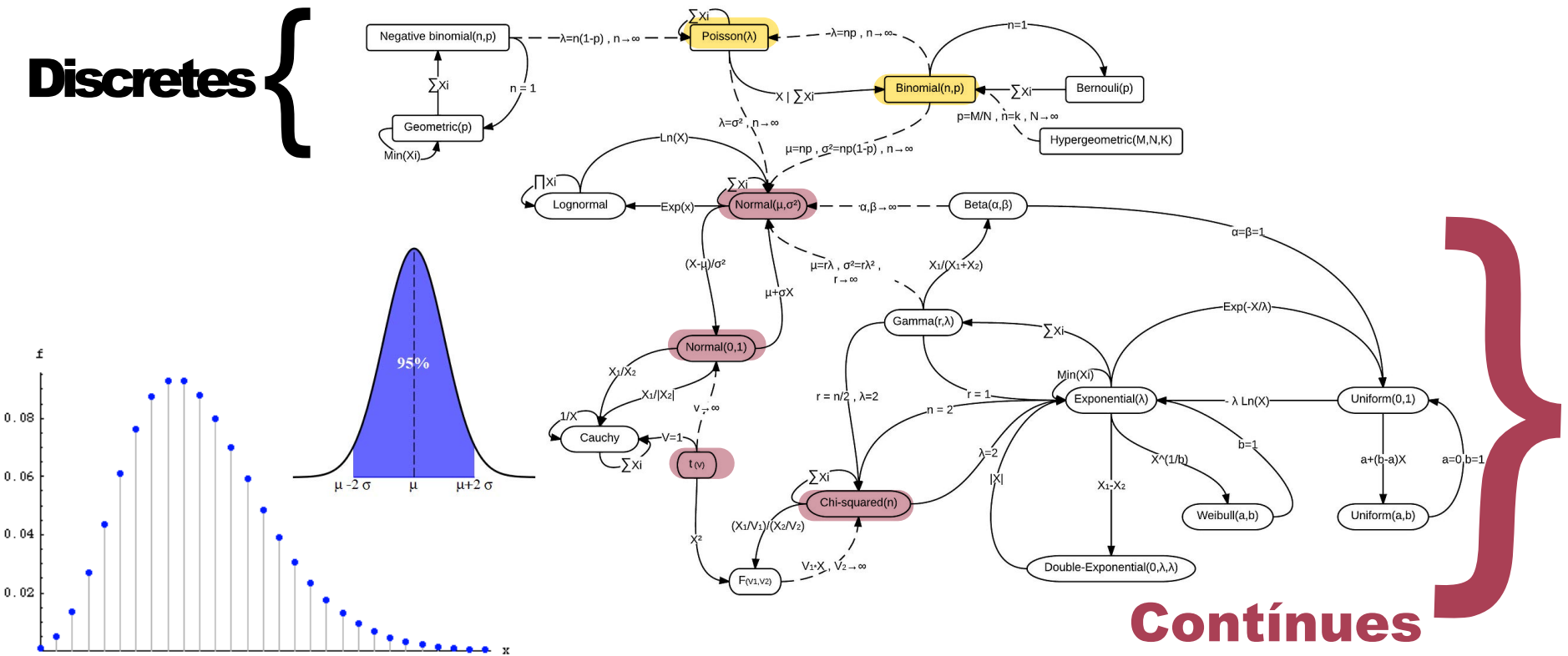


ESTADÍSTICA APLICADA

Variables Aleatòries Discretes(VAD)

Discretes



VAD– Variables Aleatòries

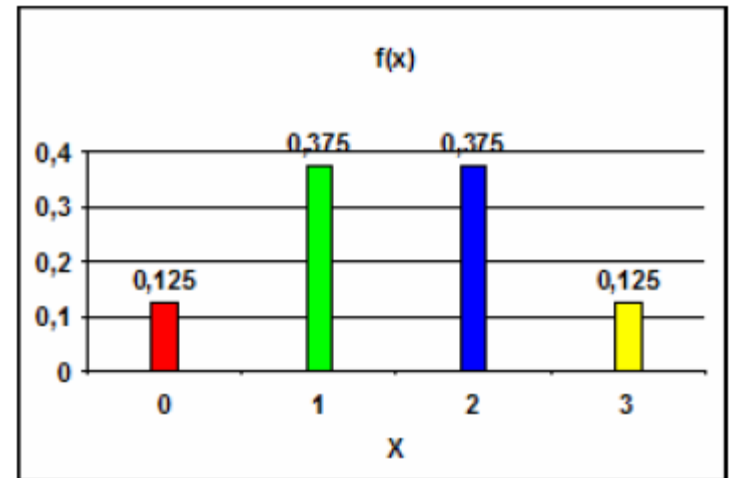
- Una **variable aleatòria (v.a.)** és tota aplicació $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que assigna un nombre real a cada esdeveniment elemental
- Si $X(\Omega)$ és numerable es diu que X és **discreta**. Si $X(\Omega)$ és no numerable es diu que X és **contínua**
- Exemple v.a. discreta (llançament de 3 monedes):
 - $X = \text{“nombre de cares”}$
 - $\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$
 - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
- Exemple v.a. contínua (llançament de dard a diana):
 - $X = \text{“distància del dard al centre de la diana”}$
 - $X(\Omega) = [0, L)$ ($L = \text{radi de la diana}$)

(Continua)

VAD– Variables Aleatòries

- La funció de probabilitat (f.p.) associada a una v.a. discreta, X , és l'aplicació $f: X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x_i) = P(X = x_i)$
- Exemple (llançament de 3 monedes):

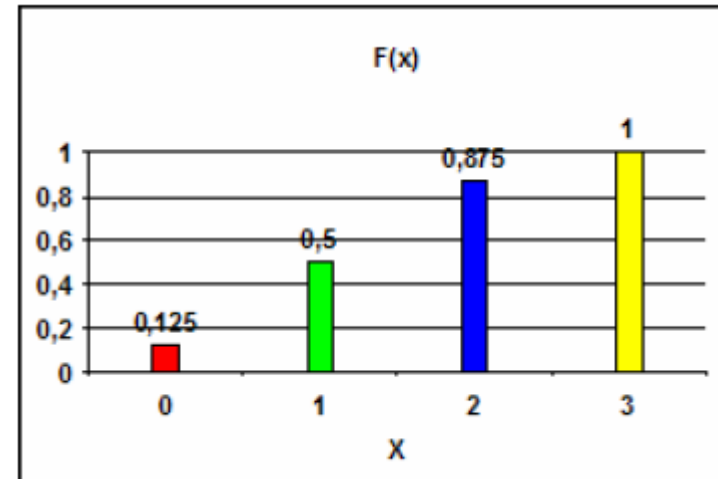
- $X = \text{"nombre de cares"}$
- $\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$
- $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
- $f(0) = P(X = 0) = 1/8$
 $f(1) = P(X = 1) = 3/8$
 $f(2) = P(X = 2) = 3/8$
 $f(3) = P(X = 3) = 1/8$



- Observació: la suma de tots els valors que pren la f.p. ha de ser 1, i.e.: $\sum f(x_i) = 1$ (Continua)

VAD– Variables Aleatòries

- La **funció de distribució (f.d.)** associada a una v.a. discreta, X , és l'aplicació $F: X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tal que **$F(x_i) = P(X \leq x_i)$**
- Exemple (llançament de 3 monedes):
 - $X = \text{"nombre de cares"}$
 - $\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$
 - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
 - $F(0) = P(X \leq 0) = 1/8$
 $F(1) = P(X \leq 1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$
 $F(2) = P(X \leq 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$
 $F(3) = P(X \leq 3) = 1$
- Observació: la f.d. és monòtona creixent (de 0 a 1) i esglaonada



VAD– Característiques v.a. discretes

- **Esperança o mitjana** d'una v.a. X : $E[X] = \mu = \sum x_i \cdot f(x_i)$
- **Variància** d'una v.a. X : $Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$
- **Desviació tipus** d'una v.a. X : $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$
- **Exemple (llançament de 3 monedes):**
 - $X = \text{"nombre de cares"}; X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
 - $f(0) = f(3) = 1/8 \quad f(1) = f(2) = 3/8$
 - $E[X] = \sum(x_i \cdot f(x_i)) = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 3/2 = 1.5$
 - $E[X^2] = \sum(x_i^2 \cdot f(x_i)) = 0^2 \cdot 1/8 + 1^2 \cdot 3/8 + 2^2 \cdot 3/8 + 3^2 \cdot 1/8 = 3$
 - $Var[X] = 3 - 1.5^2 = 0.75 \rightarrow \sigma = 0.866$
- **Observació:** quan més petita sigui σ , més concentrats al voltant de $E[X]$ estaran els valors x_i

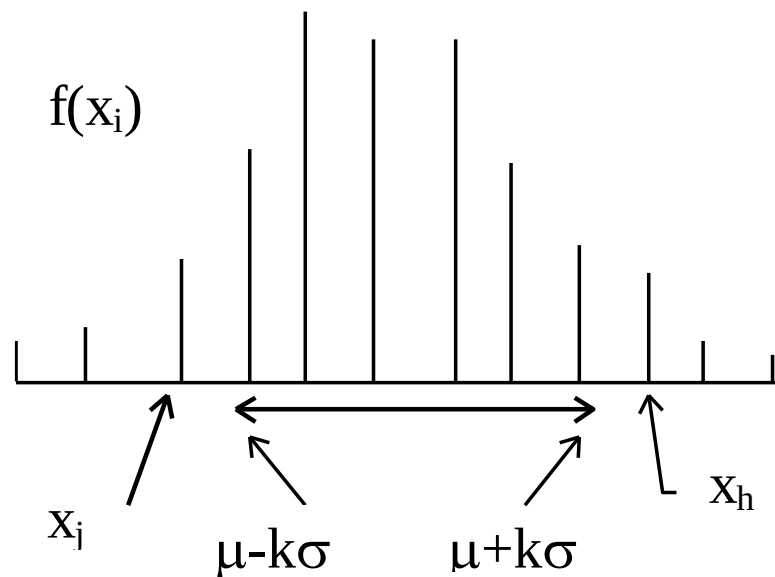
(Continua)

VAD– Característiques v.a. discretes

- **Teorema de Txebyshev:** “és molt poc probable trobar dades que estiguin molt allunyades de la mitjana; menys probable quan més ens allunyem d'aquesta mitjana”

Sigui $k > 0$ un nombre real, llavors:

$$P(\mu - k \cdot \sigma \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$



Només els casos en que $k > 1$ proporcionen informació útil

VAD– Distribució binomial

- **Experiència Bernoulli:** experiment aleatori amb 2 possibles resultats, **èxit o fracàs** (1/0, blanc/negre, on/off...), i amb probabilitat d'èxit constant **p**. Si X és la v.a.: $X \sim B(p)$
- Si es realitzen n experiències Bernoulli independents i X és la **v.a. que compta el nombre d'èxits en les n proves** $\rightarrow X$ direm que segueix una **distribució Binomial**, i.e.: $X \sim B(n, p)$
- Si $X \sim B(n, p)$ i k = nombre d'èxits en les n proves, llavors:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \quad 0! = 1! = 1$$

- Si $X \sim B(n, p) \rightarrow E[X] = n \cdot p \quad Var[X] = n \cdot p \cdot (1-p)$

(Continua)

VAD – Distribució binomial

Exemple. Distribució binomial.

Volem estudiar la probabilitat que, en llançar 5 vegades un dau, s'obtingui exactament tres vegades 1 punt.

L'experiència de Bernoulli consisteix en observar si apareix "1" o no al llançar el dau. Per tant, si A = "s'ha obtingut un 1 al llançar el dau", la seva probabilitat és $p(A) = 1/6 =: p$.

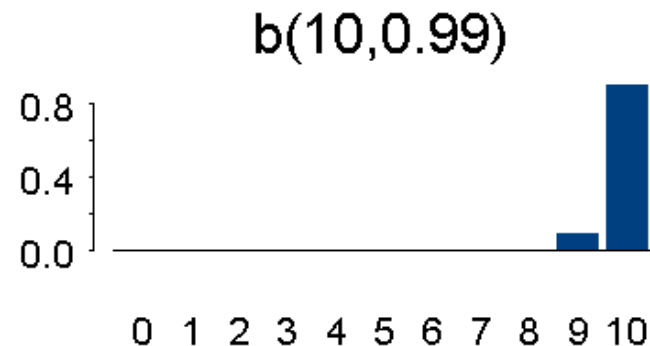
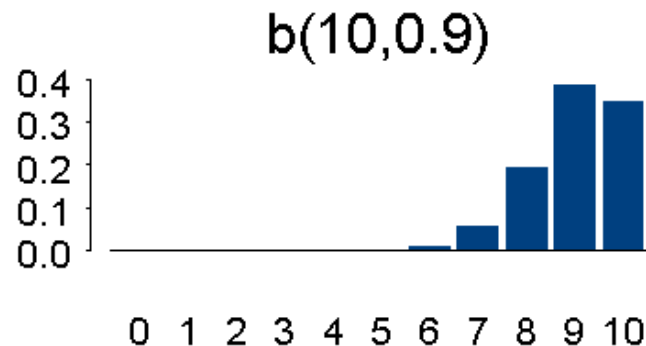
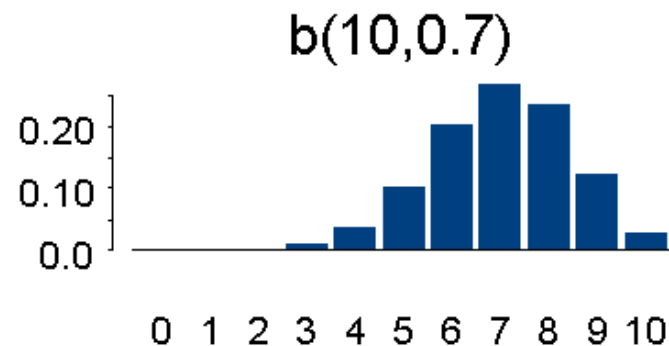
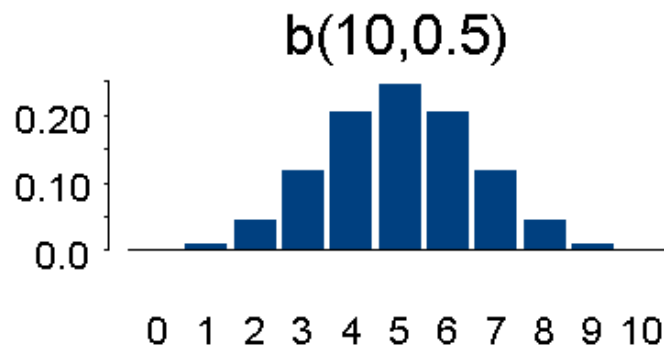
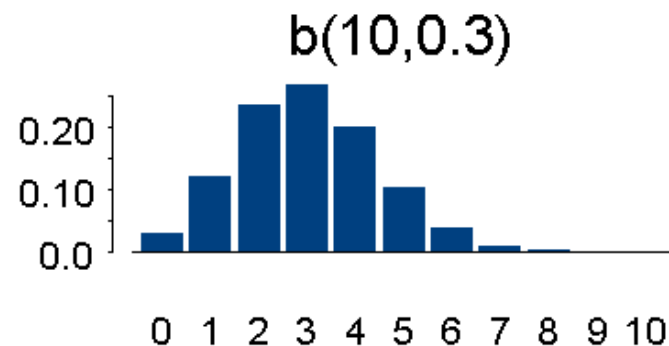
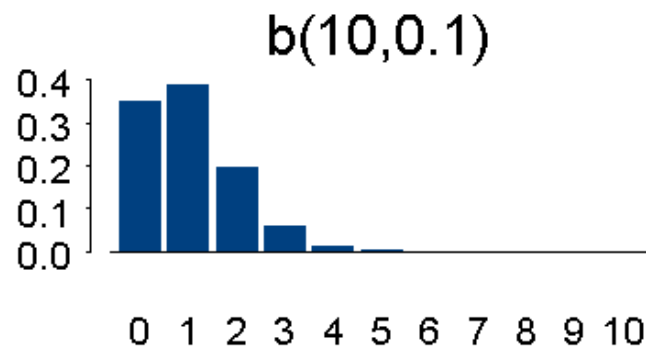
Com que realitzem l'experiència de Bernoulli 5 vegades, $n = 5$.

La variable aleatòria X = "nombre de vegades que treiem 1" segueix, doncs, una distribució binomial $B(5, 1/6)$ i, per tant,

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^3 2}{6^5} \approx 0.032 = 3.2\%$$

(Continua)

VAD– Distribució binomial



VAD– Distribució de Poisson

- **Experiència de Poisson:** experiment aleatori consistent en enregistrar l'observació d'un esdeveniment puntual i independent en un interval continu de temps o d'espai (p.e.: arribada d'un cotxe a un peatge, arribada d'una petició a un servidor web, aparició d'una fallida en una estructura, ...)
- En una experiència de Poisson, si anomenem $X = \text{"nombre d'ocurrències en un interval determinat"}$, aquesta v.a. segueix una **distribució de Poisson** de paràmetre λ , on λ és la mitjana d'observacions per unitat de temps, i.e.: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (p.e.: nombre de cotxes que arriben al llarg de 3 hores, nombre de clients que arriben al llarg d'un matí, ...)
- Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ i k és un natural, llavors:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$$

(Continua)

VAD – Distribució de Poisson

Exemple. Una experiència de Poisson.

Una persona fa 4 errors per pàgina, de mitjana, en utilitzar un processador de textos.

Quina és la probabilitat que a la propera pàgina faci:

a) 4 o més errors?

Considerem la variable X = “nombre d’errors per pàgina”. La seva distribució de probabilitat seguirà una llei de Poisson de paràmetre 4. Per tant,

$$\begin{aligned}P(X > 3) &= 1 - P(X < 4) \\&= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\&= 1 - e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} \right) \\&= 1 - e^{-4} \left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} \right) \approx 0.5665.\end{aligned}$$

b) cap error?

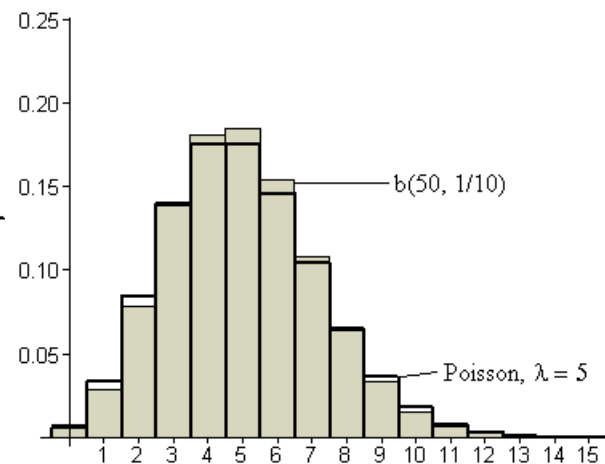
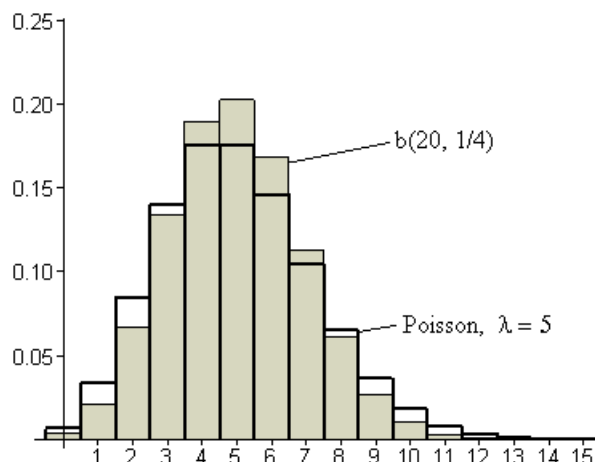
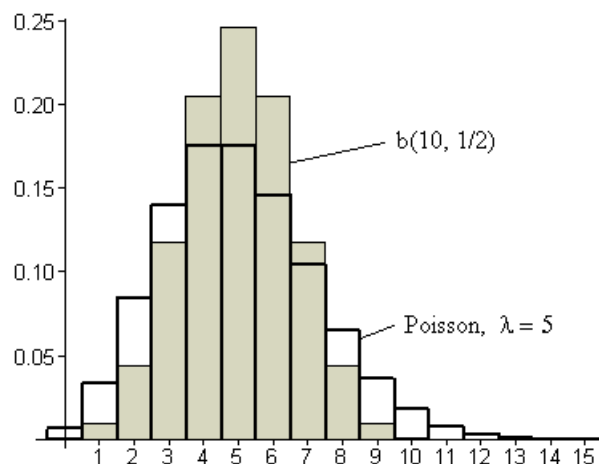
$$P(X = 0) = e^{-4} \frac{4^0}{0!} = e^{-4} \approx 0.0183.$$

(Continua)

VAD – Distribució de Poisson

■ Aproximació d'una Binomial per una Poisson:

Si $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$, llavors: $B(n, p) \approx \text{Poisson}(n \cdot p)$



$n \rightarrow \infty$

$p \rightarrow 0$