 talla les generatrius del con, que són les rectes $v = \text{const}$, amb un angle constant igual a β .
16. Donada la superfície S parametritzada per

$$\Phi(u, v) = (u + v, u - v, uv)$$

- i) Trobeu el vector normal $\mathbf{N}$ a la superfície S en el punt $P(1, -1, 0)$.

- ii) Calculeu la primera forma quadràtica fonamental a la superfície S en el punt P .
- iii) Proveu que la longitud, L , del segment de la corba sobre la superfície S definida per $\alpha(t) = \Phi(t, 1)$ –primera corba coordenada en el punt P – des de $t = 0$ fins $t = 2$ és $L = 2\sqrt{3}$.

17. Donada la parametrització de l'hiperboloide d'un full

$$\phi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)$$

i el punt $P = \phi(\pi, 0)$

- i) Proveu que P és un punt regular
- ii) Calculeu l'equació implícita del pla tangent a la superfície en P
- iii) La primera forma quadràtica fonamental en un punt qualsevol de la superfície
- iv) L'angle que formen les corbes coordenades en el punt P
- v) Longitud de la segona corba coordenada en el punt P per a $t \in [-1, 1]$
- vi) Angle que forma la corba sobre la superfície definida per $u(t) = \pi + t^3 + 4t$, $v(t) = t^2 + 5t$ amb la primera corba coordenada en el punt P .

Part II

Equacions diferencials

Capítol 3

Equacions diferencials

Coneixements previs

Introducció

En aquest capítol, veurem una introducció als mètodes de resolució d'equacions diferencials, especialment adaptat als requeriments de les assignatures de la titulació. Si voleu ampliar coneixements sobre el tema, hi ha multitud de bons llibres per fer-ho. Entre ells, [2], [4], [3] i [5].

Després de repassar els mètodes més senzills de resolució, ens centrarem en el problema de la determinació de famílies de corbes ortogonals, un cas particular ($\alpha = 0$) del problema que plantegem a continuació.

Disseny d'una ruta de pendent controlat sobre una superfície

Suposem que les corbes de nivell d'un mapa vénen donades per expressions de la forma $f(x, y) = c$, amb c variant en els nombres reals (generalment positius si suposem que estem representant un terreny per sobre del nivell del mar. Un exemple prou "realista" podria ser:

$$f_1(x, y) = \exp(-0.2(x^2 + y^2)) + \exp(-0.3((x - 4)^2 + (y - 2)^2)).$$

Representem algunes de les seves corbes de nivell a la Figura 3.1¹.

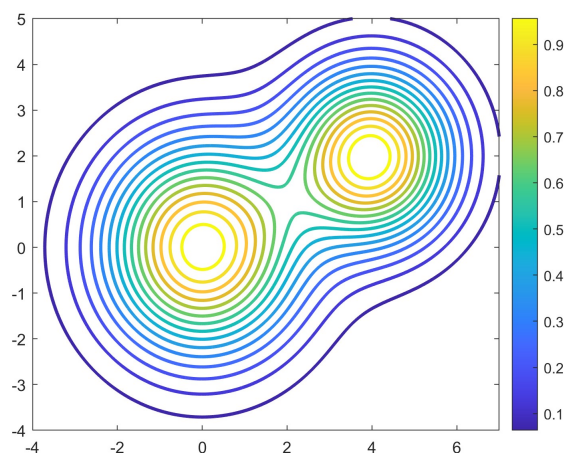


Figura 3.1: Algunes corbes de nivell de la funció $f_1(x, y) = \exp(-0.2(x^2 + y^2)) + \exp(-0.3((x - 4)^2 + (y - 2)^2))$.

Ara ens plantegem el problema de traçar un camí amb la propietat que el tall amb totes les corbes de nivell formi sempre el mateix angle. Aquesta construcció permetria controlar el

¹Vegeu el fitxer `TrajectoriesSobreMapa.mlx`. En aquesta introducció (i bona part del capítol) ens recolzarem en alguns programes en Matlab, disponibles a la pàgina de l'assignatura a atenea.

pendent del camí a no ser, és clar, que estiguéssim movent-nos en situacions molt extremes: en una paret vertical o en un pla, per exemple. A la Figura 3.2 podeu veure una trajectòria de pendent màxim 3% sobre la superfície $z = f_1(x, y)$. És interessant veure com el fet de demanar un pendent màxim obliga a fer una trajectòria més llarga i, fins i tot, envoltar la prominència més allunyada a la condició inicial.

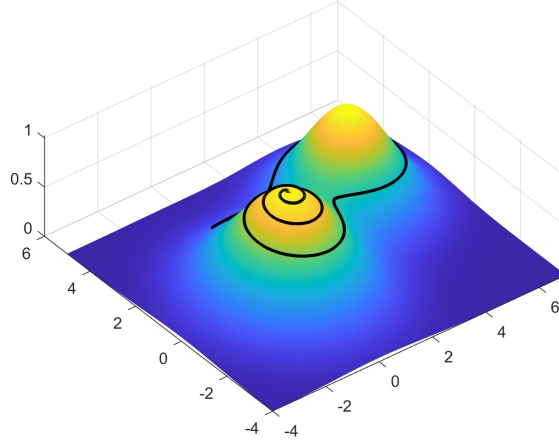


Figura 3.2: Una trajectòria de pendent màxim 3% sobre la superfície $z = f_1(x, y)$.

Plantejarem ara el cas general; suposem només que f sigui de classe $\mathcal{C}^1$ i que el seu gradient no s'anul·li. El pendent en la direcció d'un vector unitari $\mathbf{v}$ ens el determina la derivada direccional $\nabla f \cdot \mathbf{v}$, i volem que sigui igual a una constant m_S , tot i que pot ser que en algun punt sigui impossible obtenir-lo; de fet, els pendents possibles són els valors de l'interval $[-\|\nabla f\|, \|\nabla f\|]$. Usant també la definició d'angle entre dos vectors, tenim doncs que:

$$\cos \alpha \|\nabla f\| = \nabla f \cdot \mathbf{v} = m_S,$$

on α és l'angle que formen els vectors ∇f i $\mathbf{v}$.

Per a dissenyar una trajectòria amb pendent constant, prenem $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, que equival a considerar que la solució $(x(t), y(t))$ està parametritzada per l'arc (és a dir, recorrem la superfície amb velocitat $\sqrt{1 + z'(t)^2}$, on $z(t) = f(x(t), y(t))$). Per tant, el vector $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ és un vector unitari que forma un angle α amb el vector gradient $\nabla f(x(t), y(t))$ i, com a conseqüència, tenim que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x / \|\nabla f\| \\ f_y / \|\nabla f\| \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Observem que el sistema (3.1) ens diu que el vector de derivades s'obté fent una rotació d'angle α del vector gradient de f normalitzat per a cada instant t (a l'equació no hem fet explícita la dependència de t perquè fos més fàcil de llegir) ja que la matriu $R_\alpha :=$

$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ és una matriu de rotació. Notem que una altra solució seria prendre R_α^{-1} , que ens donaria una solució en una direcció oposada. D'altra banda, és important observar que $\alpha = \alpha(x(t), y(t))$ perquè per a cada t volem que es compleixi $\cos \alpha \|\nabla f\| = m_S$, $\nabla f = \nabla f(x(t), y(t))$. Per tant, haurem de substituir $\cos \alpha = m_S / \|\nabla f\|$ i $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - m_S^2 / \|\nabla f\|^2}$; no obstant, si $|m_S| / \|\nabla f\|$, el sistema no estarà definit.

Les equacions del sistema (3.1) són **equacions diferencials** en les quals tenim informació de les derivades $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ de dues funcions incògnita $x(t)$ i $y(t)$, en termes dels valors de les funcions en cada instant de temps. La diferència amb altres equacions que s'han estudiat anteriorment rau en el fet que ara les incògnites són funcions i no pas nombres. Depenent de la funció $f(x, y)$ que prenem, el sistema (3.1) pot resultar impossible de resoldre, però sempre es pot recórrer a mètodes numèrics que ens donen solucions aproximades, com el que hem aplicat per a obtenir la trajectòria de la Figura 3.2.

Per exemple, si $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$, per posar un cas molt senzill, el sistema resultant és:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{m_S}{x^2 + y^2} x + \frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 - m_S^2} y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 - m_S^2} x - \frac{m_S}{x^2 + y^2} y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Per trobar una solució concreta, hauríem de conèixer els valors inicials, generalment situats en $t = 0$, és a dir, $x(0)$ i $y(0)$. A l'expressió del sistema (3.2) s'aprecia clarament que el model no és vàlid a l'origen, on el gradient s'anul·la, ni tampoc està ben definit si en algun punt demanem un pendent $|m_S| > x^2 + y^2$.

3.1 Concepte d'equació diferencial i de solució

Una **equació diferencial** és una relació entre una funció (la incògnita) i les seves derivades. En un llenguatge més tècnic, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, una equació diferencial és una relació

$$\mathcal{F}(x, y(x), \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_i}, \dots) = 0, \quad (3.3)$$

on x és la variable independent i $y : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^n$ és la funció incògnita.

Vegem alguns exemples "naturals" d'aparició d'equacions diferencials:

a) **Creixement exponencial.**

Una població de bacteris creix a una velocitat proporcional al nombre de bacteris. En un cert instant, el nombre de bacteris és 10^4 i, al cap d'una hora, és de 10^5 . Quants n'hi haurà al cap de tres hores?

Solució: Sigui $x(t)$ = la biomassa (nombre de bacteris) en un instant $t = t_0$ (comptarem el temps en hores).

Per l'enunciat, sabem que $x(0) = 10^4$ i $x(1) = 10^5$. I la qüestió, doncs, és saber quant val $x(3)$.

La frase "Una població de bacteris creix a una velocitat proporcional al nombre de bacteris" es tradueix, en aquesta notació, en

$$x'(t) = \lambda x(t).$$

Aquí és on "s'origina" l'equació diferencial, ja que tenim informació sobre la relació de la variació ($x'(t)$) d'una variable ($x(t)$). El que no ens diu l'enunciat és la magnitud d'aquesta variació relativa, és a dir, el valor de λ . Aquesta dada l'haurem de deduir de tota la resta d'informació de l'enunciat. Fixem-nos que, d'acord amb la definició, l'equació diferencial s'escriu com $\mathcal{F}(x(t), x'(t)) := x'(t) - \lambda x(t) = 0$.

Hem de trobar $x(t)$ tal que $x'(t) = \lambda x(t)$; per tant,

$$x(t) = Ce^{\lambda t}, \quad \text{amb } C \in \mathbb{R}$$

ja que

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \implies \frac{dx}{x} = \lambda dt \implies \int \frac{dx}{x} = \int \lambda dt \implies \ln |x| = \lambda t + K,$$

i aplicant l'exponencial a la darrera igualtat:

$$|x| = e^{\lambda t} e^K \implies x = \pm e^K e^{\lambda t}$$

on $K \in \mathbb{R}$.

Ara imposen els valors de $x(t)$ coneguts (per a $t = 0$, $x = 10^4$ i, per a $t = 1$, $x = 10^5$):

$$\begin{aligned} 10^4 &= x(0) = C \implies C = 10^4; \\ 10^5 &= x(1) = 10^4 e^{\lambda} \implies e^{\lambda} = 10 \implies \lambda = \ln 10. \end{aligned}$$

Finalment, obtenim

$$x(t) = 10^4 10^t = 10^{t+4}$$

En aquest cas, l'equació diferencial és $x' = \lambda x$ per un λ fixat. Anomenem *problema de valor inicial* al sistema

$$\begin{cases} x' &= \lambda x, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

on t_0 i x_0 són coneguts. Anomenem *conjunt de solucions* a $x = Ce^{\lambda t}$ i *solució* a la funció trobada quan imposen la relació $x(t_0) = x_0$. El problema de valor inicial té una única solució sota certes condicions de regularitat de la funció $\mathcal{F}$ que apareix a la Definició 3.3.

b) **Moviment uniformement accelerat.**

Si $x(t)$ és la posició d'una partícula, $x'(t)$ n'és la velocitat i $x''(t)$, l'acceleració, seguint la segona llei de Newton, tenim que

$$x''(t) = \frac{F(t)}{m(t)}.$$

Si suposem que l'acceleració és constant, aleshores

$$x''(t) = a \implies (x'(t))' = a \implies x'(t) = \int a \, dt + C = at + C$$

i si $x'(0) = v_0$ obtenim

$$x'(t) = at + v_0.$$

Integrant

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + C;$$

si, a més a més, $x(0) = x_0$, aleshores obtenim que

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0.$$

Sovint, però, les derivades de la funció incògnita no es fan només respecte un paràmetre sinó que la variable independent pot tenir una dimensió més gran que 1. Aquesta mena d'equacions s'anomena *equació en derivades parcials* (EDP). Les que depenen d'una sola variable independent, com als exercicis anteriors, s'anomenen *equacions diferencials ordinàries* (EDO). A continuació veiem un exemple d'EDP.

c) **Equació de la calor.**

Considerem

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad \text{on } u = u(t, x).$$

Ara no en tenim prou amb una sola condició inicial, sinó que necessitem més informació. Les *condicions de contorn* podrien ser, per exemple:

$$\begin{cases} u(t, 0) &= 0 \\ u(t, 1) &= 0 \\ u(0, x) &= f(x) \end{cases}$$

La dificultat de la resolució d'aquest tipus d'equacions queda molt més enllà dels objectius d'aquest curs. Deixem aquest exemple com una mostra d'EDP. Tampoc entrarem en l'anàlisi de sistemes d'equacions, però tot i així, el següent exemple ens il·lustra el concepte de solució en EDs bidimensionals. %Dibuix

d) Sistema depredador-presa.

Sigui $x(t)$ la densitat de població d'una determinada colònia d'una espècie animal que juga el paper de presa i $y(t)$ la densitat d'una altra població que actua com a depredadora. Si permetem, a més, uns factors externs, ϵ_1 , ϵ_2 , per part d'altres espècies, la relació entre ambdues densitats pot venir regulada per un sistema d'equacions com ara:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) + \epsilon_1, \\ \dot{y}(t) = y(t)(\gamma x(t) - \mu) + \epsilon_2, \end{cases} \quad (3.4)$$

on α (taxa de reproducció), β (funció de resposta), γ (funció de resposta) i μ (taxa de mortalitat) són constants reals i positives. Siguin $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ les densitats inicials d'ambdues poblacions.

En el cas que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, totes les solucions són corbes tancades periòdiques, vegeu la figura 3.3. Observem, a més, que la solució $(x(t), y(t)) \equiv (\frac{\mu}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$ compleix que $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$ per a qualsevol t ; en aquests casos, es diu que el punt $(\frac{\mu}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$ és d'**equilibri**.

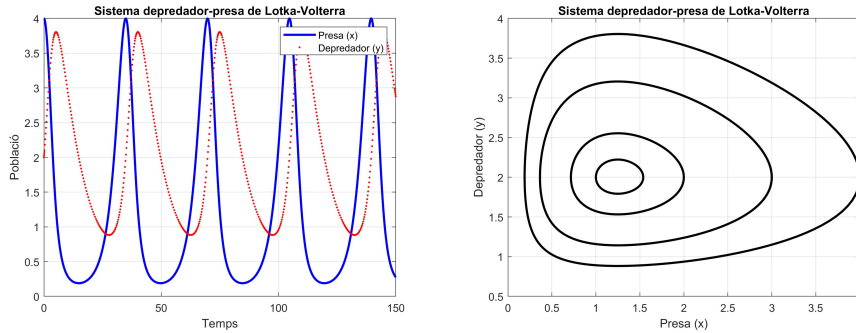


Figura 3.3: Solucions del sistema (3.4) amb $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. A l'esquerra, gràfica de $x(t)$ i $y(t)$ d'una solució particular. A la dreta, diverses solucions (corresponents a diverses condicions inicials) en el pla xy (no es veu el temps). Observeu que totes són corbes tancades, és a dir, solucions periòdiques. Per a la representació d'aquesta figura s'ha pres $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.08$ i $\mu = 0.1$.

Quan deixem que ϵ_1 i ϵ_2 siguin diferents de zero (introduïm factors externs!), desapareix el continu de solucions tancades i les solucions poden tendir totes a un equilibri, tal com es mostra a la figura 3.4.

Altres valors dels paràmetres ϵ_1 i ϵ_2 podrien conduir, per exemple, a l'existència d'una òrbita periòdica aïllada, que s'anomena *cicle límit*, i que suposaria una oscil·lació idèntica de les poblacions de preses i depredadors independentment de la condició inicial. A la figura 3.5 hi podeu apreciar un exemple de **cicle límit** del sistema (3.5)

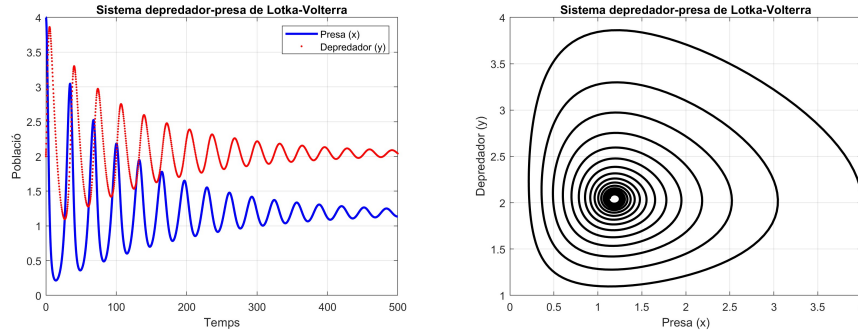


Figura 3.4: Solució particular del sistema (3.4) amb $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.01$. A l'esquerra, gràfica de $x(t)$ i $y(t)$. A la dreta, gràfica en el pla xy (no es veu el temps). Observeu que ja no s'aprecia una solució periòdica sinó que tendeix a un punt d'equilibri. Per a la representació d'aquesta figura s'ha pres $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.08$ i $\mu = 0.1$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + (x(t) - x(t)^3/3), \\ \dot{y}(t) = x(t), \end{cases} \quad (3.5)$$

anomenat *oscil·lador de van der Pol*, que modela l'activitat elèctrica en un circuit que usa vàlvules de buit.

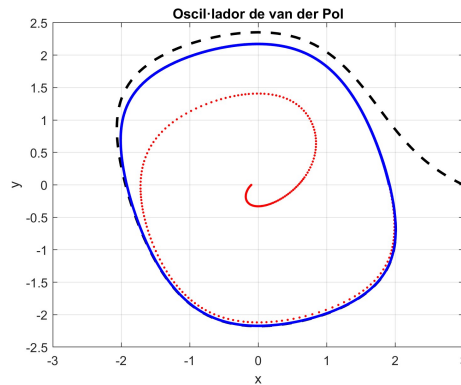


Figura 3.5: L'equació de Van der Pol modela un circuit elèctric RLC en què la resistència és un díode túnel (una *vàlvula electrònica*) amb característica $F(x) = \mu(x^3 - x)$, $\mu > 0$. En la gràfica es pot apreciar una òrbita tancada isolada (línia contínua i blava), també anomenada *cicle límit*. Observem com les altres òrbites (puntejada en vermell i discontinua en negre) tendeixen al cicle límit.

De preguntes com ara

1) Quantes òrbites tancades hi ha?

2) Són atractores o repulsores?

se n'ocupa una branca de les equacions diferencials anomenada *teoria qualitativa*. La teoria qualitativa defuig la idea de trobar una solució exacta. De fet, trobar la solució exacta d'una equació diferencial no és possible en general. De tota manera, en la propera secció donarem una idea d'alguns mètodes molt elementals de resolució, aplicables només a classes particulars d'equacions.

3.2 Equacions diferencials ordinàries: mètodes bàsics de resolució

3.2.1 Equacions diferencials lineals de primer ordre

Sigui $x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$ on $p(t)$ i $q(t)$ acostumen a ser funcions conegudes. Sigui $\mathcal{F}(t, x, x', \dots)$ una funció lineal. Direm que és una equació diferencial de primer ordre quan el màxim ordre de derivació és 1.

Equació Diferencial Lineal Homogènia

Si tenim $q(t) = 0$ la solució es calcula:

$$\begin{aligned} x'(t) = -p(t)x(t) &\implies \frac{dx}{dt} = -p(t)x \implies \frac{dx}{x} = -p(t)dt \\ &\implies \ln|x| = -\int p(t)dt + K \\ &\implies x(t) = Ce^{\int p(t)dt} \end{aligned}$$

Es diu que x i t són variables separables perquè les podem integrar per separat.

Equació Diferencial Lineal No Homogènia

Per resoldre l'EDL no homogènia és convenient aplicar el mètode de variació de les constants que consisteix en suposar que

$$x(t) = C(t)e^{-\int p(t)dt}$$

Busquem una funció $C(t)$ tal que $x(t) = C(t)e^{-\int p(t)dt}$ sigui solució de l'EDL. Imposem que sigui solució:

$$C'(t)e^{-\int p(t)dt} + C(t)e^{-\int p(t)dt}(-p(t)) + p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} = q(t);$$

llavors,

$$C'(t) = q(t)e^{\int p(t)dt} \implies C(t) = \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt,$$

i, per tant,

$$x(t) = C(t)e^{-\int p(t)dt} = \left(\int q(t)e^{\int p(t)dt} dt \right) e^{-\int p(t)dt}.$$

Exemple: Considerem $x' + ax = b$, on $a, b \in \mathbb{R}$ constants.

1 Solució homogènia: $x' + ax = 0$

$$\frac{dx}{x} = -a dt \implies x(t) = Ce^{-at}$$

2 Prenem $x(t) = C(t)e^{-at}$

$$C'(t)e^{-at} = b \implies C'(t) = be^{at} \implies C(t) = \frac{b}{a}e^{at} + K$$

$$x(t) = \left(\frac{b}{a}e^{at} + K\right)e^{-at} = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$$

3 Solució al problema de valor inicial: $\begin{cases} x(0) = x_0 = K + \frac{b}{a} \\ K = x_0 - \frac{b}{a} \end{cases}$

Per tant,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a} = x_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

3.2.2 Equacions diferencials exactes

Considerem una equació diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Si el camp $(M(x, y), N(x, y))$ és conservatiu (vegeu el capítol de camps vectorials), existirà $U = U(x, y)$ tal que

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

En aquest cas, l'ED $Mdx + Ndy = 0$ la podem pensar com $dU = 0$ i, per tant les solucions seran les corbes $U(x, y) = \text{constant}$.

Si $(M(x, y), N(x, y))$ és conservatiu es diu que l'equació diferencials és *exacta*. Recordem que en aquests casos, si M i N són funcions diferenciables, la funció $U(x, y)$ existeix si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y).$$

Remetem el lector altra vegada al capítol de camps per a una demostració.

Exemple: L'equació diferencial $xy' - 2y = 0$ es pot escriure com

$$x dy - 2y dx = 0.$$

Les funcions M i N són, doncs, $M(x, y) = -2y$ i $N(x, y) = x$.

En el següent exemple expliquem com es determina la funció $U(x, y)$ en cas que existeixi.

Exemple: Resolem l'equació $x dx + y dy = 0$.

Com que $M(x, y) = x$ i $N(x, y) = y$ i, per tant, $M_y = N_x = 0$, existirà $U(x, y)$ tal que l'equació diferencial es podrà escriure com a $dU = 0$.

Busquem $U(x, y)$, doncs, tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) = x$

Això implica que

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \Phi(y),$$

per a una certa funció Φ .

Imposem ara que $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) = y$, utilitzant al mateix temps l'expressió d' U que acabem d'obtenir. Llavors:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \Phi'(y) = y \implies \Phi(y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Finalment, doncs:

$$\implies U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C,$$

on C és una constant real qualsevol.

Observem que de l'equació inicial es pot interpretar que les solucions d'aquesta EDO són aquelles corbes tals que el vector posició sigui perpendicular al vector tangent: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$; i aquesta propietat geomètrica la compleixen les circumferències, que són justament les corbes solució que hem obtingut: $\frac{x^2 + y^2}{2} = K$.

Exemple: A l'exemple anterior hem resolt $x dx + y dy = 0$, és a dir, el cas $y' = \frac{-x}{y}$. Ara, estudiarem les solucions de $f(x, y)x dx + f(x, y)y dy = 0$ per a $f(x, y) = x^2$ o sigui quan $y' = \frac{-x^3}{x^2 y}$.

$$x^3 dx + yx^2 dy = 0$$

on

$$\left. \begin{array}{l} M = x^3 \\ N = x^2 y \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} M_y = 0 \\ N_x = 2xy \end{array} \right\} \implies \text{No és conservatiu}$$

Si existeix una funció $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial(fM)}{\partial y} = \frac{\partial(fN)}{\partial x}$$

s'anomena **factor integrant**.

$$\frac{\partial f(x, y)x^3}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)yx^2}{\partial x}$$

$$f_y x^3 = f_x y x^2 + f 2xy$$

$$f_y x^2 = f_x y x + 2yf$$

i es comprova que f és un factor integrant.

3.2.3 Exercicis d'enunciat més complex

a) **Datació d'excavacions**, vegeu [2, p. 19].

En una excavació a Nippur, una ciutat de Babilònia, el 1950, es va mesurar que el carbó vegetal d'una biga del sostre patia 4.09 desintegracions per minut i per gram. La fusta viva pateix unes 6.68 desintegracions. Suposant que aquest carbó vegetal es va formar durant l'època de Hamurabi, doneu una estimació de la data probable de successió de Hamurabi, sabent que la semivida del C_{14} és de 5568 anys.

Per resoldre'l, comencem introduint notació:

Sigui $N(t)$ la relació entre el nombre d'àtoms per gram d'un element radioactiu, en funció de t anys. Per tant, $N'(t)$ serà el nombre de desintegracions per any.

Anomenem **semivida** del material al temps que tarda una massa en reduir-se a la meitat.

Hem de resoldre

$$\begin{aligned}\frac{N'}{N} &= \lambda \\ \implies N(t) &= N(0)e^{\lambda t} \implies \left\{ \text{Si } N(t) = \frac{N(0)}{2} \right\} \implies \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{\lambda t} \\ &\implies \frac{1}{2}e^{\lambda t} \implies \lambda t = -\ln 2 \\ t \text{ semivida} &\implies t = \frac{-\ln 2}{\lambda} \implies \lambda = -\ln 25568\end{aligned}$$

Sabem que

$$\begin{aligned}N'(0) &= 6.68 \cdot m_{\text{any}} = \lambda N(0) \\ N'(t) &= 4.09 \cdot m_{\text{any}} = \lambda N(t) = \lambda N(0)e^{\lambda t} \\ \left. \begin{aligned}6.68 \cdot m_{\text{any}} &= \lambda N(0) \\ 4.09 \cdot m_{\text{any}} &= \lambda N(0)e^{\lambda t}\end{aligned} \right\} \frac{6.68}{4.09} &= e^{-\lambda t} \implies e^{\lambda t} = \frac{4.09}{6.68} \\ \lambda t = \ln \frac{4.09}{6.68} &\implies t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{4.09}{6.68} \implies t \simeq 3940 \text{ anys}\end{aligned}$$

b) **Tangents i normals**

Trobeu totes les corbes del primer quadrant que verifiquen la següent propietat: Si P és un punt arbitrari de la corba, T la intersecció amb l'eix Y de la tangent a la corba, N la intersecció amb l'eix X de la normal a la corba i O l'origen de coordenades, aleshores $T\vec{N}$ és perpendicular a $\vec{OP}$.

Calculem primer la recta tangent de la corba que cerquem $(x(t), y(t))$: $(x, y) = (x(t), y(t)) + s(x'(t), y'(t))$

I ara, la recta normal: $(x, y) = (x(t), y(t)) + n(-y'(t), x'(t))$

Càlcul de $T = (0, y_T)$:

$$0 = x(t) + sx'(t) \implies s = -\frac{x(t)}{x'(t)} \implies y_T = y(t) - \frac{x(t)y'(t)}{x'(t)} \implies y_T = y(t) + sy'(t)$$

Càlcul de $N = (x_N, 0)$:

$$x_N = x(t) + \frac{y(t)y'(t)}{x'(t)}$$

Imposem que $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{OP} = (x(t), y(t))$$

$$\overrightarrow{TN} = (x_N, -y_T) = (x(t) + \frac{y(t)y'(t)}{x'(t)}, -y(t) + \frac{x(t)y'(t)}{x'(t)})$$

Imposem que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{TN} = 0$: $x^2 + \frac{xyy'}{x'} - y^2 + \frac{xyy'}{x'} = 0$ on $x = x(t)$ i $y = y(t)$.

$$y^2 - x^2 = 2xy\frac{y'}{x'} \text{ i com que } y = y(x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = 0$$

Comprovem si és una equació diferencial exacta

$$2xydy = (y^2 - x^2)dx \implies (x^2 - y^2)dx + (2xy)dy = 0$$

$$\implies \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \text{ i } \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2y$$

Per tant no ho és.

Resolem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{2\frac{xy}{x^2}}$$

fem el canvi de variable $z = \frac{y}{x}$ amb $y' = z'x + z$:

$$z'x + z = \frac{z^2 - 1}{2z} \implies 2zxz' = z^2 - 1 - 2z^2 = -1 - z^2$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{-1 - z^2}{2z} \frac{1}{x} \implies \frac{-2z}{1 + z^2} dz = \frac{dx}{x}$$

i integrem a banda i banda

$$\ln(1 + z^2) = -\ln x + C \implies 1 + z^2 = \frac{k}{x} \implies z^2 = \frac{y}{x}$$

$$y^2 + x^2 - kx = 0$$

Les solucions són de la forma

$$(x - \frac{k}{2})^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}$$

és a dir, circumferències de radi $\frac{k}{2}$ i centre $(\frac{k}{2}, 0)$

3.3 Famílies de corbes ortogonals

Suposem que tenim una equació $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$. Per exemple, $y' = f(x, y)$. En general té infinites solucions. El conjunt de solucions és una família de corbes. Si imposem una condició inicial, ens acostuma a quedar una única solució.

Exemple:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x}{y} \implies ydy = -xdx \implies y^2 = -x^2 + C \implies x^2 + y^2 = C$$

Càlcul de la família de corbes ortogonals a les solucions $y' = f(x, y)$

L'equació diferencial de la família de corbes de l'exemple anterior és:

$$y' = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \ln |y| = \ln |x| + C \implies y = Kx \text{ amb } k \in \mathbb{R}$$

La família de corbes ortogonals a les solucions de $y' = f(x, y)$ satisfà l'equació diferencial $y' = \frac{-1}{f(x, y)}$.

Exemple: Busquem la família de corbes ortogonals a la família de corbes $y^2 - x^2 = C$

- 1) Derivem l'hipèrbola $y^2 - x^2 = C$ respecte x : $2yy' - 2x = 0 \implies y' = \frac{x}{y}$
- 2) L'equació diferencial de la família de corbes ortogonals és: $y' = \frac{-y}{x}$
- 3) Resolem l'EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \implies xdy = -ydx \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\implies \ln |y| = \ln |x|^{-1} + C \implies y = \frac{k}{x}$$

$$\begin{cases} (y+x)(y-x) &= y^2 - x^2 = 0 \\ y^2 &= x^2 + c \\ x^2 &= y^2 - c \end{cases}$$

3.4 Exercicis

3.4.1 Equacions de primer ordre

1. (vegeu [3]). Determineu si la funció proposada és una solució de l'equació diferencial respectiva.

(a) $y = Ce^{4x}$, $y' = 4y$;

(b) $x^2 + y^2 = Cy$, $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

(c) $y = 3 \cos x$, $y^{IV} - 16y = 0$;

(d) $y = e^{-2x}$, $y^{IV} - 16y = 0$.

2. (vegeu [3]). Calculeu la solució general de les equacions diferencials següents:

(a) $y' = \frac{x}{y}$,

(b) $(2 + x)y' = 3y$,

(c) $yy' = \sin x$.

3. (vegeu [3]). Calculeu la solució particular, en els punts indicats, de les següents equacions diferencials:

(a) $yy' - e^x = 0$, $y(0) = 4$,

(b) $y(x + 1) + y' = 0$, $y(-2) = 1$,

(c) $(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$, $y(0) = \sqrt{3}$.

4. (vegeu [3]). Determineu quines de les següents equacions diferencials són exactes i en aquest cas trobeu la solució general.

(a) $(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$,

(b) $(4x^3 - 6xy^2)dx + (4y^3 - 6xy)dy = 0$,

(c) $2 \cos(2x - y)dx - \cos(2x - y)dy = 0$.

5. (vegeu [3]). Calculeu la solució particular, en els punts indicats, de les següents equacions diferencials:

(a) $\frac{y}{x-1}dx + (\ln(x-1) + 2y)dy = 0$, $y(2) = 4$,

(b) $\frac{x}{x^2 + y^2}dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy = 0$, $y(0) = 4$,

6. (vegeu [3]). Donada l'equació diferencial

$$(2xy^3 + 3)dx + (3x^2y^2 - 2y)dy = 0,$$

trobeu la corba integral que passa pel punt $P(1, 2)$.

7. (vegeu [3]). Cerqueu els valors del paràmetre m perquè l'equació diferencial

$$(2x + 1)ydx + (3y^2 + mx^2 + mx)dy = 0$$

sigui exacta.

Per a cadascun d'aquests valors trobeu la integral general corresponent.

8. (vegeu [3]). Es diu que $B(x, y)$ és un *factor integrant* de l'equació $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ si $\frac{\partial(BM)}{\partial y} = \frac{\partial(BN)}{\partial x}$. Comproveu que cada una de les funcions següents és un factor integrant de l'equació diferencial $ydx - xdy = 0$ (observeu que no és exacta): $v(x, y) = \frac{1}{x^2}$, $u(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $r(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

9. (vegeu [3]). Resoleu les següents equacions diferencials lineals

(a) $xy' - 2y = 0$

(b) $xy' - 2y = x^2$

(c) $y' - y \tan x = 1$

10. (vegeu [3]). Calculeu la solució particular de les equacions diferencials en el punt indicat:

(a) $y' \cos^2 x + y - 1 = 0$, $y(0) = 5$

(b) $y' + y \tan x = \sec x + \cos x$, $y(0) = 1$

11. Busqueu la família de trajectòries ortogonals a la família de corbes

a) $y = c \cos x$

b) $y = c \sin x$

c) $y^2 - x^2 = c$

d) $y = e^{cx}$

e) $y = ce^x$

f) $x^2 - y^2 = cx$

g) $y = c \ln x$

h) $y = \ln(cx)$

i) $y = c \tan x$

j) $xy = c$

k) $\frac{1}{2}y^2 \ln y - \frac{1}{4}y^2 + x^2/2 = c$

l) $y^2/2 + x = c$

i representeu ambdues famílies gràficament (és aconsellable de fer-ho amb Maple).

3.4.2 Formació de models

Els següents problemes estan extrets de diversos llibres d'equacions diferencials les referències dels quals les podeu trobar a la bibliografia.

1. **Predicció de poblacions**, vegeu [4, p. 25].

Els experts en agricultura estimen que es necessita un terç d'acre de terra per alimentar una persona contínuament. S'estima que a la Terra hi ha 10000 milions d'acres de terra laborable, amb la qual cosa es podria alimentar una població de 30000 milions a molt estirar, si no existissin altres fonts d'alimentació. A principis de 1970 la població mundial era de 3600 milions de persones. Suposant que la població creix amb una taxa anual del 2%, quan estarà la Terra al complet? Quina seria l'estimació per al 2080?

2. **Models epidemiològics**, vegeu [4, p. 27].

Suposem que una població donada es pot dividir entre els individus que pateixen una certa infecció i els susceptibles a contreure-la per contagi. Suposem que la població total no varia i, per tant, si x i y són les proporcions de cada un dels dos grups (x =infectats, y =susceptibles), es manté que $x + y = 1$. Suposem els següents fets:

- la malaltia es propaga a través dels contactes entre persones malaltes i sanes;
- el ritme $\frac{dx}{dt}$ de propagació és proporcional a aquest nombre de contactes;
- que ambdós grups es relacionen lliurement, de manera que el nombre de contactes és conjuntament proporcional a x i a y .

Si $x = x_0$ quan $t = t_0$, cerqueu x com a funció de t , dibuixeu (qualitativament) la seva gràfica i useu aquesta funció per determinar que finalment la infecció s'estendrà a tota la població.

3. **Barreges**, vegeu [4, p. 27].

Un dipòsit conté 1000 litres de salmorra en les quals s'han dissolt 40 litres de sal. Es vol reduir la concentració de sal fins a un 1%, fent entrar aigua pura a raó de 50 litres per minut i permetent que s'escoli la mateixa quantitat, mentre es remena contínuament per mantenir uniforme la barreja. Quant temps es tardarà a aconseguir el propòsit?

4. **Calcular NO perjudica seriosament la salut**, vegeu [4, p. 27].

S'està celebrant una festa en un local de 1800 metres cúbics d'aire lliure de monòxid de carboni (CO). En un moment donat, diverses persones comencen a fumar. El fum que exhalen, que conté un 6% de CO, s'escampa per l'habitació a raó de 0.15 metres cúbics per minut, i la barreja amb l'aire *no viciat* produïda per la ventilació, surt a aquest mateix ritme per una finestra mig oberta. Si els nivells de CO comencen a ser perillosos a partir d'una concentració del 0.00018, quan hauran de fugir els *antitabac*?

5. **Llei de refredament**, vegeu [4, p. 27].

Suposem que un cos calent es refreda a un ritme proporcional a la diferència de temperatura respecte l'ambient (llei de refredament de Newton). Un cos s'escalfa a 110°C i es col·loca a una temperatura ambient de 10°C . Després d'una hora, la temperatura ha baixat a 60°C . Quant temps tardarà encara a arribar als 30°C ?

6. **Contagi**, vegeu [4, p. 27].

Per raons òbvies, la sala de dissecció d'un forense es manté freda a una temperatura constant de 5°C . Mentre el forense estava fent l'autòpsia de la víctima d'assassinat, ell mateix és assassinat, i el cos de la víctima (la primera, és clar), robat. A les 10 del matí (hora de Cardona), l'ajudant del forense descobreix el cadàver a una temperatura de 23°C . Dues hores més tard, la temperatura ha baixat ja a 18.5°C . Suposant que el forense tenia en vida una temperatura de 37°C , a quina hora va ser assassinat?

7. **Poblacions humanes (llei de Malthus)**, vegeu [2, p. 37].

Si es menyspreen les taxes d'emigració i d'homicidis, la població de la ciutat de Nova York satisfà la següent llei de creixement:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{25 \cdot 10^6}p^2, \quad (3.6)$$

on t ve mesurat en anys.

- Modifiqueu l'equació per tal de tenir en compte el fet que 9000 persones se'n van cada any de la ciutat i que cap a 1000 són assassinades en el mateix període.
- Suposant que el 1970, la població de Nova York era de 8000000, calculeu la població per al futur. Què passa quan $t \rightarrow \infty$?

8. **Tangents i normals**.

Trobeu totes les corbes del primer quadrant que verifiquen la següent propietat: Si P és un punt arbitrari de la corba, T la intersecció amb l'eix Y de la tangent a la corba, N la intersecció amb l'eix X de la normal a la corba i O l'origen de coordenades, aleshores $\vec{TN}$ és perpendicular a $\vec{OP}$.

9. **Concentracions d'urani**, vegeu [2, p. 17].

Veurem a continuació com es calcula la concentració d'urani en un mineral a partir de les desintegracions per minut i per gram de plom 210 (dpm/(g Pb)) en el mineral.

La semivida de l'urani 238 és de 4.51×10^9 anys. Al ser tan llarga, es pot suposar que la quantitat d'urani en la mena és constant durant un període de 200 o 300 anys. Denotem per $N(t)$ el nombre d'àtoms d' U^{238} per gram de plom comú a la mena en el temps t . Com que el plom 210 està en equilibri radioactiu amb l'urani en el mineral, se sap que

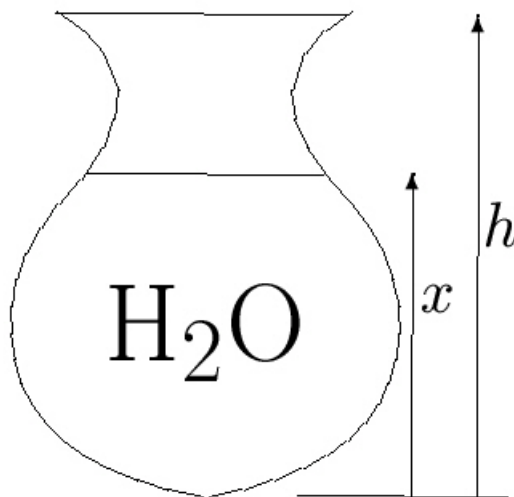
$$dN/dt = -\lambda N = -100 \text{ dpm}/(\text{g Pb})$$

en el moment t_0 . (1 any=525600 minuts).

A partir del fet que un mol d'urani 238 pesa 238 grams i que hi ha 6.02×10^{23} àtoms en un mol, demostreu que la concentració d'urani a la mena és aproximadament 0.014%.

10. **Relotges d'aigua (clepsidra)**, vegeu [1, p. 29].

Tenim un recipient amb secció horitzontal d'àrea $S(x)$, on x és la distància de la secció al fons del recipient (on hi ha un orifici de sortida de secció s). Suposem que a l'instant $t = 0$, $x = h$.



Se sap que la velocitat de sortida v del líquid quan el nivell és x ve donada per $v = k\sqrt{2gx}$, on $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ i k és el coeficient de velocitat de sortida del líquid per l'orifici.

- Suposant que en un interval infinitament petit de temps (dt), sortirà uniformement una columneta de líquid d'altura $v dt$ i secció s , i que el nivell baixarà $-dx$, deduïu l'equació diferencial que modela aquest procés.
- Si el vas és cilíndric d'altura 6 m i diàmetre 4 m, l'orifici té un radi de $1/12$ m i la constant $k = 0.6$, demostreu que la solució de l'equació diferencial és

$$t \simeq 434.304(\sqrt{6} - \sqrt{x}), \text{ per a } 0 \leq x \leq 6.$$

- Quina ha de ser la forma del recipient perquè el ritme de baixada sigui una constant a ?

Si teniu curiositat per les clepsidres, podeu visitar, per exemple,

<http://fluidos.eia.edu.co/fluidos/clepsidra/unoc.html>

11. **Vol amb paracaigudes**, vegeu [2, p. 51].

El pes total d'una persona i el seu paracaigudes P és de 80 Kg. Denotem per $V(t)$ la velocitat que duu el paracaigudista després de t segons d'haver-se llançat (des d'una avioneta...i amb paracaigudes!). Durant els primers 10 segons, la resistència de l'aire és $V/2$, mentre que a l'obrir-se el paracaigudes (si s'escau), passa a ser de $10V$. Obteniu una fórmula explícita per a $V(t)$ si $t \geq 10$, essent optimistes i suposant que el paracaigudes s'obre.

12. **Pressió sobre columnes**, vegeu [3].

Calculeu com ha de variar la secció d'una columna que suporta un pes P de manera que la pressió sigui constant, k , en tota la seva alçada. Es suposen conegudes la secció S_0 de la base superior i el pes específic, λ , del material amb què està construïda.

13. **Recuperació d'una molla elàstica**, vegeu [3].

Descriviu el moviment d'un pes de 32Kg penjat d'una molla en el casos següents:

- (a) S'estira el pes $\frac{1}{2}$ m per sota de la seva posició de repòs i es deixa anar.
- (b) Elevem el pes $\frac{2}{3}$ m per sobre de la seva posició de repòs i el deixem caure.

(Tingueu en compte que la posició de repòs del pes està a $\frac{2}{3}$ m a partir de la posició de repòs de la molla.)

3.4.3 Equacions de segon ordre i sistemes d'equacions

1. (vegeu [4, p. 89]) En cadascun dels casos següents, trobeu (*a ull*) solucions particulars de l'equació diferencial homogènia, a partir d'aquí, una solució general de l'equació.

- (a) $y'' = e^x$,
- (b) $y'' - 2y' = 4$,
- (c) $y'' - y' = \sin x$,
- (d) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$.

2. (vegeu [3]). Resoleu

$$y'' - y' - 2y = 4e^{2x}$$

i dibuixeu la solució particular que passa pel punt $(0, -1)$ i té pendent -1 en aquest punt.

3. (vegeu [3]). Resoleu

$$y'' + 3y' + 2y = 10 \cos x.$$

4. (vegeu [3]). Resoleu

$$y'' + 2y' + y = x + 2$$

i dibuixeu la corba solució que té tangent horitzontal en el punt $(0, 0)$.

5. (vegeu [3]). Trobeu, utilitzant el mètode de variació de constants, les solucions generals de les equacions diferencials,

(a) $y'' + y = \tan x$,

(b) $y'' - 2y + y = \frac{e^x}{2x}$.

6. (vegeu [4, p. 89]) Eliminant les constants c_1 i c_2 , trobeu l'equació diferencial de la família de corbes:

(a) $y = c_1x + c_2x^2$,

(b) $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$,

(c) $y = c_1 \sin kx + c_2 \cos -kx$,

(d) $y = c_1 + c_2e^{-2x}$.

7. (vegeu [3]). Considereu el sistema lineal d'equacions diferencials

$$\begin{cases} x' &= x + 2y, \\ y' &= 2x - 2y. \end{cases}$$

Trobeu l'equació lineal de segon ordre homogènia equivalent i utilitzeu-la per a trobar les solucions del sistema.

8. (vegeu [3]). Trobeu la solució particular del sistema lineal

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + 4y_3 \\ y_2' &= 3y_1 - 4y_2 + 12y_3 \\ y_3' &= y_1 - 2y_2 + 5y_3, \end{cases}$$

que per a $t = 0$ passa pel punt $(1, 0, 0)$.

9. Demostreu que les funcions $\Phi_1(t) = c_1 e^t$ i $\Phi_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ són solucions del sistema lineal d'equacions diferencials

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t), \\ y'(t) &= -x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Referències del Capítol

- [1] V. Amelkin (1990). *Ecuaciones diferenciales aplicadas a la práctica*, Mir Editorial, ISBN 9785030013121. 10
- [2] Martin Braun (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamerica, S.A., ISBN 968-7270-58-6. 3, 3.2.3, 7, 9, 11
- [3] Secció EUPB del Departament de Matemàtica Aplicada I (1997). *Curs de Matemàtiques. Àlgebra lineal i càlcul infinitesimal*, UPC. 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 2, 3, 4, 5, 7, 8
- [4] George F. Simmons (1986). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, ISBN 844810045X. 3, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 6
- [5] Dennis H. Zill (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (9a ed.)*, Cengage Learning Editores, ISBN 607-481-313-2. 3

Part III

Variable complexa

3.5 Introducció

Un dels problemes que es presenten en l'estudi de la geodèsia o de com fer representacions de la Terra, és crear mapes en una superfície plana que representin una superfície en l'espai tridimensional, la Terra. Aquest procés necessàriament comporta alguna distorsió, que es pot controlar fent servir *projeccions* que minimitzin la distorsió en certes regions. Les matemàtiques de la cartografia i problemes relacionats amb la geodèsia han estat sovint font d'inspiració per a estudis en geometria, teoria de funcions i transformacions conformes. I en aquests camps es basen els primers treballs de matemàtics com Lambert, Lagrange i Gauss. En aquesta lliçó començarem donant la formulació analítica de la variable complexa a partir de la qual s'obtenen diverses projeccions. El llenguatge que proporciona la variable complexa facilita l'estudi de les propietats de les projeccions i de les transformacions del pla.

Capítol 4

Els nombres complexos

4.1 Definició

Donat un nombre real $x \in \mathbb{R}$ qualsevol el seu quadrat és sempre un nombre positiu o zero i per tant no existeix cap nombre real solució de l'equació

$$x^2 + 1 = 0 \tag{4.1}$$

Per resoldre equacions d'aquest tipus, s'introdueix $\mathbb{C}$ el conjunt dels nombres complexos. Un nombre complex, $z \in \mathbb{C}$, és una expressió de la forma $z = x + yi$, amb $x, y \in \mathbb{R}$. Es defineix i com la *unitat imaginària* que compleix $i^2 = -1$. Als nombres reals x, y se'n diu respectivament la *part real* i la *part imaginària* del nombre complex z , i es pot escriure

$$z = x + yi \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{Re} z \\ y = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

El conjunt dels nombres complexos es defineix

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Observació 13. Observem que la unitat imaginària, i , satisfà l'equació (4.1) o el que és equivalent, les arrels de l'equació $x^2 + 1 = 0$ són $\pm i$.

Definició 4.1. A l'expressió $z = x + iy$ se'n diu la **forma binòmica** del complex z .

Podem considerar els nombres reals com a complexos amb part imaginària nul·la, és a dir si $x \in \mathbb{R}$, $x = x + 0i$. En el cas que la part real d'un complex sigui nul·la, $z = 0 + yi$, diem que el complex és *imaginari pur*.

4.1.1 Les potències de i

Els possibles valors de qualsevol potència de la unitat imaginària i són $\pm 1, \pm i$, en efecte, recordant que $i^2 = -1$ i multiplicant els dos termes de la cadascuna de les igualtats per i

s'obtenen els quatre possibles valors. En general, per a qualsevol k enter positiu:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, & i^{4k} &= 1, \\ i^1 &= i, & i^{4k+1} &= i, \\ i^2 &= -1, & i^{4k+2} &= -1, \\ i^3 &= i^2 i = -i, & i^{4k+3} &= -i, \\ i^4 &= i^2 i^2 = 1, & & \\ i^5 &= i^4 i = i, & & \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Per exemple, $i^{2007} = i^3 = -i$, ja que $2007 = 4 \cdot 501 + 3$.

4.1.2 El complex conjugat

Donat del nombre complex $z = x + iy$, es defineix el *complex conjugat* de z , que s'escriu $\bar{z}$, com el complex que té la mateixa part real que z i la part imaginària igual però canviada de signe:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Com a conseqüència es compleix

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

4.1.3 El pla complex

La representació gràfica d'un nombre complex és un vector en el pla $\mathbb{R}^2$ que té l'origen a $O(0,0)$ i l'extrem, o afix, en el punt (x,y)

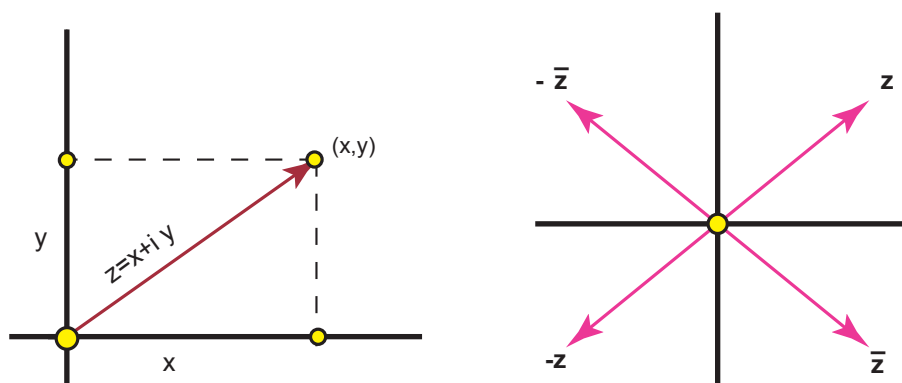


Figura 4.1: Representació gràfica d'un nombre complex, del seu opost i del conjugat

Exemple 31. Representeu gràficament els següents nombres complexos $z = 4 + 3i$, $z_1 = -z$, $z_2 = \bar{z}$, $z_3 = -\bar{z}$. (Vegeu la figura 4.1.)

4.1.4 El cos dels nombres complexos

Donats dos nombres complexos $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ qualssevol, es defineixen l'operació *suma* de nombres complexos com el nombre complex que té part real igual a la suma de les parts reals i com a part imaginària també la suma de les parts imaginàries:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2). \quad (4.2)$$

Aquesta operació satisfà, per a qualssevol complexos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, les propietats associativa, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, commutativa, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, i té element neutre que és $0 = 0 + 0i$. A més, per a cada $z = x + i y \in \mathbb{C}$ existeix el seu *opost* $-z = -x - i y$. Es defineix l'operació *producte* de dos nombres complexos com el complex que s'obté multiplicant les expressions $x_1 + y_1 i$, i $x_2 + y_2 i$ com si fossin polinomis i tenint en compte que $i^2 = -1$. Formalment es pot definir de la forma següent

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (4.3)$$

El producte de nombres complexos satisfà les propietats associativa, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, commutativa, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, i té element neutre, que és $1 = 1 + 0i$. Per a cada $z = x + i y \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existeix el seu *invers*, $\frac{1}{z}$, que es calcula multiplicant i dividint pel conjugat del denominador

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{x + y i} \frac{x - y i}{x - y i} = \frac{x - y i}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i. \quad (4.4)$$

És important destacar que el producte d'un nombre complex, no nul, pel seu conjugat és sempre un nombre real positiu.

Es compleix també la propietat distributiva de la suma respecte el producte de nombres complexos, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

El conjunt dels nombres complexos amb les operacions suma i producte té una estructura de *cos commutatiu*.

Exemple 32. Calculeu el quocient $\frac{2 + 3i}{1 - 2i}$.

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-4 + 7i}{5}.$$

4.1.5 El mòdul d'un nombre complex

El producte d'un nombre complex no nul, $z \in \mathbb{C}$, pel seu conjugat és sempre un nombre real positiu. Es defineix el *mòdul* del complex z com $|z|$

$$|z| = +\sqrt{z \bar{z}} = +\sqrt{(x + y i)(x - y i)} = +\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.5)$$

La interpretació geomètrica del mòdul d'un complex, s'observa en la figura 4.1. Efectivament, el mòdul d'un nombre complex és la longitud del vector que el representa.

4.1.6 Forma polar i trigonomètrica d'un complex

Donat el complex $z = x + iy$ en forma binòmica, es defineix el seu *argument* com l'angle, α , que forma el semieix positiu de les abscises amb el vector que representa el nombre complex mesurat en radians. Vegeu figura 4.2.

Formalment un complex en forma *polar* s'escriu

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Més endavant veurem la justificació d'aquesta forma d'escriure, en concret el significat de l'expressió $e^{i\alpha}$ quan es parli de la funció exponencial complexa a la Secció 5.3.1.

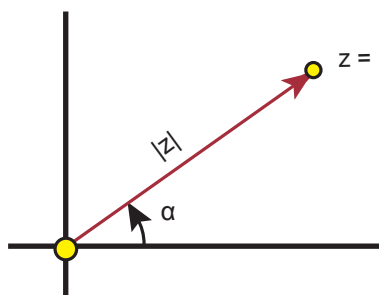
4.1.7 Relació entre la presentació binòmica i polar d'un complex

Donat el nombre complex en forma binòmica $z = x + yi$ podem passar-lo a forma polar tenint en compte que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.6)$$

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x}. \quad (4.7)$$

Aquestes expressions es dedueixen fàcilment a partir dels gràfics 4.1 i 4.2. Cal anar en compte al determinar l'argument perquè hi ha dos angles, que difereixen en π radians, que tenen la mateixa tangent. Per exemple, els complexos $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -1 - i$ tenen el mateix mòdul, $\sqrt{2}$ i en tots dos casos el quocient $\frac{y}{x} = 1$, i per tant $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ o $\arctan 1 = \frac{5\pi}{4}$. Cal adonar-se que z_1 és del primer quadrant i per tant el seu argument ha de ser $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, mentre que l'argument de z_2 és $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$.



I viceversa, donat el nombre complex en forma polar $z = |z|e^{i\alpha}$, tenim

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \alpha, \\ y &= |z| \sin \alpha. \end{aligned}$$

que ens permet calcular la part real i la part imaginària del complex i per tant tenir la seva forma binòmica.

Quan un nombre complex ve donat de la forma

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

Figura 4.2: Representació gràfica d'un nombre complex. Forma polar

es diu que està escrit en *forma trigonomètrica*. D'aquesta forma és clar qui és el mòdul i l'argument de z i només cal substituir els valors de $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ per tenir-ne la seva forma binòmica.

4.1.8 Producte i potència de complexos en forma polar

En el cas que els nombres complexos estiguin expressats en forma polar, les fórmules de Moivre (1667-1754) proporcionen una manera senzilla de calcular el producte i les potències de nombres complexos. El producte dos nombres complexos

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (4.8)$$

és un complex que té per mòdul el producte de mòduls i per argument la suma dels arguments dels factors. La demostració es pot fer passant a forma trigonomètrica i recordant una mica de trigonometria.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \\ &\quad i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ &= |z_1 z_2| e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned}$$

La potència d'un nombre complex és:

$$\begin{aligned} z^n &= (|z| e^{i\alpha})^n = |z|^n e^{in\alpha}, \\ \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Exemple 33. Calculeu $(-\sqrt{3} + i)^{15}$

Comencem calculant el mòdul de $z = -\sqrt{3} + i$, que és $|z| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$, i l'argument $\alpha = \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$. Aplicant la fórmula 4.9 és

$$(-\sqrt{3} + i)^{15} = (2 e^{i\frac{5\pi}{6}})^{15} = 2^{15} e^{i\frac{\pi}{2}} = 32768i,$$

ja que $15\frac{5\pi}{6} = 25\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 6\pi$.

És important destacar que quan es resol l'equació $z^n = z_0$, les arrels tenen totes mòdul $r = \sqrt[n]{|z_0|}$ i dues arrels consecutives tenen arguments que difereixen en $\frac{2\pi}{n}$. Per tant, totes les arrels es representen sobre una circumferència de radi $r = \sqrt[n]{|z_0|}$ i divideixen la circumferència en n parts iguals. Fig. 4.3.

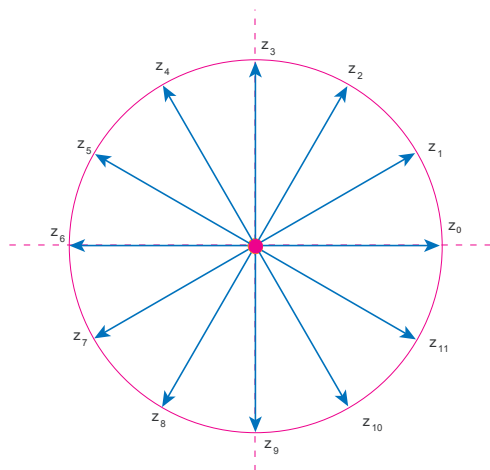


Figura 4.3: Totes les arrels de l'equació $z^{12} = 1$

4.2 Exercicis

1. Efectueu les següents operacions amb nombres complexos:

i) $\frac{(2+3i)(1-i)}{1+i}$

ii) $(2+i)^2 - \frac{(i+1)^3}{i}$

2. Calculeu $(3-i)^2$ i $(-3+i)^2$.

3. Escriviu en forma binòmica

i) $z_1 = 3e^{i\pi}$

ii) $z_2 = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$

iii) $z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$

iv) $z_4 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

v) $z_5 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$

vi) $z_6 = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

vii) $z_7 = 6e^{\frac{5\pi}{3}i}$

viii) $z_8 = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

ix) $z_9 = e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

x) $z_{10} = \frac{2}{7}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

xi) $z_{11} = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{3}i}$

xii) $z_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

4. Escriviu en forma polar

i) $z_1 = -1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$

ii) $z_2 = -15 + 15i$

iii) $z_3 = 4$

iv) $z_4 = -4$

v) $z_5 = -1 + i$

vi) $z_6 = -5\sqrt{3} + 5i$

vii) $z_7 = -6\sqrt{3}i + 6$

viii) $z_8 = -2 - 2i$

5. Trobeu la relació que hi ha entre la part real i la part imaginària dels nombres complexos

$$z, \quad -z, \quad \bar{z}, \quad \overline{(-z)}, \quad -\bar{z}.$$

6. Proveu que $Re(iz) = -Im z$ i que $Re z = Im(iz)$.

7. Calculeu $\frac{(1+i)^{32}}{(1-i)^{33}}$.

8. Calculeu els valors de m i n perquè es compleixi la següent igualtat:

$$(n+mi)(m+i) = 1+i.$$

9. Trobeu $x \in \mathbb{R}$ tal que $(25-xi)^2$ sigui un nombre imaginari pur.

10. Considerem els nombres complexos $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$ i $z_2 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

- i) Expresseu z_1 i z_2 en forma binòmica.
- ii) Trobeu $z_1 z_2$ i $\frac{z_2}{z_1}$ i passeu els resultats a forma polar.
- iii) Compareu els mòduls i els arguments de $z_1 z_2$ i $\frac{z_2}{z_1}$ amb els de z_1 i z_2 .
11. Resoleu les equacions
- i) $z^3 + 27 = 0$ iii) $z^3 - 1 = 0$ v) $9iz^4 + 16 = 0$
- ii) $z^4 - 4i = 0$ iv) $z^2 = \sqrt{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$ vi) $iz^2 + (1 - 5i)z - 1 + 8i = 0$
12. Calculeu m i n perquè se satisfacin les següents igualtats:
- i) $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.
- ii) $(2 - mi)(3 - ni) = 8 + 4i$.
13. Un vèrtex d'un pentàgon regular és el nombre complex $3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Trobeu els altres vèrtexs i el nombre complex les arrels cinques del qual són aquests vèrtexs.
14. Una de les arrels cúbiques del nombre complex z és $1 + i$. Trobeu aquest nombre i les altres arrels cúbiques.
15. Escriviu una equació de segon grau que tingui per solucions $1 + i$ i $2 - 3i$.
16. Quina condició ha de complir el nombre $z = a + bi$ per tal que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

Capítol 5

Funcions de variable complexa

5.1 Introducció

De manera similar al cas de funcions de variable real, es defineix una funció de variable complexa f

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto w = f(z), \end{aligned}$$

on $D \subset \mathbb{C}$.

La funció es pot escriure $f(z) = w = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. On les funcions u, v són funcions reals que depenen de dues variables, x, y , i s'anomenen la *part real*, $u(x, y)$, i la *part imaginària*, $v(x, y)$, de la funció de variable complexa f .

Per a representar gràficament una funció complexa es fan servir dos plans complexos: un per z i l'altre per w . És per aquest motiu que parlem d'una funció complexa com una transformació del pla.

Exemple 34. Trobeu la part real i la part imaginària de $w = z^2$.

Cal substituir $z = x + iy$ a la funció:

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy;$$

per tant $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$.

5.1.1 Exemples de funcions de variable complexa

La funció lineal $f(z) = Az + B$

És una funció que per a $A, B \in \mathbb{C}$, aplica el conjunt de tots els complexos en ell mateix, sempre que $A \neq 0$. L'estudiarem en dues etapes

- (a) $w = Az$. Com que $z = |z|e^{i\arg z} \Rightarrow \begin{cases} |w| = |A||z| \\ \arg w = \arg A + \arg z \end{cases}$ Per tant w consisteix en una homotècia de raó $|A|$ i una rotació d'angle $\arg A$.

- (b) $w = z + B$. Escrivint el complex z en forma binòmica, observem que la funció consisteix en sumar ReB a la part real de la variable z i ImB a la part imaginària de z . Per tant la funció w és una translació de vector (ReB, ImB) .

En definitiva, una aplicació lineal $f(z) = Az + B$ equival a un homotècia de raó $r = |A|$, una rotació d'angle $\beta = \arg A$, i una translació de vector $\vec{v} = (ReB, ImB)$. L'ordre amb el que s'apliquen les funcions és indiferent, ja que la composició de les transformacions que intervenen és commutativa.

Exemple 35. Trobeu el transformat del quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ per la funció $w = (1 + i)z + (2 - i)$

Com que és una aplicació lineal, és composició de les següents funcions:

- homotècia de raó $r = |A| = |1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- rotació $\beta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$
- translació $\vec{v} = (ReB, ImB) = (2, -1)$

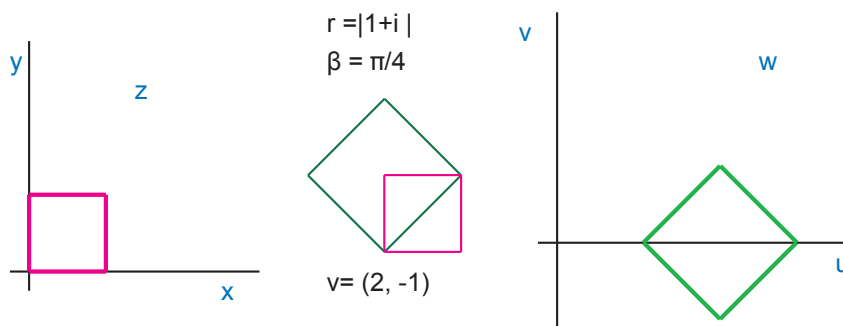


Figura 5.1: La transformació $w = (1 + i)z + (2 - i)$

La inversió $f(z) = \frac{1}{z}$

És una funció que està definida en tots els complexos llevat del zero. I a més no existeix cap $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \frac{1}{z} = 0$. Per tant,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ z &\mapsto w = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Calculem la part real i imaginària d'aquesta funció

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$



Figura 5.2: L'eix real es transforma en ell mateix per $w = \frac{1}{z}$.

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (5.1)$$

Per comprovar que la inversió transforma l'eix real en ell mateix en l'eix real, només cal substituir $y = 0$ en l'expressió 5.1 per tenir la part real i imaginària de la imatge. S'obté que $v = 0$, és a dir l'eix real del pla de les imatges. De fet encara podem dir més, perquè si $z = x + 0i$ amb $0 < |x| \leq 1$, la seva imatge és $w = u + 0i$, amb $u = \frac{1}{|x|} \geq 1$. O sigui que el segment real $[-1, 1] \setminus \{0\}$ s'aplica en $\mathbb{R} - (-1, 1)$. I viceversa. Observem que els punts $z = \pm 1$ es transformen en ells mateixos, o sigui que $f(\pm 1) = \pm 1$.

Per interpretar gràficament aquesta transformació, resulta que, en aquest cas, es poden escriure les variables x, y en funció de u, v : a partir de l'expressió 5.1, observem que

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(-y)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

en conseqüència

$$\begin{cases} u(x, y) = x(u^2 + v^2) \\ v(x, y) = -y(u^2 + v^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (5.2)$$

Per tant, si tenim una corba en forma implícita en el pla x, y , $g(x, y) = 0$, podem calcular l'expressió de la seva transformada en el pla u, v fent $g(x(u, v), y(u, v)) = 0$. Ara provem que la inversió transforma cercles i rectes en cercles i rectes. L'expressió

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (5.3)$$

és l'equació implícita d'una circumferència si $a \neq 0$ i $b^2 + c^2 - 4ad > 0$, i és una recta si $a = 0$ i b, c no s'anul·len simultàniament. Per calcular la seva imatge per la transformació $w = \frac{1}{z}$, es substitueix x, y en termes de u, v segons l'expressió que hem deduit a (5.2). Obtenim:

$$\begin{aligned} & a \left(\frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2} \right) + b \frac{u}{u^2 + v^2} - c \frac{v}{u^2 + v^2} + d = 0 \\ \Rightarrow & d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

```

z := t → 3 · cos(t) + I · 3 · sin(t);
                                t → 3 cos(t) + 3 I sin(t)
d1 := DibCorbaC(z(t), 0, 2 · π, blue); d2 := DibCorbaC(f(z(t)), 0, 2 · π, red);

```

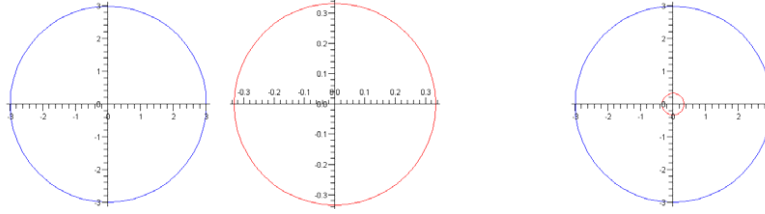


Figura 5.3: La inversió transforma un cercle que no passa per l'origen en un cercle que no passa per l'origen

```

z := t → 500 + 500 · cos(t) + I · 500 · sin(t);
                                t → 500 + 500 cos(t) + 500 I sin(t)
d1 := DibCorbaC(z(t), 0, 2 · π, blue); d2 := DibCorbaC(f(z(t)), 0, π, red);

```

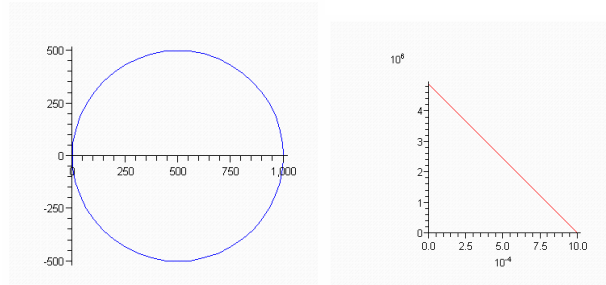


Figura 5.4: La inversió transforma un cercle que passa per l'origen en una recta que no passa per l'origen

En les següents figures, l'expressió "DibCorba" es refereix a un procediment per dibuixar la corba parametritzada $z(t)$ amb un programa de càlcul simbòlic.

- a) Si l'expressió (5.3) és una circumferència que no passa per l'origen és $a \neq 0$ i $d \neq 0$. Llavors l'expressió transformada (5.4) correspon també a un cercle que no passa per l'origen. Per exemple Fig. 5.3. b) En un cercle que passa per l'origen és $a \neq 0$ i $d = 0$ en (5.3), i el seu transformat és una recta $bu - cv + a = 0$ que no passa per l'origen. Exemple a Fig. 5.4. c) En una recta que passa per l'origen és $a = 0$, $d = 0$ en (5.3) i es transforma també en una recta $bu - cv = 0$ que passa per l'origen. Exemple a Fig. 5.5. d) Una recta, $a = 0$, que no passa per l'origen es transforma en un cercle que passa per l'origen. Exemple a Fig. 5.6. En particular, notem que:

- (a) La recta $y = k$ es transforma en $\frac{-v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2 + v^2 + \frac{1}{k}v = 0$ que és un cercle de centre $c(0, \frac{-1}{2k})$ i radi $R = \frac{1}{2k}$ amb $k > 0$
- (b) La recta $x = k$ es transforma en $\frac{u}{u^2+v^2} = k \rightarrow u^2 + v^2 - \frac{1}{k}u = 0$ que és un cercle de centre $c(\frac{1}{2k}, 0)$ i radi $R = \frac{1}{2k}$.

$$z := t \rightarrow t + I \cdot 7 \cdot t;$$

$$t \rightarrow t + 7 I t$$

$$d1 := \text{DibCorbaC}(z(t), -3, 3, \text{blue}); d2 := \text{DibCorbaC}(f(z(t)), -60, 60, \text{red});$$

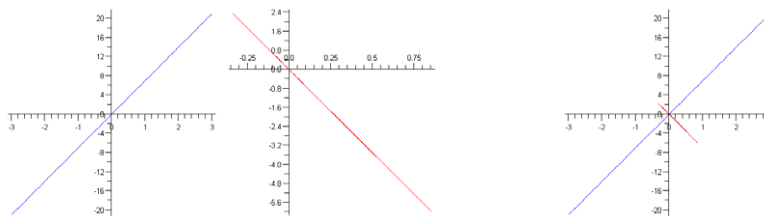


Figura 5.5: La inversió transforma una recta que passa per l'origen en una recta que passa per l'origen

$$z := t \rightarrow t + I \cdot (2 - t);$$

$$t \rightarrow t + I(2 - t)$$

$$d1 := \text{DibCorbaC}(z(t), -3, 3, \text{blue}); d2 := \text{DibCorbaC}(f(z(t)), -60, 60, \text{red});$$

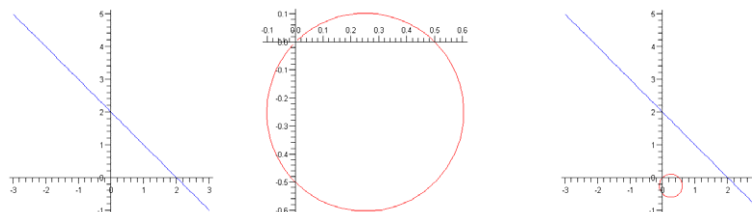


Figura 5.6: La inversió transforma una recta que no passa per l'origen en un cercle que passa per l'origen

$$z := t \rightarrow t + 2 I;$$

$$t \rightarrow t + 2 I$$

$$d1 := \text{DibCorbaC}(z(t), -3, 3, \text{blue}); d2 := \text{DibCorbaC}(f(z(t)), -60, 60, \text{red});$$

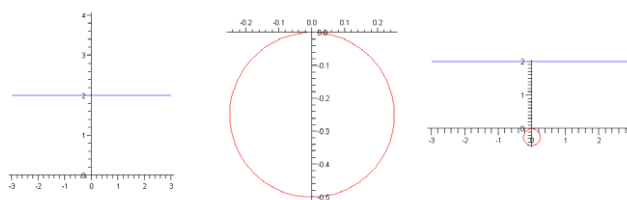


Figura 5.7: La inversió transforma una recta paral·lela a l'eix OX en una circumferència que passa per l'origen

$$z := t \rightarrow 4 + I t;$$

$$t \rightarrow 4 + I t$$

$$d1 := \text{DibCorbaC}(z(t), -3, 3, \text{blue}); \quad d2 := \text{DibCorbaC}(f(z(t)), -60, 60, \text{red});$$

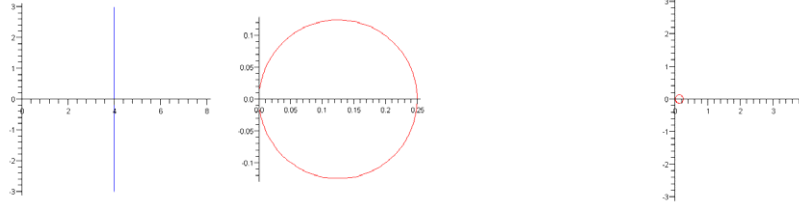


Figura 5.8: La inversió transforma una recta paral·lela a l'eix OY en una circumferència que passa per l'origen

Abans de continuar amb l'estudi de funcions de variable complexa, necessitem interpretar en el conjunt dels complexos, els conceptes de continuïtat i derivació. Des del punt de vista topològic el conjunt dels nombres complexos $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ coincideixen i per tant són vàlides les definicions de límit i continuïtat i es compleixen les propietats. El concepte de continuïtat coincideix exactament amb el corresponent al cas de funcions reals d'una variable real. Es pot comprovar que aquesta definició és equivalent a afirmar que $f(z)$ és contínua si i només si les funcions $u(x, y), v(x, y)$ són funcions contínues en les variables x, y . Estudiem amb més detall la derivada d'una funció de variable complexa.

5.2 Diferenciació. Equacions de Cauchy-Riemann

Considerem $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un domini a $\mathbb{C}$ i suposem $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definició 5.1. *Diem que f és diferenciable en el punt $z_0 \in \mathcal{D}$, si el quocient*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

té límit únic quan $z \rightarrow z_0$, per a $z \in \mathcal{D}$. Si aquest límit existeix en diem la derivada de f en el punt z_0 i s'escriu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si una funció és derivable en cada punt del domini $\mathcal{D}$ es diu que és *holomorfa*, *regular* o *analítica*.

Proposició 5.2. *f derivable en $z_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow f$ contínua en $z_0 \in \mathcal{D}$.*

Definició 5.3. *Diem que f és holomorfa, regular o analítica a $\mathcal{D}$ si f és derivable en cada punt de $\mathcal{D}$*

Per decidir si una funció és derivable o no s'hauria de calcular el límit per les infinites maneres de tendir a z_0 , és per això que estem especialment interessats en trobar condicions necessàries i suficients per a l'holomorfia d'una funció de variable complexa. En el primer resultat es prova que si la funció és derivable, llavors es compleix una certa relació, les equacions de Cauchy-Riemann, entre les derivades parcials de les funcions part real i part imaginària. Però que es compleixi Cauchy-Riemann no vol dir que la funció sigui derivable. El segon enunciat assegura que la funció és derivable si, a més de Cauchy-Riemann, les derivades parcials de les funcions part real i part imaginària són contínues.

Proposició 5.4 (Equacions de Cauchy-Riemann). *Si la funció $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa a $\mathcal{D}$ llavors existeixen les derivades parcials de les funcions u, v i, a més, compleixen les equacions de Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (5.5)$$

per a tot $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{D}$.

Demostració. Si f és holomorfa a $\mathcal{D}$ llavors com que $\Delta z = z - z_0$,

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Aquest límit pren el mateix valor independentment de la forma en que Δz tendeix a zero. Considerem $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$

Suposem que Δz és real, o sigui: $\Delta z = \Delta x + 0$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \\ &\quad + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + i v_x \end{aligned} \quad (5.6)$$

D'altra banda, fent $\Delta z = 0 + i \Delta y$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i \Delta y} + \\ &\quad + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i \Delta y} = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i u_y + v_y \end{aligned} \quad (5.7)$$

Com que els dos valors han de coincidir, igualant la part real i la part imaginària dels valors calculats a (5.6) i (5.7) s'obté

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

que són les equacions de Cauchy-Riemann (5.5). ■

Proposició 5.5. Considerem $w = f(z)$ la funció de variable complexa definida en un domini $\mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Si existeixen les derivades parcials u_x , u_y , v_x , v_y , són contínues i compleixen les equacions de Cauchy-Riemann a $\mathcal{D}$, llavors f és holomorfa a $\mathcal{D}$.

Exemple 36. Comproveu que la funció $f(z) = z + \frac{1}{\bar{z}}$ és holomorfa per $x \neq 0$ i calculeu $f'(z)$. A aquesta funció se'n diu la transformació de Zhukovsky (1847–1921) i és utilitzada en aeronàutica perquè la imatge d'un cercle que passa per $z = 1$ o $z = -1$ és una corba similar a la secció d'una ala d'avió.

$$f(z) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$u_x = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_y = 1 - \frac{(x^2 + y^2) - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_y = 1 \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Vegem que aquesta expressió coincideix amb la que obtindríem derivant com si $f(z)$ fos una funció de variable real

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{z\bar{z}} - 2 \frac{\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2}{z^2\bar{z}^2} + i \frac{2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)}{z^2\bar{z}^2} \\ &= 1 + \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{(z + \bar{z})^2}{2z^2\bar{z}^2} + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2z^2\bar{z}^2} \\ &= 1 + \frac{2z\bar{z} - (z + \bar{z})^2 + z^2 - \bar{z}^2}{2z^2\bar{z}^2} \\ &= 1 + \frac{-2\bar{z}^2}{2z^2\bar{z}^2} \\ &= 1 - \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

5.2.1 Regles de derivació

Les regles de derivació de sumes, productes i quocients de funcions de variable real són vàlides per funcions de variable complexa.

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0$$

i també la regla de la cadena per derivar la funcions compostes.

Proposició 5.6. *Considerem les funcions f, g definides en els dominis $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g$ de $\mathbb{C}$, respectivament. Si f és holomorfa en $z_0 \in \mathcal{D}_f$, $f(z_0) \in \mathcal{D}_g$ i g és holomorfa a $\mathcal{D}_g$, llavors la funció composta $w = (g \circ f)(z)$ és holomorfa a z_0 i es compleix*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

5.2.2 Interpretació geomètrica de la derivada

Suposem que tenim la corba $z = z(t)$ a $\mathbb{C}$ que passa pel punt $z_0 = z(t_0)$ amb $a \leq t \leq b$. Llavors la corba $w = f(z(t))$ és la corba transformada per la funció $w = f(z)$, si aquesta funció és derivable en el punt z_0 , aplicant la regla de la cadena

$$w'(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0)$$

i, per tant recordant el producte de complexos en forma polar, resulta que els arguments dels nombres complexos $w'(t_0)$, $f'(z(t_0))$, $z'(t_0)$ satisfan la relació

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0).$$

Això vol dir que l'argument de $f'(z_0)$ és igual a l'angle que formen les rectes tangents a les corbes $w(t)$ i $z(t)$ en el punt t_0 . Vegeu Fig. 5.9.

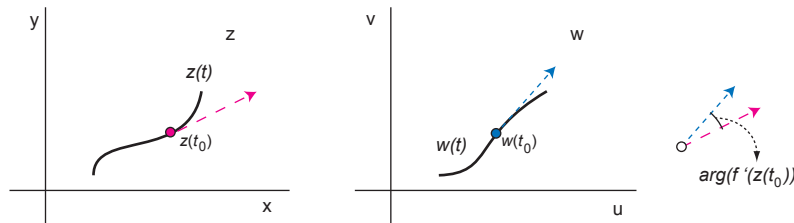


Figura 5.9: L'angle que formen els vectors tangents a les corbes $w(t)$ i $z(t)$ en el punt t_0 és $\arg(f'(z(t_0)))$.

En particular, si dues corbes es tallen en un punt z_0 , i formen un angle α , l'aplicació $f(z)$ les transforma en corbes que es tallen a $f(z_0)$ i que formen el mateix angle α , és a dir, es conserva la magnitud i el sentit. Fig 5.10.

Definició 5.7. Tota transformació que conserva els angles orientats s'anomena transformació conforme.

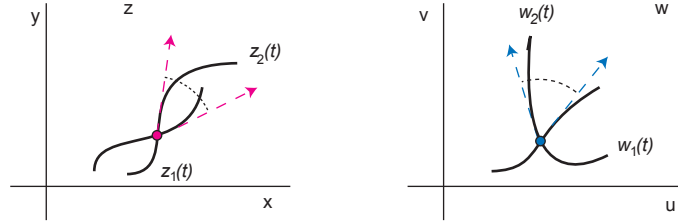


Figura 5.10: Una transformació conforme: l'angle que formen dues corbes i el que formen les seves transformades coincideix.

Proposició 5.8. Una transformació holomorfa és conforme en el punt z_0 si i només si $f'(z_0) \neq 0$.

Exemple 37. Provem que $f(z) = z^2$ és conforme en $z_0 = 2 + i$.

Com que $f'(z) = 2z$, és $f'(2) = 4 + 2i \neq 0$ i pel teorema anterior la transformació és conforme. Per tant ha de conservar angles. Comprovem-ho amb dues corbes qualsevol. Considerem les corbes a $\mathbb{C}$ definides per

$$z_1(t) = 2t + 2 + i(4t^3 + 1); \quad z_2(t) = t + 2 + i(t + 1)^2,$$

observem que per $t = 0$ totes dues passen pel punt z_0 . Les corbes transformades són, respectivament

$$w_1(t) = f(z_1(t)) = 4t^2 + 8t + 3 - 16t^6 - 8t^3 + i(16t^4 + 4t + 16t^3 + 4)$$

$$w_2(t) = f(z_2(t)) = -t^4 - 4t^3 - 5t^2 + 3 + i(8t^2 + 10t + 2t^3 + 4)$$

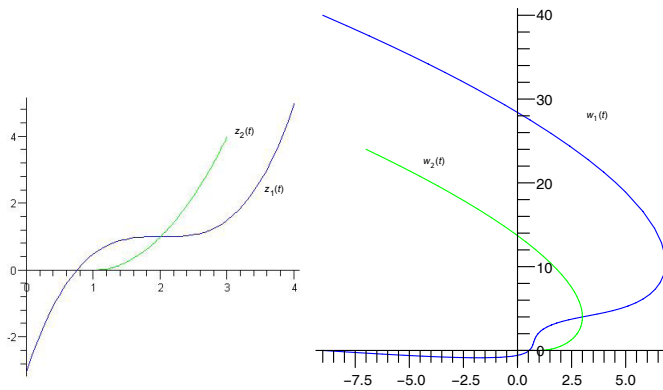


Figura 5.11: Dues corbes i les seves transformades per $f(z) = z^2$.

Calculem el vector tangent a cada corba en el punt z_0 .

$$\begin{aligned} z'_1(0) = 2 &\Rightarrow T_1 = (2, 0) \\ z'_2(0) = 1 + 2i &\Rightarrow T_2 = (1, 2) \end{aligned}$$

i l'angle que formen és

$$\arccos\left(\frac{T_1 T_2}{||T_1|| ||T_2||}\right) = 1.107148718.$$

Calculem ara el vector tangent a cadascuna de les corba transformades en el punt $f(z_0)$.

$$\begin{aligned} w'_1(0) = 8 + 4i &\Rightarrow T'_1 = (8, 4) \\ w'_2(0) = 10i &\Rightarrow T'_2 = (0, 10) \end{aligned}$$

i l'angle que formen és

$$\arccos\left(\frac{T'_1 T'_2}{||T'_1|| ||T'_2||}\right) = 1.107148718,$$

en efecte, els dos angles coincideixen.

5.3 Funcions holomorfes rellevants

5.3.1 La funció exponencial

Volem definir una funció $f(z) = e^z$ que sigui analítica i que coincideixi amb la funció exponencial quan z sigui real. Per tant, volem trobar una funció complexa que compleixi

$$f'(z) = f(z) \text{ i } f(0) = 1.$$

Si existeix ha de coincidir amb e^x quan $z = x$. Per tant, si $f(z) = u + iv$ es compleix:

$$u_x + iv_x = u + iv \text{ i } u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

com que $u_x = u$ i $v_x = v \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= p(y)e^x \\ v(x, y) &= q(y)e^x \\ p(0) &= 1, \quad q(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

per a certes funcions $p(y), q(y)$ que cal determinar. Derivem aquestes equacions i imposem que es compleixi Cauchy–Riemann:

$$p'(y)e^x = u_y = -v_x = -q(y)e^x$$

$$q'(y)e^x = v_y = u_x = p(y)e^x$$

per tant, $p' = -q$, $q' = p \rightarrow q'' = p' = -q$; $p'' = -q' = -p$.

Es dedueix que p , q són solucions de l'equació diferencial $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ les solucions de la qual són sempre de la forma $\phi(y) = A \cos y + B \sin y$. Imposant les condicions 5.8, queda

$$p(y) = \cos y$$

$$q(y) = \sin y.$$

Així doncs, es defineix l'exponencial complexa:

Definició 5.9. *La funció exponencial complexa és*

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

per a qualsevol $z \in \mathbb{C}$.

Propietats

- a) La derivada de la funció exponencial complexa és la mateixa funció:

$$f'(z) = f(z).$$

- b) La funció exponencial complexa en el zero val 1, $f(0) = 1$.

- b) L'exponencial mai no s'anul·la: $e^z \neq 0$ ja que per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$ és $e^x \neq 0$ i les funcions sinus i cosinus no s'anul·len simultàniament o sigui $\cos y + i \sin y \neq 0$.

- d) Observem que com que $z = x + iy$ de la definició es conclou:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

que és la **fórmula d'Euler**.

Per tant,

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

i es comprova fàcilment que $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$. En conseqüència,

$$|e^{iy}| = 1.$$

Fem notar que la fórmula d'Euler justifica la notació per a la representació polar d'un nombre complex que hem fet servir

$$z = |z|e^{i \arg z}.$$

e) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

f) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

ja que $e^{z_1-z_2} e^{z_2} = e^{z_1-z_2+z_2} = e^{z_1}$

g) e^z té període $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(2\pi+y)i} = e^x (\cos(2\pi + y) + i \sin(2\pi + y)) = e^z$$

5.3.2 Les funcions trigonomètriques i hiperbòliques

Definició 5.10. *Les funcions trigonomètriques es defineixen com:*

El cosinus complex

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

i el sinus complex

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Definició 5.11. *Les funcions hiperbòliques són:*

El cosinus hiperbòlic complex

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

i el sinus hiperbòlic

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Com es pot comprovar a partir de la definició, totes les identitats trigonomètriques per variable real són vàlides per variable complexa. Per exemple:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (-(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1. \end{aligned}$$

b) $1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z$

$$1 + \sinh^2 z = 1 + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} = \cosh^2 z$$

Calculem la part real i imaginària de les funcions que acabem de definir. Com que

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) \\ e^{-iz} &= e^{-i(x+iy)} = e^{y-ix} = e^y(\cos x - i \sin x) \end{aligned} \quad (5.9)$$

sumant les dues expressions anteriors i dividint per 2 obtenim la part real i la part imaginària de la funció $w = \cos z$,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Restant les dues expressions (5.9) i dividint per $2i$ obtenim la part real i la part imaginària de la funció $w = \sin z$,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2i} - i \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2i} = \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Es comprova fàcilment que les funcions trigonomètriques i hiperbòliques satisfan les equacions de Cauchy–Riemann i que les derivades respectives són:

$$\begin{aligned} \sin' z &= \cos z \\ \cos' z &= -\sin z \\ \sinh' z &= \cosh z \\ \cosh' z &= \sinh z. \end{aligned}$$

5.3.3 La funció logaritme

La funció logaritme natural de $z = x + iy$ $w = \ln z$ es defineix com la funció inversa de la funció exponencial:

$$w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w$$

fent $w = u + iv$ i $z = |z|e^{i\alpha}$ s'obté:

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z|e^{i\alpha}$$

Els dos termes han de ser iguals. Com que $|e^u e^{iv}| = e^u$ i $|re^{i\alpha}| = r \Rightarrow e^u = r = |z|$. Per tant, $u = \ln |z|$ on $\ln |z|$ és el logaritme natural real d'un nombre positiu $|z|$. De la mateixa

manera l'argument de w ha de complir $v + 2n\pi = \alpha = \arg z$, per a un $n \in \mathbb{Z}$ qualsevol i, per tant

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2n\pi) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i(\arg(x + iy) + 2n\pi),$$

ja que z té argument complex determinat fins a múltiples de 2π . El logaritme complex, doncs, té infinits valors. El valor de $\ln z$ que correspon al valor principal de $\arg z$, és a dir, $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ s'anomena *valor principal* de $\ln z$ i se sol escriure $\text{Ln}z$:

$$\ln z = \text{Ln}z \pm 2n\pi i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exemple 38. *Calculem:*

- $\ln 1 = \ln |1| + i \arg 1 = 0 + 2n\pi i$, amb $n \in \mathbb{Z}$.
 $\arg 1 = 0 + 2n\pi$
- $\ln e = \ln e + i \arg e = 1 + 2n\pi i$, amb $n \in \mathbb{Z}$.
 $\arg e = 0 + 2n\pi$
- $\ln(-e^2) = \ln |-e^2| + (2n+1)\pi i = 2 + (2n+1)\pi i$, amb $n \in \mathbb{Z}$.
 $\arg(-e^2) = \pi + 2n\pi$
- $\ln(ie) = \ln |e| + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$, amb $n \in \mathbb{Z}$.

5.4 Funcions harmòniques. Equació de Laplace

Definició 5.12. Una funció $h : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és harmònica a $\mathcal{D}$ si té derivades parcials de primer i segon ordre contínues a $\mathcal{D}$ i, a més, satisfà l'equació de Laplace:

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} = 0, \quad a \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2. \quad (5.12)$$

L'operador Δ també s'escriu com ∇^2 .

Teorema 5.13. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ és holomorfa a $\mathcal{D}$ i té derivades parcials d'ordre 2 contínues a $\mathcal{D}$ aleshores $u(x, y)$ i $v(x, y)$ són funcions harmòniques.

Demostració. Si f holomorfa $\Rightarrow u_x = v_y$ i $u_y = -v_x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{array} \right\} u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = \{u_x, u_y, v_x, v_y \text{ són contínues a } \mathcal{D}\} = 0$
Anàlogament: $\left. \begin{array}{l} u_{xy} = v_{yy} \\ -u_{yx} = v_{xx} \end{array} \right\} v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \blacksquare$

Definició 5.14. Si $u(x, y)$ i $v(x, y)$ són harmòniques a $\mathcal{D}$ i satisfan les equacions de CR a $\mathcal{D}$ ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) es diu que v és l'harmònica conjugada de u .

Teorema 5.15. *La part real i la part imaginària d'una funció complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfa a $\mathcal{D}$ són solucions de l'equació de Laplace.*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

a $\mathcal{D}$ i tenen les derivades parcials de segon ordre contínues a $\mathcal{D}$.

Exemple 39. *Proveu que la funció $u(x, y) = 3x^3 - 9xy^2 + 5x^2 - 5y^2 - x$ és harmònica, calculeu la seva harmònica conjugada i trobeu la funció holomorfa associada.*

Calculeu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 - 9y^2 + 10x - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -18xy - 10y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x + 10; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -18x - 10;$$

i es compleix l'equació de Laplace (5.12).

La funció $u(x, y)$ és harmònica. La seva harmònica conjugada $v(x, y)$ ha de complir les equacions de Cauchy–Riemann

$$v_y = u_x = 9x^2 - 9y^2 + 10x - 1; \quad v_x = -u_y = -(-18xy - 10y).$$

De la primera equació, $v = 9x^2y - 3y^3 + 10xy - y + \varphi(x)$, on $\varphi(x)$ és una funció qualsevol. Calculant v_x i igualant amb la segona equació, queda

$$v_x = 18xy + 10 + \varphi'(x) = 18xy + 10 \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Per tant, $v = 9x^2y - 3y^3 + 10xy - y + C, \in \mathbb{R}$.

Per tant, la funció holomorfa associada a u és

$$\begin{aligned} w &= u + iv = (3x^3 - 9xy^2 + 5x^2 - 5y^2 - x) + i(9x^2y - 3y^3 + 10xy - y + C) \\ &= 3(x + iy)^3 + 5(x + iy)^2 - (x + iy) + iC, \end{aligned}$$

que en notació complexa s'escriu com $f(z) = 3z^3 + 5z^2 - z + iC$.

5.5 Exercicis

1. Trobeu la part real i imaginària de les següents funcions

i) $f(z) = 2z^2 - 3iz$

ii) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

iii) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$

2. Estudieu si les següents funcions són holomorfes

i) $f(z) = z$

vi) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z;$

ii) $f(z) = z^2$

vii) $f(z) = z \operatorname{Im} z;$

iii) $f(z) = |z|^2$

viii) $f(z) = iz + 2;$

iv) $f(z) = z - \bar{z}$

ix) $f(z) = z^3;$

v) $f(z) = \bar{z};$

3. Proveu que

i) $e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$

iv) $e^z \neq 0$

ii) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

iii) $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

v) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

4. Calculeu e^z per a $z = -\frac{\pi i}{4}$, $z = 2 + 5\pi i$, $z = 1 + i$.

5. Trobeu les expressions dels següents complexos en la forma $z = |z|e^{i\arg z}$: $z = 3 + 4i$, $z = \sqrt{i}$, $z = 2 + 2i$.

6. Comproveu que per a z real positiu, el valor principal del logaritme coincideix amb el logaritme real. Si z és real negatiu llavors $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + \pi i$.

7. Trobeu els transformats del cercle $(x-3)^2 + y^2 = 2$ i la recta $2x + 3y = 7$ per la funció $f(z) = \frac{1}{z}$.

8. Donada la inversió $f(z) = \frac{1}{z}$ dibuixeu les imatges de les corbes $x = c_1$, $y = c_2$, on c_1 i c_2 són dues constants reals tals que $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Proveu que són ortogonals.

9. Trobeu tots els nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ tals que $e^{i\pi+z} = e^z$.

10. Calculeu $\ln(-\sqrt{3} + \sqrt{3}i)$.

11. Calculeu e^{3-i} , $(1+i)^{3i}$, $i^{\sin i}$, $\frac{2+i}{e^{i-1}}$, $\sin i$.

12. Calculeu

$$\log e; \quad \log i \log(-1 + \sqrt{3}i); \quad \log(-ei); \quad \log(1-i).$$

13. Resoleu les següents equacions

i) $e^z = -2$

ii) $e^z = 1 + \sqrt{3}i$

iii) $e^{2z-1} = 1$

iv) $e^{z^2} = 1$

14. Calculeu el valor principal de:

i) $\ln i$

iii) i^i

ii) $\ln(1+i)$

iv) $(1+i)^i + i$

15. Proveu que la funció $f(z) = \frac{1-2z}{3z}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostreu que les funcions $u = \operatorname{Re}(f(z))$ i $v = \operatorname{Im}(f(z))$ són harmòniques conjugades.

16. Demostreu que $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ és harmònica. Trobeu v tal que $f(z) = u + iv$ sigui holomorfa.